Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

Gérard Lallement

Congruences sur les demi-groupes réguliers

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, nº 2 (1964-1965), exp. nº 24, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_2_A5_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
18e année, 1964/65, n° 24

24 mai 1965

CONGRUENCES SUR LES DEMI-GROUPES RÉGULIERS

par Gérard LALLEMENT

Sur certains demi-groupes, les congruences sont définies par la donnée des classes des idempotents ; c'est le cas pour les demi-groupes inverses [11], [13], les demi-groupes complètement 0-simples [12], et d'une façon plus générale pour tout demi-groupe régulier. Dans le même ordre d'idées, s'est posé le problème de l'effet d'une congruence sur l'ensemble des idempotents. Ce problème a été abordé récemment par HOWIE [5] et MUNN [10]. MUNN a montré que, sur certains demi-groupes réguliers, l'ensemble des congruences "séparant" les idempotents coïncide avec le sous-treillis des congruences plus fines que l'équivalence $\mathcal{H}$ de Green. En fait, ce résultat est valable pour un demi-groupe régulier quelconque, et peut s'étendre aux congruences dont la restriction à l'ensemble des idempotents est plus fine que la restriction de l'une quelconque des équivalences de Green. Nous mettons ainsi en évidence divers sous-treillis complets du treillis des congruences, et nous les utilisons pour donner une description des congruences sur le demi-groupe $\mathcal{T}_\Omega$ des transformations sur un ensemble Ω. Les congruences séparant les idempotents sur un demi-groupe régulier quelconque, forment un treillis modulaire ; cette analogie remarquable avec le cas des groupes se poursuit dans l'expression même des congruences de ce treillis. Dans tout l'exposé, les équivalences de Green jouent un rôle essentiel. Leur importance, quant à la structure des demi-groupes réguliers, avait déjà été mise en évidence par R. CROISOT [2].

1. Demi-groupes $\mathcal{K}$-réguliers.

D étant un demi-groupe quelconque, on désigne par $\mathcal{K}$ l'une des équivalences de Green $\mathcal{H}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{J}$ sur D (cf. [1], paragraphe 2.1). Soit E l'ensemble éventuellement vide des idempotents de D . Notons $\rho|_E$ la restriction d'une équivalence ρ de D à l'ensemble E , et $\Lambda(D)$ le treillis des congruences de D . Si a et b sont équivalents par ρ , nous écrivons $(a , b) \in \rho$ (ρ est considérée comme partie de $D \times D$).

DÉFINITION 1.1. - Un demi-groupe D est dit $\mathcal{K}$-régulier si, pour toute congruence $\rho \in \Lambda(D)$, $\rho|_E \subseteq \mathcal{K}|_E$ entraîne $\rho \subseteq \mathcal{K}$.

Comme $\mathcal{H}|_E$ coïncide avec l'égalité, une congruence ρ , telle que $\rho|_E \subseteq \mathcal{H}|_E$

(d'ailleurs équivalent à $\rho|_E = \mathcal{H}|_E$), sépare les idempotents en ce sens que chaque ρ-classe contient au plus un idempotent.

DÉFINITIONS 1.2.

(a) I étant un idéal bilatère propre de D, on dit que D est I-inversé si, pour tout $a \notin I$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in E \setminus I$ supposé non vide ($E \setminus I$ désigne l'ensemble des idempotents n'appartenant pas à I).

(b) D est dit inversé, s'il est sans zéro, et si pour tout $a \in D$ il existe $x \in D$ tel que $ax \in E$.

Si D est I-inversé, pour tout $a \notin I$ il existe y tel que $ya \in E \setminus I$ (prendre $y = xax$, où x est tel que $ax \in E \setminus I$) ; le complexe $E \setminus I$ est donc équirésiduel de résidu I . Pour un demi-groupe quelconque : ou bien $E \setminus I$ est vide, ou bien il est équirésiduel et son résidu contient I . (En ce qui concerne la notion de résidu, voir [3], p. 233.)

En comparant les congruences de Rees ρ_I , définies par $\rho_I = (I \times I) \cup \iota_D$ où ι_D est l'égalité sur D , aux équivalences de Green, on peut préciser le lien entre la $\mathcal{K}$-régularité et la propriété "inversé".

LEMME 1.3. - Si une $\mathcal{K}$-classe de Green K contient un idéal bilatère I de D, alors :

(a) $K = I$, et c'est le noyau (idéal bilatère minimum) de D ;

(b) Pour $\mathcal{K} = \mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{L}$), K est simple à droite (resp. à gauche) ; pour $\mathcal{K} = \mathcal{H}$, K est un groupe.

Démonstration.

(a) Soit $a \in I \subseteq K$. Pour tout $x \in K$, $(a , x) \in \mathcal{J}$, donc $x \in D^1 a D^1 \subseteq I$, et $K = I$. Si I' est un idéal bilatère de D , $I' \cap K = K$ et $K \subseteq I'$, donc K est minimum.

(b) Supposons $\mathcal{K} = \mathcal{R}$. Pour tout $a \in K$, d'une part $aD^1 \subseteq K$, d'autre part : $x \in I \implies x \in aD^1$, car $(x , a) \in \mathcal{R}$; donc $aD^1 = K = D^1 a D^1$. Il en résulte $Da \subseteq a \cup aD$, d'où $K = KaK \subseteq DaK \subseteq aK \cup aDK = aK$. Comme $aK \subseteq K$, il s'ensuit $aK = K$, et K est simple à droite. Une démonstration analogue vaut pour $\mathcal{K} = \mathcal{L}$, et le résultat relatif à $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ se déduit des précédents.

THÉORÈME 1.4.

1° Si D est $\mathcal{H}$-régulier, il est inversé ou 0-inversé ;

2° Si D est respectivement $\mathcal{R}$-, $\mathcal{L}$-, $\mathcal{D}$-, $\mathcal{J}$-régulier,
- ou bien il est sans idempotents et respectivement simple à droite, à gauche, bisimple, simple,
- ou bien D a un noyau K sans idempotents, simple à droite dans le cas $\mathcal{R}$-régulier, à gauche dans le cas $\mathcal{L}$-régulier, et D est K-inversé,
- ou bien D est inversé.

Démonstration.

1° Supposons que D soit $\mathcal{H}$-régulier. Soit $I \neq (0)$ un idéal bilatère de D ne contenant pas d'idempotents autres que 0 (si D a un zéro). La congruence de Rees ρ_I sépare les idempotents, donc $\rho_I \subseteq \mathcal{H}$; d'après le lemme 1.3, I est un groupe, donc : ou bien $I = (0)$ (si D a un zéro), ou bien I contient un idempotent (si D est sans zéro) ; dans tous les cas, il y a contradiction avec l'hypothèse. Tout idéal bilatère $\neq (0)$ contient donc un idempotent non nul. D'après la remarque suivant la définition 1.2, $E \setminus (0)$ a pour résidu un idéal bilatère W. W ne contient pas d'idempotents non nuls, donc $W = (0)$ et D est 0-inversé. S'il a un zéro, E est net, et D est inversé s'il est sans zéro.

2° Si D est sans idempotents, il est respectivement simple à droite, à gauche, bisimple ou simple. Si D a un noyau K non réduit à zéro : ou bien K contient un idempotent et dans ce cas D est inversé, ou bien K est sans idempotents et on démontre comme au 1° (remplacer (0) par K) que D est K-inversé. Dans ce dernier cas, les propriétés particulières de K, relatives à la $\mathcal{R}$- ou $\mathcal{L}$-régularité, résultent du lemme 1.3 (b).

Le théorème précédent donne des conditions nécessaires de $\mathcal{K}$-régularité. Elles sont loin d'être suffisantes. Par exemple, dans le demi-groupe non commutatif dont la table est :

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	1	2	0
3	0	0	0	3

,

toutes les équivalences de Green coïncident avec l'identité ; la congruence de classes $\{0, 1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ sépare les idempotents.

Pour un demi-groupe commutatif, toutes les équivalences de Green coïncident, et :

THÉORÈME 1.5 [1]. - Si D commutatif est $\mathcal{K}$-régulier, il est régulier.

(Un demi-groupe quelconque est dit régulier si, pour tout $a \in D$, il existe $x \in D$ tel que $axa = a$. Les demi-groupes commutatifs réguliers sont réunions de groupes.)

Démonstration. - La relation ρ définie par

$$(a, b) \in \rho \iff a \text{ divise une puissance de } b \text{ et } b \text{ divise une puissance de } a ,$$

est la plus fine congruence idempotente sur D (cf. [1], paragraphe 4.3). Comme ρ sépare les idempotents, ρ est contenue dans $\mathcal{K}$. Les ρ-classes sont des sous-demi-groupes, donc D est réunion de groupes ([1], théorème 2.16).

