

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MICHEL MENDÈS FRANCE

La répartition modulo 1 de la suite $x\theta^n$ et les ensembles de Cantor

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, n° 2 (1964-1965), exp. n° 22,
p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_2_A3_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA RÉPARTITION MODULO 1 DE LA SUITE $x\theta^n$
ET LES ENSEMBLES DE CANTOR

par Michel MENDES FRANCE

Dans cet exposé, on rappelle les principaux résultats connus sur la répartition de la suite $x\theta^n$ modulo 1, et on les complète par quelques remarques.

1. Les théorèmes de Weyl et Koksma.

Rappelons la définition d'une suite équirépartie modulo 1. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$. Si l