2. Demi-groupes réguliers.

Dans toute cette partie, D est supposé régulier. Pour tout $a \in D$, il existe un élément a' au moins tel que $aa'a = a$ et $a'aa'$. Un tel élément est appelé un inverse de a. Nous notons K_a la $\mathcal{K}$-classe d'un élément a, et nous utilisons les relations d'ordre définies sur les

$\mathcal{R}$- (resp. $\mathcal{L}$-) classes par : $R_a \leqslant R_b \iff aD \subseteq bD$ (resp. $L_a \leqslant L_b \iff Da \subseteq Db$),
$\mathcal{H}$-classes par : $H_a \leqslant H_b \iff R_a \leqslant R_b$ et $L_a \leqslant L_b$,
$\mathcal{J}$-classes par : $J_a \leqslant J_b \iff DaD \subseteq DbD$.

Note. - Rappelons que sur D régulier l'équivalence $\mathcal{R}$ par exemple, peut être définie par : $(a, b) \in \mathcal{R} \iff aD = bD$, car, pour tout $a \in D$, $a \in aD$.

LEMME 2.1. - Dans un demi-groupe régulier, pour tout a, il existe un idempotent i au moins tel que :

1° $aia = a^2$;

2° $H_i \leqslant H_a$.

Démonstration. - Soit $(a^2)'$ un inverse de a^2. On a

$$a(a^2)'a . a(a^2)'a = a(a^2)'a^2(a^2)'a = a(a^2)'a \quad .$$

L'élément $a(a^2)'a$ est donc un idempotent i vérifiant les 1° et 2° de l'énoncé.

THÉORÈME 2.2. - Soit ρ une congruence quelconque sur un demi-groupe régulier. Toute ρ-classe, qui est un sous-demi-groupe, contient un idempotent.

---

[1] La question de savoir si un demi-groupe quelconque, $\mathcal{K}$-régulier pour tout $\mathcal{K}$, est régulier ou non, n'a pas été résolue.

Démonstration. - Soit A une ρ-classe qui est un sous-demi-groupe, et $a \in A$. D'après le lemme 2.1, il existe $i \in E$ tel que $aia = a^2$ et $i = aza$. Il en résulte, d'une part $(aia , a) \in \rho$, d'autre part $aia = a^2 za^2$. Comme

$$(a^2 za^2 , aza) \in \rho \quad ,$$

on en déduit par transitivité $(aia , i) \in \rho$, et enfin $(a , i) \in \rho$, c'est-à-dire $i \in A$.

En terme d'homomorphisme, le théorème 2.2 indique que, dans tout homomorphisme d'un demi-régulier sur un autre, le sous-demi-groupe image inverse d'un idempotent contient un idempotent.

THÉORÈME 2.3. - Tout demi-groupe régulier est $\mathcal{K}$-régulier, $\mathcal{K}$ désignant l'une quelconque des équivalences de Green.

Démonstration.

1° Soit ρ une congruence telle que $\rho|_E \subseteq \mathcal{R}|_E$. Si $(a , b) \in \rho$, alors $(aa' , ba') \in \rho$, a' désignant un inverse de a. D'après le lemme 2.1 et le théorème 2.2, il existe $i \in E$ tel que $H_i \leqslant H_{ba'}$ et $(aa' , i) \in \rho$. Comme $\rho|_E \subseteq \mathcal{R}|_E$, on obtient $R_{aa'} = R_i \leqslant R_{ba'} \leqslant R_b$. Or $R_{aa'} = R_a$, donc $R_a \leqslant R_b$. En permutant les rôles de a et b, on démontre de même $R_b \leqslant R_a$; d'où $(a , b) \in \mathcal{R}$, et $\rho \subseteq \mathcal{R}$. On démontre symétriquement que D est aussi $\mathcal{L}$-régulier. La $\mathcal{H}$-régularité se déduit de la $\mathcal{R}$- et $\mathcal{L}$-régularité ($\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$).

2° Soit ρ une congruence telle que $\rho|_E \subseteq \mathcal{D}|_E$.

(a) Supposons d'abord que $(a , e) \in \rho$ avec $e \in E$. Soit a' un inverse de a. On a $aa' = f \in E$ et $a'a = g \in E$. En prenant l'idempotent i, défini dans la démonstration du lemme 2.1, on a

$$fi = i = ig \qquad \text{et} \qquad gif = a'a^2(a^2)'a^2a' = a'a^2a' = (a'a)(aa') = gf \quad .$$

Comme $(a , f) \in \mathcal{R}$, il en résulte $(ga , gf) \in \mathcal{R}$. On vérifie sans difficulté que ga admet $a'i$ comme inverse, d'où $(a'iga , ga) \in \mathcal{L}$ ou encore $(a'ia , ga) \in \mathcal{L}$. Compte tenu de $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$, il vient $(a'ia , gf) \in \mathcal{D}$. Par ailleurs, $(gf , i) \in \mathcal{D}$ et $(i , e) \in \rho$ (d'après le théorème 2.2) impliquant $(i , e) \in \mathcal{D}$, on obtient $(gf , e) \in \mathcal{D}$. Par transitivité, $(a'ia , e) \in \mathcal{D}$. Maintenant, $(a'ia , a'a) \in \rho$ implique, d'après l'hypothèse, $(a'ia , a'a) \in \mathcal{D}$ ($a'ia$ est un idempotent). Puisque $(a'a , a) \in \mathcal{L}$, il en résulte $(a , a'ia) \in \mathcal{D}$, d'où en définitive $(a , e) \in \mathcal{D}$.

(b) Supposons que $(a , b) \in \rho$. Soit b' un inverse de b, et posons $b'b = h$ $(\in E)$. On a les implications suivantes :

$$(a\ ,\ b) \in \rho \implies (aa'\ ,\ ba') \in \rho \implies (aa'\ ,\ ba') \in \mathcal{D} \implies (a\ ,\ ba') \in \mathcal{D}$$

$$\text{et}\quad \left.\begin{array}{l}(b\ ,\ h) \in \mathcal{L} \\ (a'\ ,\ g) \in \mathcal{R}\end{array}\right\} \implies (ba'\ ,\ hg) \in \mathcal{D}\ .$$

Or $hg = b'ba'a$ et $(b'ba'a\ ,\ b'aa'a) \in \rho$. Comme $(b'a\ ,\ b'b) \in \rho$, il en résulte $(hg\ ,\ h) \in \rho$ et, d'après (a), $(hg\ ,\ h) \in \mathcal{D}$.

Enfin $(h\ ,\ b) \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}$, d'où par transitivité : $(a\ ,\ b) \in \mathcal{D}$.

3° Supposons que $\rho|_E \subseteq \mathcal{J}|_E$.

(a) Si $(a\ ,\ e) \in \rho$, il existe $i \in E$ tel que $H_i \leqslant H_a$ avec $(i\ ,\ e) \in \rho$. Donc $J_i = J_e$ et $J_i \leqslant J_a$. Il en résulte $J_e \leqslant J_a$.

(b) Si $(a\ ,\ b) \in \rho$, alors $(aa'\ ,\ ba') \in \rho$, et d'après (a), $J_{aa'} \leqslant J_{ba'} \leqslant J_b$; or $J_{aa'} = J_a$, donc $J_a \leqslant J_b$. En permutant les rôles de a et b , on montre de même que $J_b \leqslant J_a$, d'où $(a\ ,\ b) \in \mathcal{J}$.

Le théorème précédent montre que, sur un demi-groupe régulier, les congruences

ρ plus fines que $\mathcal{H}$ sont caractérisées par $(e\ ,\ f) \in \rho \implies e = f$;

ρ plus fines que $\mathcal{R}$ sont caractérisées par $(e\ ,\ f) \in \rho \implies ef = f$ et $fe = e$;

ρ plus fines que $\mathcal{D}$ sont caractérisées par $(e\ ,\ f) \in \rho \implies \exists\ a \in D$ et a' inverse de a tels que $aa' = e$ et $a'a = f$;

etc...

3. Sous-treillis du treillis des congruences sur un demi-groupe régulier. Autres conséquences.

Pour un demi-groupe D quelconque et une équivalence donnée $\mathcal{E}$ sur D , il existe une congruence maximum contenue dans $\mathcal{E}$, nommément la congruence

$$\rho_{\mathcal{E}} = \{(a\ ,\ b)\ ;\ \ (uav\ ,\ ubv) \in \mathcal{E}\ ,\ \ \forall\ u\ ,\ \ \forall\ v \in D^1\}\ .$$

Il résulte du théorème 2.3 que, sur un demi-groupe régulier, pour chaque relation de Green $\mathcal{K}$, les congruences ρ telles que $\rho|_E \subseteq \mathcal{K}|_E$ forment un sous-treillis complet du treillis des congruences. De même, s'il existe une congruence ρ , telle que $\rho|_E = \mathcal{K}|_E$, alors toutes les congruences possédant cette propriété forment un sous-treillis complet.

Les sous-treillis relatifs aux diverses congruences peuvent coïncider ; par exemple, dans un demi-groupe inverse (demi-groupe régulier dont les idempotents commutent), on sait que tout idéal principal d'un côté a un générateur idempotent unique (cf. [1], théorème 1.17) ; il en résulte que $\mathcal{R}|_E = \mathcal{L}|_E = \mathcal{H}|_E = \iota_E$, d'où la coïncidence des treillis relatifs à $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$. En fait, le théorème 2.3 montre qu'il n'existe pas de congruence ρ ayant l'une des propriétés $\mathcal{H} \subset \rho \subsetneq \mathcal{R}$ ou $\mathcal{H} \subset \rho \subsetneq \mathcal{L}$; en particulier, si $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{L}$ est une congruence, $\mathcal{R} = \mathcal{L} = \mathcal{H}$, et le demi-groupe est un demi-treillis de groupes.

Les deux propositions suivantes, valables pour un demi-groupe quelconque, prouvent que sur un demi-groupe régulier le treillis des congruences séparant les idempotents est modulaire.

PROPOSITION 3.1. - Sur un demi-groupe quelconque, toute équivalence régulière à gauche plus fine que $\mathcal{R}$ commute avec toute équivalence régulière à droite plus fine que $\mathcal{L}$.

Démonstration. - Soit ρ (resp. λ) une équivalence régulière à gauche (resp. à droite) plus fine que $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{L}$). Montrons que $\rho \circ \lambda \subseteq \lambda \circ \rho$ (cela suffit à assurer $\rho \circ \lambda = \lambda \circ \rho = \rho \vee \lambda$). Si $(a , c) \in \rho$ et $(c , b) \in \lambda$, alors $a = cu$ avec $u \in D^1$ (car $\rho \subseteq \mathcal{R}$) et $b = vc$ avec $v \in D^1$ (car $\lambda \subseteq \mathcal{L}$). En posant $d = bu = vcu = va$, on obtient :

$$(a , c) \in \rho \implies (va , vc) \in \rho \implies (d , b) \in \rho$$

et

$$(c , b) \in \lambda \implies (cu , bu) \in \lambda \implies (a , d) \in \lambda \quad .$$

Donc $(a , b) \in \lambda \circ \rho$.

Remarque. - $\mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ est un corollaire du résultat précédent (cf. [1], lemme 2.1).

PROPOSITION 3.2. - Sur un demi-groupe quelconque, le sous-treillis complet des congruences plus fines que $\mathcal{H}$ est modulaire.

D'après ce qui précède, on montre sans difficulté que, si ρ , σ , τ sont des congruences plus fines que $\mathcal{H}$,

$$\rho \subseteq \tau \implies (\rho \circ \sigma) \cap \tau \subseteq \rho \circ (\sigma \cap \tau) \quad .$$

COROLLAIRE 3.3. - Sur un demi-groupe régulier, les congruences séparant les idempotents forment un sous-treillis complet modulaire.

Une autre conséquence importante de la $\mathcal{H}$-régularité (et du théorème 2.2) est la suivante :

THÉORÈME 3.4. - Soit D un demi-groupe régulier. Si deux congruences quelconques

ρ <u>et</u> σ <u>sur</u> D <u>sont telles que les classes des idempotents</u> (2) <u>de</u> ρ <u>et</u> σ <u>coïncident, alors</u> $\rho = \sigma$.

<u>Démonstration</u>.

(a) Supposons que σ soit l'égalité. Dans ce cas, la ρ-classe d'un idempotent e est $\{e\}$. Donc $\rho \subseteq \mathcal{H}$ (théorème 2.3) ; $(a , b) \in \rho$ entraîne $(ab' , bb') \in \rho$, où b' est un inverse de b . Il en résulte $ab' = bb'$, d'où $ab'b = b$. Or $(a , b) \in \mathcal{H}$ implique $(a , b'b) \in \mathcal{L}$, donc $ab'b = a$. D'où $a = b$ et $\rho = \sigma$.

(b) Supposons maintenant ρ et σ quelconques. Les classes des idempotents de $\rho \cap \sigma$ et ρ coïncident. Dans $\bar{D} = D/(\rho \cap \sigma)$ (qui est régulier), on définit

$$\bar{\rho} = \{(\bar{a} , \bar{b}) \in \bar{D} \times \bar{D} ; \exists\, a \in \bar{a} , \exists\, b \in \bar{b} : (a , b) \in \rho\} .$$

Soit $\bar{e}$ un idempotent de $\bar{D}$. D'après le théorème 2.2, il existe un idempotent e de D tel que $e \in \bar{e}$. Si $(\bar{a} , \bar{e}) \in \bar{\rho}$ pour tout $a \in \bar{a}$, $(a , e) \in \rho$, donc $(a , e) \in \rho \cap \sigma$ et $\bar{a} = \bar{e}$. Les classes des idempotents de $\bar{\rho}$ et de l'égalité sur $\bar{D}$ coïncident ; d'après (a), $\bar{\rho}$ est l'égalité sur $\bar{D}$, donc $\rho = \rho \cap \sigma$. De même, on montre $\sigma = \rho \cap \sigma$ et $\rho = \sigma$.

En fait, ce théorème peut servir de point de départ pour l'étude de toutes les congruences sur un demi-groupe régulier, et plus généralement pour l'étude des congruences ρ sur un demi-groupe quelconque telles que D/ρ soit régulier (on démontre par exemple que de telles congruences ρ coïncident avec l'intersection des équivalences principales à droite et à gauche définies par les ρ-classes des idempotents non nuls).

Le théorème suivant sera utilisé au paragraphe 4.

THÉORÈME 3.5. - <u>Soient</u> D <u>un demi-groupe régulier,</u> $\rho \subseteq \mathcal{D}$ <u>une congruence sur</u> D , <u>et</u> Δ <u>une</u> <u>$\mathcal{D}$-classe particulière de</u> D . <u>Il y a équivalence entre</u> :

1° ρ <u>sépare les idempotents de</u> Δ ;

2° $\rho|_\Delta \subseteq \mathcal{H}|_\Delta$;

3° <u>Les classes des idempotents de</u> Δ <u>sont des sous-groupes normaux des sous-groupes maximaux de</u> Δ , <u>isomorphes entre eux</u>.

<u>Démonstration</u>.

1° entraîne 2°. En effet, $(a , b) \in \rho \cap (\Delta \times \Delta) \Longrightarrow (aa' , ba') \in \rho \cap (\Delta \times \Delta)$.

---

(2) On peut ajouter ici "non nuls" et modifier la démonstration en conséquence. Ce théorème a été également obtenu par PRESTON (cf. [4], théorème 4.3).

En utilisant le lemme 2.1 et le fait que ρ sépare les idempotents de Δ , il vient $H_{aa'} \leqslant H_{ba'}$; d'où $R_a = R_{aa'} \leqslant R_{ba'} \leqslant R_b$. De même $R_b \leqslant R_a$ et $(a, b) \in \mathcal{R}$. De façon symétrique, on montre $(a , b) \in \mathcal{L}$.

2° entraîne 3°. Soit $e \in \Delta$. La ρ-classe de e est évidemment un sous-groupe normal N_e de H_e . Si e et f sont deux idempotents de Δ , il existe a et a' inverse de a tels que $aa' = e$ et $a'a = f$. L'application $x \longrightarrow axa'$ est un isomorphisme φ de H_f sur H_e . Si $x \in N_f$, $(axa' , afa') \in \rho$; or $afa' = e$, donc $axa' \in N_e$ et $\varphi(N_f) \subseteq N_e$. Par ailleurs, si $y \in N_e$, $a'ya \in N_f$ et $\varphi(a'ya) = y$, donc $\varphi(N_f) = N_e$.

3° entraîne 1° : c'est évident.

4. Application au treillis des congruences sur le demi-groupe $\mathcal{T}_\Omega$ des transformations sur un ensemble Ω .

Dans [8], A. I. MAL'CEV a donné une description complète du treillis des congruences de $\mathcal{T}_\Omega$ (Ω de cardinal quelconque). Certains résultats, en particulier tous ceux qui concernent le cas où Ω est fini, s'obtiennent, ou s'expriment, à l'aide de ceux mis en évidence précédemment.

Rappelons que dans $\mathcal{T}_\Omega$ tout idéal bilatère coïncide avec l'ensemble des transformations de rang inférieur à un cardinal donné (lui-même inférieur ou égal au cardinal de Ω). En particulier, les transformations de rang 1 constituent le noyau K de $\mathcal{T}_\Omega$: c'est un demi-groupe zéro à droite (les transformations sont considérées comme opérateurs à droite sur Ω). Dans $\mathcal{T}_\Omega$, $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ et chaque $\mathcal{D}$-classe est formée de toutes les transformations ayant même rang. Par ailleurs, $(a , b) \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow \pi_a = \pi_b$, où π_x est la partition définie par x sur Ω ; $(a , b) \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow \Omega a = \Omega b$ (voir [1], p. 52). La transformation $t \in K$ d'image $\{\xi\}$ sera notée t_ξ .

LEMME 4.1. - <u>La seule congruence sur $\mathcal{T}_\Omega$ séparant les idempotents est l'égalité.</u>

<u>Démonstration</u>. - Soit $\rho \subseteq \mathcal{H}$. S'il existe x et $y \in \mathcal{T}_\Omega$ tels que $(x , y) \in \rho$ et $x \neq y$, alors il existe $\alpha , \beta , \gamma \in \Omega$ tels que

$$\beta = \alpha x \neq \alpha y = \gamma : \quad (x , y) \in \rho \implies (t_\alpha x , t_\alpha y) \in \rho \quad ,$$

c'est-à-dire $(t_\beta , t_\gamma) \in \rho$. D'où $t_\beta = t_\gamma$ et $\beta = \gamma$.

Dans la suite, une congruence sera dite propre si elle diffère de l'égalité et de l'équivalence universelle.

LEMME 4.2. - <u>Pour toute congruence propre</u> ρ <u>sur</u> $\mathcal{T}_\Omega$, <u>le noyau</u> K <u>est</u> ρ-<u>indivisible</u> (donc $\mathcal{T}_\Omega/\rho$ a un zéro).

<u>Démonstration</u>. - En effet, si ρ est propre, il existe t_α et $t_\beta \in K$ tels que $(t_\alpha , t_\beta) \in \rho$ (lemme 4.1). Soit t_γ quelconque dans K . Notons x une transformation telle que

$$\alpha x = \alpha \quad \text{et} \quad \beta x = \gamma : \quad (t_\alpha x , t_\beta x) \in \rho \implies (t_\alpha , t_\gamma) \in \rho \ .$$

Donc, t_γ est dans la ρ-classe de t_α .

Pour une congruence propre ρ sur $\mathcal{T}_\Omega$, la classe contenant K est un idéal bilatère I_N formé des transformations de rang inférieur au cardinal N $(K = I_2)$. Le lemme précédent ramène la détermination des congruences de $\mathcal{T}_\Omega$ à celles de $\mathcal{T}_\Omega/I_N$ ayant une classe zéro réduite à un seul élément.

LEMME 4.3. - <u>Toute congruence sur</u> $\mathcal{T}_\Omega/I_N$ <u>ayant une classe zéro réduite à un seul élément est plus fine que</u> $\mathcal{D} = \mathcal{J}$. <u>Dans le cas où</u> N <u>est fini, toute telle congruence est plus fine que</u> $\mathcal{H}$ (3).

Soit ρ une telle congruence sur $\mathcal{T}_\Omega/I_N$.

1° $N \geqslant \aleph_0$. Soient e et f deux idempotents non nuls de $\mathcal{T}_\Omega/I_N$. Supposons, par exemple, que rang $f <$ rang e . $|\Omega e| > |\Omega f| \geqslant N \geqslant \aleph_0$ implique $|\Omega e \setminus \Omega f| = |\Omega e|$. Soit x une transformation appliquant Ωf sur un élément et $\Omega e \setminus \Omega f$ sur Ωe en bijection. On a $|\Omega f x| = 1$ et $|\Omega e x| = |\Omega e \setminus \Omega f| = |\Omega e|$. Or,

$$(ex , fx) \in \rho \implies ex \in I_N \implies e \in I_N \qquad (\ ex \text{ et } e \text{ ont même rang}) \ .$$

C'est en contradiction avec l'hypothèse $|\Omega e| > N$. On a donc rang f = rang e et $(e , f) \in \mathcal{D}$, d'où $\rho \subseteq \mathcal{D}$.

2° $N < \aleph_0$. On démontre successivement que deux idempotents non nuls e , f de $\mathcal{T}_\Omega/I_N$ tels que $(e , f) \in \rho$ vérifient $\Omega e = \Omega f$, puis $\pi_e = \pi_f$.

(a) $\Omega e \cap \Omega f \neq \emptyset$. Sinon, soit $\alpha \in \Omega f$; la transformation t , identité sur Ωe et appliquant $\Omega \setminus \Omega e$ sur α , vérifie $et = e$ et $ft = t_\alpha$. Donc $(e , t_\alpha) \in \rho$, ce qui est impossible.

(b) Supposons $\Omega e \not\subset \Omega f$ et $\Omega f \not\subset \Omega e$. Soient $\alpha \in \Omega e \cap \Omega f$, et t défini comme en (a). On a $et = e$, et ft est un idempotent g tel que $(e , g) \in \rho$ avec $\Omega g \subset \Omega e$. D'après la partie 2° (c), c'est impossible.

(c) Supposons $\Omega f \subset \Omega e$. (Le cas $\Omega f \supset \Omega e$ est symétrique.) Posons $|\Omega e| = n$,

---

(3) En fait, on démontre même que toute congruence sur $\mathcal{T}_\Omega/I_N$, autre que l'équivalence universelle, est plus fine que $\mathcal{D}$ et plus fine que $\mathcal{H}$ dans le cas N fini.

$|\Omega f| = r$, $n > r \geqslant N$. Soient γ_1 , γ_2 , ... , γ_{N-1} , $N - 1$ éléments distincts de Ωf ; la transformation t , appliquant $\Omega f \setminus \{\gamma_1 , \gamma_2 , \ldots , \gamma_{N-1}\}$ sur γ_1 et qui est l'identité ailleurs, est telle que

$$|\Omega ft| = N - 1 \qquad \text{et} \qquad |\Omega et| = N - 1 + |\Omega e \setminus \Omega f| \quad ;$$

or $(et , ft) \in \rho$: c'est en contradiction avec la définition de N .

Il en résulte que $\Omega e = \Omega f$, d'où $(e , f) \in \mathcal{L}$ et $\rho \subseteq \mathcal{L}$.

(d) Montrons que $\pi_e = \pi_f$ (c'est-à-dire $\alpha e = \beta e \iff \alpha f = \beta f$). Supposons qu'il existe α et β tels que $\alpha e = \beta e$, $\alpha f \neq \beta f$. Soit ν_1 , ... , ν_n un système de représentants de π_f comprenant α et β ($n \geqslant N$). Il existe une bijection b de $\Omega e = \Omega f$ sur $\{\nu_1 , \ldots , \nu_n\}$. On a $\Omega ebf = n$ et $\Omega ebe < n$. Or $(e, f) \in \rho \implies (ebf, ebe) \in \rho \implies (ebf, ebe) \in \mathcal{L}$ (d'après 2° (c)) $\implies \Omega ebf = \Omega ebe$; c'est une contradiction. Donc $\pi_e = \pi_f$, d'où $(e , f) \in \mathcal{R}$ et $\rho \subseteq \mathcal{R}$.

Le lemme suivant précise les classes des idempotents non nuls de $\mathcal{T}_\Omega/I_N$ dans le cas où N est fini.

LEMME 4.4. - <u>Soient</u> e <u>un idempotent non nul, et</u> ρ <u>une congruence de classe zéro réduite à un élément, sur</u> $\mathcal{T}_\Omega/I_N$ (N <u>fini</u>) :

(a) <u>Si</u> $|\Omega e| = N$, <u>la</u> ρ-<u>classe de</u> e <u>est isomorphe à un sous-groupe normal du groupe symétrique</u> $\mathfrak{S}_N$.

(b) <u>Si</u> $|\Omega e| > N$, <u>la</u> ρ-<u>classe de</u> e <u>est réduite à</u> e .

<u>Démonstration</u>. - La partie (a) résulte du théorème 3.5 et du fait que dans la $\mathcal{D}$-classe de e les sous-groupes maximaux sont tous isomorphes à $\mathfrak{S}_N$. Pour démontrer (b), supposons que $(a , e) \in \rho$ avec $a \neq e$ et rang $e = n \geqslant N + 1$. D'après le lemme 4.3, $(a , e) \in \mathcal{H}$, et a est une permutation sur Ωe distincte de l'identité. On a $\pi_e = \pi_a = \pi$. Soient M_1 , M_2 , ... , M_n les π-classes de Ω . $M_i\, e = \alpha_i$ et $M_i\, a = \alpha_{i\sigma}$, où σ est une permutation distincte de l'identité. Il existe p , $1 \leqslant p \leqslant n$, tel que $\alpha_p \neq \alpha_{p\sigma}$. Fixons un k , $1 \leqslant k \leqslant n$, tel que $k \neq p$ ($n > 2$). Soit c une transformation telle que $(M_p \cup M_k)c = \{\alpha_k\}$ et $(M_j)c = \alpha_j$ pour $j \neq p$ et $j \neq k$. $\Omega ce = \Omega e - \alpha_p$ et $\Omega ca = \Omega e - \alpha_{p\sigma}$. Or, $(ce , ca) \in \mathcal{H}$ et ce , ca sont de rang $n - 1 \geqslant N$. Donc $\Omega ca = \Omega ce$ (lemme 4.3, partie 2° (c)). D'où une contradiction, donc $a = e$.

Pour N fini, I_{N+1}/I_N est un demi-groupe complètement 0-simple dont le groupe de base est $\mathfrak{S}_N$. Une congruence $\bar{\rho}(\mathfrak{T}_N)$ plus fine que $\mathcal{H}$ sur ce demi-groupe est définie (cf. paragraphe 5) par la donnée du sous-groupe normal $\mathfrak{N}_N$ de $\mathfrak{S}_N$.

Nous poserons : $(a , b) \in \rho(\mathfrak{N}_N)$ si et seulement si a et b sont dans I_{N+1}/I_N et si $(a , b) \in \bar{\rho}(\mathfrak{N}_N)$ (on considère dans cette dernière expression a et b comme éléments de I_{N+1}/I_N).

THÉORÈME 4.5. - Dans $\mathcal{T}_\Omega$, la relation :

$$\rho(N , \mathfrak{N}_N) = \iota \cup (I_N \times I_N) \cup \rho(\mathfrak{N}_N) ,$$

où N est un entier, et $\mathfrak{N}_N$ un sous-groupe normal du groupe symétrique $\mathfrak{S}_N$, est une congruence. Si Ω est de cardinal fini, toute congruence est de ce type.

Démonstration. - Compte tenu des lemmes qui précèdent, la seule chose à démontrer est que $\rho(N , \mathfrak{N}_N)$ est une congruence. Que ce soit une équivalence est presque évident. Montrons, par exemple, la régularité à droite. Le cas le plus compliqué est celui où $(a , b) \in \rho(\mathfrak{N}_N)$:

(a) Si $c \in I_N$, $(ac , bc) \in I_N \times I_N$;

(b) Si $c \in I_{N+1} \setminus I_N$, $(ac , bc) \in (I_N \times I_N) \cup \rho(\mathfrak{N}_N)$, d'après la définition de $\rho(\mathfrak{N}_N)$;

(c) Enfin, supposons que $c \notin I_{N+1}$. Comme a et b sont dans $I_{N+1} \setminus I_N$, il existe un idempotent $e \in I_{N+1} \setminus I_N$ tel que $a = ae$ et $b = be$ (I_{N+1}/I_N est complètement 0-simple, et a et b sont $\mathcal{H}$-équivalents). Donc, $ac = a(ec)$ et $bc = b(ec)$. Or $ec \in I_{N+1}$; d'après (a) et (b), $(a(ec) , b(ec)) \in \rho(N , \mathfrak{N}_N)$.

Dans le cas où $|\Omega|$ est infini, $\mathcal{T}_\Omega$ possède d'autres congruences (voir [8], ou [4], paragraphe 5).

5. Etude du treillis des congruences séparant les idempotents sur un demi-groupe régulier.

Le théorème suivant caractérise ces congruences :

THÉORÈME 5.1. - Soient D un demi-groupe régulier, E l'ensemble de ses idempotents, et $\mathfrak{N}$ une famille de sous-groupes normaux N_e ($e \in E$) des sous-groupes maximaux, vérifiant les conditions (A) et (B) suivantes :

$$(A) \quad \begin{cases} fe = f \implies fN_e \subseteq N_f \\ ef = f \implies N_e f \subseteq N_f . \end{cases}$$

$$(B) \quad \forall\, a \in D , \ \forall\, a' \text{ inverse de } a : \ a.N_{a'a} \subseteq N_{aa'}.a .$$

Posons : $(a , b) \in \rho_{\mathfrak{N}}$ si et seulement s'il existe un élément a' inverse de a et un élément b' inverse de b tels que $ab' \in N_{bb'}$ et $a'b \in N_{a'a}$. Alors $\rho_{\mathfrak{N}}$ est une congruence plus fine que $\mathcal{H}$ dont les classes des idempotents sont précisément les N_e. Réciproquement, toute congruence plus fine que $\mathcal{H}$ est du type $\rho_{\mathfrak{N}}$.

Remarques.

1° La condition (A) est équivalente à

$$fe = f \implies N_f N_e \subseteq N_f \qquad \text{et} \qquad ef = f \implies N_e N_f \subseteq N_f .$$

(Si par exemple $fN_e \subseteq N_f$, alors $N_f N_e = N_f . fN_e \subseteq N_f$.)

2° La condition (B) est équivalente à $aN_{a'a} a' \subseteq N_{aa'}$. Elle exprime que les sous-groupes normaux N_e situés dans une même $\mathcal{D}$-classe sont tous isomorphes.

3° Les conditions (A) et (B) sont indépendantes. Dans un demi-groupe D réunion de groupes, (B) est vérifiée par la famille formée par tous les sous-groupes maximaux. Pour cette famille, (A) n'est vérifiée que si D est une bande de groupes. Donc, en général, (B) $\not\Longrightarrow$ (A). Dans un demi-groupe de Brandt (complètement 0-simple avec la matrice unité comme matrice médiane), $fe = f \implies f = 0$ ou $e = f$ et $fN_e \subseteq N_f$ est vérifié en prenant n'importe quel sous-groupe normal N_e du sous-groupe **maximal** contenant e. Donc (A) $\not\Longrightarrow$ (B).

4° Les conditions de définition de $\rho_{\mathfrak{N}}$ ne peuvent pas se réduire à l'une d'entre elles : par exemple, si D complètement simple avec $\mathfrak{N} = \{\{e\}, \dots, \}$ où $e \in E$, $a = (x ; i , \lambda)$ et $b = (xp_{\lambda i}\, p_{\mu i}^{-1} ; i , \mu)$ avec $\lambda \neq \mu$, sont tels qu'il existe $b' = (p_{\lambda i}^{-1}\, x^{-1}\, p_{\mu i}^{-1} ; i , \mu)$ satisfaisant à $ab' = bb'$; et pourtant, $\forall$ a' inverse de a, on a $a'b \neq a'a$.

Démonstration du théorème.

1° $\rho_{\mathfrak{N}} \subseteq \mathcal{H}$. Si $(a , b) \in \rho_{\mathfrak{N}}$, il existe a' et b' tels que $(ab' , bb') \in \mathcal{H}$ et $(a'b , a'a) \in \mathcal{H}$. Il en résulte $bb' \in ab'D \subseteq aD$. Donc $bD = bb'D \subseteq aD = aa'D$. On en déduit $aa'b = b$. Or $(a'b , a'a) \in \mathcal{R} \implies (aa'b , a) \in \mathcal{R}$, d'où $(a, b) \in \mathcal{R}$. On démontre de même $(a , b) \in \mathcal{L}$.

Remarque : $(a , b) \in \mathcal{H} \iff a = bb'a = ab'b$ et $b = aa'b = ba'a$.

2° $\rho_{\mathfrak{N}}$ est symétrique. En effet, $ab' \in N_{bb'}$ et $a'b \in N_{a'a}$ impliquent

$ba' = aa'ba' \in aN_{a'a} a' \subseteq N_{aa'}$ et $b'a = b'ab'b \in b'N_{bb'} b' \subseteq N_{b'b}$ (condition (B)).

3° $\rho_{\mathfrak{N}}$ est transitive. Si $ab' \in N_{bb'}$, $a'b \in N_{a'a}$ et $bc' \in N_{cc'}$, $b''c \in N_{b''b}$, alors, d'après le 1°, a, b et c sont $\mathcal{H}$-équivalents, donc $bb'cc' = cc'$ et $a'ab''b = a'a$. Dans ces conditions,

$ac' = ab'bc' \in N_{bb'} . N_{cc'} \subseteq N_{cc'}$ et $a'c = a'bb''c \in N_{a'a} . N_{b''b} \subseteq N_{a'a}$ (conditions (A)).

4° $\rho_{\mathcal{N}}$ est régulière. Supposons $(a , b) \in \rho$, et soit $c \in D$.

$$ca(cb)' = cbb'a(cb)' = cb(cb)'cbb'a(cb)' \in cb[(cb)'(cb)N_{b'b}](cb)' .$$

En faisant intervenir (A) puis (B), on en déduit $(ca)(cb)' \in N_{(cb)(cb)'}$. De même

$$(ca)'(cb) = (ca)'caa'b \in (ca)'caN_{a'a} \subseteq N_{(ca)'(ca)} .$$

Donc $(ca , cb) \in \rho_{\mathcal{N}}$. Pour la régularité à droite, la démonstration est analogue.

5° Les classes des idempotents sont les N_e . Si $a \in N_e$, alors $ae \in N_e$ et $a^{-1} e \in N_e$ (a^{-1} est l'inverse de a dans N_e). Donc $(a , e) \in \rho_{\mathcal{N}}$. Inversement, si $(a , e) \in \rho_{\mathcal{N}}$, il existe a' inverse de a et e' inverse de e (e' n'est pas nécessairement un idempotent) tels que $ae' \in N_{ee'}$ et $a'e \in N_{a'a}$. On a

$$a'e \in N_{a'a} \implies (a'a, a'e) \in \mathcal{L} \implies (a, a'e) \in \mathcal{L} \implies a \in Da'e \subseteq De \implies ae = a .$$

Or $ae'e \in N_{ee'}.e \subseteq N_e$ (condition (A)) et $ae'e = ae.e'e = ae = a$; donc $a \in N_e$, et N_e est la $\rho_{\mathcal{N}}$-classe de e .

Un corollaire évident de ce théorème est le suivant : sur un demi-groupe régulier, une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{H}$ soit une congruence est que $fe = f \implies fG_e \subseteq G_f$ et $ef = f \implies G_e f \subseteq G_f$ (G_i est le sous-groupe maximal de l'idempotent i). Appelons "partie groupe" de D le complexe Γ réunion des sous-groupes maximaux. La condition précédente signifie que $\mathcal{H}$ est régulière sur D si et seulement si elle est régulière sur la partie groupe de D , c'est-à-dire que

$$\left.\begin{array}{c} (a , b) \in \mathcal{H} \cap (\Gamma \times \Gamma) \\ c \in \Gamma \\ ac \text{ ou } bc \in \Gamma \end{array}\right\} \implies (ac , bc) \in \mathcal{H} \cap (\Gamma \times \Gamma) .$$

Suivant un procédé déjà utilisé pour les congruences sur un demi-groupe complètement simple [6], on peut tenter de caractériser le complexe réunion d'une famille de sous-groupes normaux N_e vérifiant (A) et (B), et exprimer les congruences en conséquence. C'est possible de façon assez élémentaire dans les deux types de demi-groupes réguliers suivants :

(a) Les demi-groupes réguliers tels que $ef = fe$, $\forall e , f \in E$ (demi-groupes inverses) ;

(b) Les demi-groupes réguliers tels que $ef = fe \neq 0 \implies e = f$ ($\forall e , f \in E$). (Dans le cas (b), on peut dire que les idempotents commutent peu. Dans le cas sans zéro, ils ne commutent pas.)

THÉORÈME 5.2. - Soit D un demi-groupe inverse. Il y a équivalence entre :

(1) $\mathfrak{N} = \{N_e\}_{e\in E}$ est une famille de sous-groupes normaux des sous-groupes maximaux vérifiant (A) et (B) du théorème 5.1 ;

(2) $S = \bigcup_{e\in E} N_e$ est un demi-treillis de groupes contenant tous les idempotents de D tel que

$$\forall a \in D , \quad aSa^{-1} \subseteq S \qquad (a^{-1} \text{ est l'inverse unique de } a) .$$

Pour un sous-demi-groupe S vérifiant (2), la relation :

$(a , b) \in \rho_S \iff a^{-1} a = b^{-1} b$ et $ab^{-1} \in S$ est une congruence séparant les idempotents, et toute telle congruence peut s'exprimer ainsi.

(ρ_S peut aussi se définir par $aa^{-1} = bb^{-1}$ et $a^{-1} b \in S$.)

Démonstration (4).

(1) $\longrightarrow$ (2) . $S = \bigcup N_e$ est un sous-demi-groupe. En effet $e.ef = ef$, donc $N_e.ef \subseteq N_{ef}$. De même $N_{ef}.N_f \subseteq N_{ef}$. Donc $N_e N_f = N_e\, efN_f \subseteq N_{ef}$ ((B)). Si $a\in N_e$, pour tout f tel que $fe = ef = f$, on a $af = fa \in N_f$: en effet af et $fa \in N_f$, donc $faf = af = fa$. Si $a \in N_e$, pour tout $g \in E$, $eg = ge = f$ est un idempotent tel que $ef = fe = f$, donc $af = fa$ et $ga = gea = fa = af = aeg = ag$. Donc $\forall a \in S$, $\forall g \in E$: $ag = ga$. E est donc dans le centre de S qui est ainsi un demi-treillis de groupes ([1], paragraphe 4.2).

Montrons que $aSa^{-1} \subseteq S$, c'est-à-dire que $aN_e a^{-1} \subseteq N_{aea^{-1}}$. Pour tout $x \in N_e$, $axa^{-1} = axea^{-1}aa^{-1} = axa^{-1} aea^{-1}$. Donc,

$$aN_e a^{-1} = aeN_e a^{-1} aea^{-1} = aeN_e a^{-1} ae(ae)^{-1} .$$

Or $N_e a^{-1} ae \subseteq N_{(ae)^{-1}(ae)}$ d'après (B), donc

$$aN_e a^{-1} \subseteq aeN_{(ae)^{-1}(ae)} (ae)^{-1} \subseteq N_{(ae)(ae)^{-1}} = N_{aea^{-1}} \quad ((A)) .$$

(2) $\longrightarrow$ (1) . Soit G_e un sous-groupe maximal de D . Il est évident que $N_e = S \cap G_e$ est un sous-groupe de D . Le fait qu'il soit normal résulte de $a(S \cap G_e)a^{-1} \subseteq aSa^{-1} \cap aG_e a^{-1} \subseteq S \cap G_e$ pour tout $a \in G_e$. La condition (A) est

(4) Il est possible de déduire ce théorème des résultats généraux de VAGNER ou PRESTON sur les congruences sur un demi-groupe inverse ([11], [12]). De même, on peut donner une description complète des congruences sur les demi-groupes du théorème 5.5, et en déduire ce théorème 5.5.

vérifiée pour les N_e , parce que sur S l'équivalence $\mathcal{H}$ est régulière. Par ailleurs, pour tout $a \in D$ et $x \in N_{a^{-1}a}$,

$$axa^{-1}\ ax^{-1}\ a^{-1} = aa^{-1}\ axx^{-1}\ a^{-1} = axx^{-1}\ a^{-1} = aa^{-1}$$

et de même $ax^{-1}\ a^{-1}\ axa^{-1} = aa^{-1}$, ce qui prouve que $axa^{-1} \in G_{aa^{-1}}$, donc $aN_{a^{-1}a}\ a^{-1} \subseteq N_{aa^{-1}}$.

Il reste à démontrer que $\rho_S = \rho_{\mathcal{N}}$, où $\mathcal{N}$ est la famille des N_e précédemment définie. Si $(a\ ,\ b) \in \rho_{\mathcal{N}}$, alors $ab^{-1} \in N_{bb^{-1}} \subseteq S$ et $(a\ ,\ b) \in \mathcal{H}$. D'après le théorème de Clifford-Miller ([1] p. 60, et [9]) sur la localisation des inverses d'un élément régulier, il en résulte $a^{-1}\ a = b^{-1}\ b$. Donc $(a\ ,b) \in \rho_S$ et $\rho_{\mathcal{N}} \subseteq \rho_S$. Inversement, si $a^{-1}\ a = b^{1}\ b$ et $ab^{-1} \in S$, alors $(a\ ,\ b) \in \mathcal{L}$ et $ab^{-1} \in N_e$. On en déduit $(e\ ,\ bb^{-1}) \in \mathcal{L}$, d'où $e = bb^{-1}$ et $ab^{-1} \in N_{bb^{-1}}$. L'égalité $a^{-1}\ a = b^{-1}\ b$ entraîne aussi $(a^{-1}\ ,\ b^{-1}) \in \mathcal{R}$. D'où $(aa^{-1}\ ,\ ab^{-1}) \in \mathcal{R}$ et $aa^{-1} = bb^{-1}$. Donc, $a^{-1}\ b = a^{-1}\ ba^{-1}\ a \in a^{-1}\ N_{bb^{-1}}\ a \subseteq N_{a^{-1}a}$. En définitive, $(a\ ,\ b) \in \rho_{\mathcal{N}}$ et $\rho_S = \rho_{\mathcal{N}}$.

COROLLAIRE 5.3 [5]. - <u>La congruence maximum</u> μ <u>séparant les idempotents sur un demi-groupe inverse</u> D , <u>est définie par</u> :

$$(a\ ,\ b) \in \mu \iff a^{-1}\ a = b^{-1}\ b \ \text{ et } \ ab^{-1} \in E\zeta\ ,$$

<u>où</u> $E\zeta = \{x\ ;\ x \in D :\ xe = ex\ ,\ \forall\ e \in E\}$ <u>est le centralisateur de</u> E .

<u>Démonstration</u>. - On voit immédiatement que $E\zeta$ est un sous-demi-groupe inverse de D dont tous les éléments commutent avec les idempotents, c'est-à-dire un demi-treillis de groupes. Par ailleurs, pour tout $a \in D$, $x \in E\zeta$, et $e \in E$:

$$\begin{aligned} e(axa^{-1}) = (eaa^{-1})axa^{-1} = (aa^{-1}\ e)axa^{-1} &= a(a^{-1}\ ea)xa^{-1} \\ &= ax(a^{-1}\ ea)a^{-1} = axa^{-1}(eaa^{-1}) = axa^{-1}\ e \ . \end{aligned}$$

Donc $a(E\zeta)a^{-1} \subseteq E\zeta$.

COROLLAIRE 5.4. - <u>Dans un demi-groupe inverse</u> D , <u>les sous-demi-groupes inverses</u> S , <u>qui sont demi-treillis de groupes et vérifient</u> $aSa^{-1} \subseteq S$, <u>pour tout</u> $a \in D$, <u>forment un treillis complet modulaire dont</u> E <u>est l'élément nul et</u> $E\zeta$ <u>l'élément universel</u>.

<u>Cas des demi-groupes réguliers tels que</u> $ef = fe \neq 0 \implies e = f$, $\forall\, e, f \in E$. La structure de ces demi-groupes est la suivante (cf. [7], théorème 3) : $D = \cup D_\alpha$, où chaque D_α est complètement 0-simple. Pour $\alpha \neq \beta$, $D_\alpha . D_\beta = (0)$ et $D_\alpha \cap D_\beta = \{0\}$. Nous dirons que D est <u>somme orthogonale</u> (s. o.) de demi-groupes complètement 0-simples. Dans le cas sans zéro, D est complètement 0-simple.

En effet, sur l'ensemble $D \setminus (0)$, on pose $(a, b) \in \sim \iff aDb \neq 0$. La relation $\sim$ est réflexive (D est régulier), symétrique (si $axb \neq 0$, il existe y tel que $axbyaxb = axb \neq 0$, donc $bya \neq 0$). Pour montrer la transitivité, notons que, si e , f , et g sont des idempotents tels que $ef \neq 0$ et $fg \neq 0$, alors $efg \neq 0$. En effet, si $(ef)'$ est un inverse de ef , $f(ef)'e$ est un idempotent i non nul ; comme $fi = i \neq 0$, il en résulte $if \neq 0$ (sinon $ifi = i$ serait nul) et $if.f = if = f.if \neq 0$ implique $f = if$. On a alors :

$$fg \neq 0 \implies ifg \neq 0 \implies iefg \neq 0 \implies efg \neq 0 \quad .$$

Maintenant si $axb \neq 0$ et $byc \neq 0$, alors $(ax)'ax.bb' \neq 0$ et $bb'.(byc)(byc)' \neq 0$. D'après ce qui précède, $(ax)'ax.bb'(byc)(byc)' \neq 0$, d'où $axbyc \neq 0$, ce qui démontre la transitivité de $\sim$. On vérifie alors que chaque $\sim$-classe A_α est telle que $A_\alpha \cup \{0\}$ soit un sous-demi-groupe D_α , que $D_\alpha . D_\beta = (0)$ et $D_\alpha \cap D_\beta = \{0\}$ pour $\alpha \neq \beta$. Dans chaque D_α qui est régulier, tous les idempotents sont primitifs, et pour deux idempotents non nuls quelconques e et f de D_α , $eD_\alpha f \neq 0$. D_α est donc complètement 0-simple (cf. [1], exercice 11, p. 84).

Dans le théorème suivant, pour éviter des complications d'énoncé, nous supposerons que les demi-groupes complètement 0-simples $\mathcal{M}^0(G ; I , \Lambda ; P)$, qui interviennent, sont pris sous forme normalisée ([1], p. 95) de façon que G apparaisse effectivement comme un sous-groupe maximal de $\mathcal{M}^0(G ; I , \Lambda ; P)$ (on peut supposer par exemple que I et Λ ont un indice 1 en commun, et que $H_{11} = G$).

THÉORÈME 5.5. - <u>Soit</u> D <u>une somme orthogonale de demi-groupes complètement 0-simples</u> $\mathcal{M}^0(G_\alpha ; I_\alpha , \Lambda_\alpha , P_\alpha)$. <u>Il y a équivalence entre</u> :

(α) K <u>est la réunion d'une famille</u> $\mathcal{N}$ <u>de sous-groupes normaux de</u> D <u>vérifiant les conditions</u> (A) <u>et</u> (B) <u>du théorème</u> 5.1 ;

(β) $K \setminus 0$ <u>est un complexe réflectif</u> ($ab \in K \setminus 0 \implies ba \in K \setminus 0$) <u>et, pour tout</u> α , $K \cap G_\alpha$ <u>est un sous-groupe de</u> G_α .

<u>Pour un complexe</u> K <u>vérifiant</u> (β), <u>la relation</u> ρ_K , <u>définie par</u> :

$(a , b) \in \rho_K \iff$ <u>il existe</u> a' <u>et</u> b' <u>inverses de</u> a <u>et</u> b <u>tels que</u> $aa' = bb'$, $a'a = b'b$ <u>et</u> $ab' \in K$,

<u>est une congruence séparant les idempotents, et toute telle congruence est de ce type.</u>

<u>Démonstration.</u>

$(\alpha) \Longrightarrow (\beta)$. Cela résulte du théorème 5.1 et du fait que dans une somme orthogonale de demi-groupes complètement 0-simple l'ensemble $E \smallsetminus 0$ des idempotents non nuls est un complexe réflectif, ce qui se vérifie sans difficulté.

$(\beta) \longrightarrow (\alpha)$. $K \cap G_\alpha$ est un sous-groupe normal de G_α , car $\forall\, a \in G_\alpha$ et $x \in K \cap G_\alpha$, $x = xaa^{-1} \in K \smallsetminus 0$, et, comme $K \smallsetminus 0$ est réflectif, $a^{-1}xa \in K \cap G_\alpha$. Plaçons-nous dans un demi-groupe $\mathcal{M}^0(G_\alpha \,;\, I_\alpha \,,\, \Lambda_\alpha \,;\, P_\alpha)$ (on supprime les indices α dans l'écriture des triplets, et on note e l'élément unité de G_α). On a :

$$\begin{cases} (1) \quad (x \,;\, 1 \,,\, 1) \in K \Longrightarrow (xp_{\lambda i}^{-1} \,;\, i \,,\, \lambda) \in K \,, \quad \forall\, p_{\lambda i} \neq 0 \\ (2) \quad (a \,;\, i \,,\, \lambda) \in K \text{ et } p_{\lambda i} \neq 0 \Longrightarrow (ap_{\lambda i} \,;\, 1 \,,\, 1) \in K \,. \end{cases}$$

En effet, d'une part : $(x \,;\, 1 \,,\, 1) = (p_{\lambda i}^{-1} \,;\, 1 \,,\, \lambda)(e \,;\, i \,,\, 1)(x \,;\, 1 \,,\, 1)$, donc

$$(x \,;\, 1 \,,\, 1) \in K \Longrightarrow (e \,;\, i \,,\, 1)(x \,;\, 1 \,,\, 1)(p_{\lambda i}^{-1} \,;\, 1 \,,\, \lambda) = (xp_{\lambda i}^{-1} \,;\, i \,,\, \lambda) \in K.$$

D'autre part : $(a \,;\, i \,,\, \lambda) = (e \,;\, i \,,\, 1)(ap_{\lambda i} \,;\, 1 \,,\, 1)(p_{\lambda i}^{-1} \,;\, 1 \,,\, \lambda)$, donc

$$(a \,;\, i \,,\, \lambda) \in K \Longrightarrow (p_{\lambda i}^{-1} \,;\, 1 \,,\, \lambda)(e \,;\, i \,,\, 1)(ap_{\lambda i} \,;\, 1 \,,\, 1) = (ap_{\lambda i} \,;\, 1 \,,\, 1) \in K \,.$$

Compte tenu du fait que l'application :

$$(x \,;\, 1 \,,\, 1) \longrightarrow (e \,;\, i \,,\, 1)(x \,;\, 1 \,,\, 1)(p_{\lambda i}^{-1} \,;\, 1 \,,\, \lambda)$$

est un isomorphisme de G sur G_f ($f = (p_{\lambda i}^{-1} \,;\, i \,,\, \lambda)$), et d'après (1), il résulte que $K \cap G_f$ est un sous-groupe normal de G_f isomorphe à $G \cap K$. De plus, si $(a \,;\, i \,,\, \lambda) \in K \smallsetminus 0$ avec $p_{\lambda i} = 0$, alors $(a \,;\, i \,,\, \lambda) = (a \,;\, i \,,\, \lambda)(p_{\lambda j}^{-1} \,;\, j \,,\, \lambda)$ avec $p_{\lambda j} \neq 0$; donc $(p_{\lambda j}^{-1} \,;\, j \,,\, \lambda)(a \,;\, i \,,\, \lambda) = 0 \in K \smallsetminus 0$, ce qui est absurde. On en déduit que K est réunion de sous-groupes normaux isomorphes et de $\{0\}$, donc vérifie (B). En ce qui concerne la condition (A), montrons par exemple que $fg = g \Longrightarrow N_f . g \subseteq N_g$. Si $g = 0$, c'est évident ($N_0 = \{0\}$). Si $g \neq 0$, alors $fg = g$ implique $(f \,,\, g) \in \mathcal{R}$, et si $f = (p_{\lambda i}^{-1} \,;\, i \,,\, \lambda)$, alors $g = (p_{\mu i}^{-1} \,;\, i \,,\, \mu)$ et, pour $(a \,;\, i \,,\, \lambda) \in N_f$, $(a \,;\, i \,,\, \lambda)(p_{\mu i}^{-1} \,;\, i \,,\, \mu) = (ap_{\lambda i}\, p_{\mu i}^{-1} \,;\, i \,,\, \mu)$. D'après (2) $(ap_{\lambda i} \,;\, 1 \,,\, 1) \in K$, et d'après (1) $(ap_{\lambda i}\, p_{\mu i}^{-1} \,;\, i \,,\, \mu) \in K$. D'où $N_f . g \subseteq N_g$.

Désignons par $\mathfrak{N}$ la famille des sous-groupes normaux formant K . Si $(a \,,\, b) \in \rho_{\mathfrak{N}}$, alors $(a \,,\, b) \in \mathcal{H}$ et il existe a' tel que $aa' = bb'$, $a'a = b'b$ et $ab' \in K$

(théorème de Clifford-Miller et définition de $\rho_{\mathcal{N}}$). Inversement, si $(a , b) \in \rho_K$, $aa' = bb'$ et $a'a = b'b$ impliquent $(a , b) \in \mathcal{H}$ et $(a' , b') \in \mathcal{H}$. Comme $ab' \in K$, $ab' \in N_e$, d'où $(ab' , e) \in \mathcal{H}$. Or $(ab' , aa') \in \mathcal{R}$ et $(ab' , bb') \in \mathcal{L}$. Comme $aa' = bb'$, on en déduit $e = aa' = bb'$, d'où $ab' \in N_{bb'}$. Il reste à montrer que $a'b \in K$. (Si c'est vrai, alors, comme précédemment, on a $a'b \in N_{a'a}$.) On peut supposer $ab' \neq 0$ (sinon $a = b = 0$ et $a'b = 0$). Posons $a = (a ; i , \lambda)$, $b = (b ; i , \lambda)$. Dans ces conditions, b' est de la forme $(p_{\lambda j}^{-1} b^{-1} p_{\mu i}^{-1} ; j , \mu)$ et $a' = (p_{\lambda j}^{-1} a^{-1} p_{\mu i}^{-1} ; j , \mu)$ avec $p_{\lambda j} \neq 0$ et $p_{\mu i} \neq 0$. On a

$$ab' = (a ; i , \lambda)(p_{\lambda j}^{-1} b^{-1} p_{\mu i}^{-1} ; j , \mu) = (ab^{-1} p_{\mu i}^{-1} ; i , \mu) \in K \ .$$

D'après (1) et (2), c'est équivalent à

$$(ab^{-1} ; 1 , 1) \in K \ . \tag{3}$$

$a'b = (p_{\lambda j}^{-1} a^{-1} p_{\mu i}^{-1} ; j , \mu)(b ; i , \lambda) = (p_{\lambda j}^{-1} a^{-1} b ; j , \lambda)$, et pour montrer que $a'b \in K$, il suffit de montrer que $(p_{\lambda j}^{-1} a^{-1} bp_{\lambda j} ; 1 , 1) \in K$. Or ceci résulte de (3) et du fait que $K \cap G$ est un sous-groupe normal. Donc $(a , b) \in \rho_{\mathcal{N}}$ et $\rho_K = \rho_{\mathcal{N}}$.

Pour les sommes orthogonales de demi-groupes complètement 0-simples, la congruence maximale séparant les idempotents est l'équivalence $\mathcal{H}$. Les complexes K, vérifiant (β) du théorème 5.5, forment un treillis complet modulaire d'élément zéro l'ensemble des idempotents et d'élément universel la réunion des $\mathcal{H}$-classes groupes, c'est-à-dire la partie groupe de D . Pour un demi-groupe complètement 0-simple, ces complexes K sont les complexes réflectifs engendrés par un sous-groupe du groupe de base.

Un problème intéressant, traité par HOWIE dans le cas des demi-groupes inverses [4], est de comparer les congruences séparant les idempotents d'un demi-groupe régulier D avec les congruences η telles que D/η soit un groupe.

Les résultats mis en évidence dans ce paragraphe tendent à montrer que la notion de normalité pour les demi-groupes réguliers a un aspect double : ce qui joue le rôle de sous-groupe normal dans un groupe est ici, soit une famille convenable de sous-groupes normaux des sous-groupes maximaux, soit le complexe réunion de ces sous-groupes normaux. Nous avions déjà remarqué ce double aspect dans l'étude des congruences sur un demi-groupe complètement 0-simple [6]. En se limitant aux congruences plus fines que $\mathcal{H}$, nous voyons que l'analogie avec le cas des groupes est encore plus étroite.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[2] CROISOT (Robert). - Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 3, t. 70, 1953, p. 361-379.

[3] DUBREIL (Paul). - Algèbre, Tome 1. - Paris, Gauthiers-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

[4] HOWIE (J. M.). - Congruences on semi-groups, Pennsylvania State University, Algebra Institute, 1963 (Notes de cours).

[5] HOWIE (J. M.). - The maximum idempotent-separating congruence on an inverse semigroup, Proc. Edinburgh math. Soc., t. 14, 1964, p. 71-79.

[6] LALLEMENT (Gérard). - Homomorphismes d'un demi-groupe sur un demi-groupe complètement 0-simple, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 17e année, 1963/64, n° 14, 22 p.

[7] LALLEMENT (G.) and PETRICH (M.). - Some results concerning completely 0-simple semigroups, Bull. Amer. math. Soc., t. 70, 1964, p. 777-778.

[8] MAL'CEV (A. I.). - Groupoïdes symétriques [en russe], Mat. Sbornik, t. 31, 1952, p. 136-151.

[9] MILLER (D. D.) and CLIFFORD (A. H.). - Regular $\mathcal{D}$-classes in semigroups, Trans. Amer. math. Soc., t. 82, 1956, p. 270-280.

[10] MUNN (W. D.). - A certain sublattice of the lattice of congruences on a regular semigroup, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 60, 1964, p. 385-391.

[11] PRESTON (G. B.). - Inverse semigroups, J. London math. Soc., t. 29, 1954, p. 396-403.

[12] PRESTON (G. B.). - Congruences on completely 0-simple semigroups, Proc. London math. Soc., t. 11, 1961, p. 557-576.

[13] VAGNER (V. V.). - Théorie des amas généralisés et des groupes généralisés [en russe], Mat. Sbornik, t. 32, 1953, p. 545-632.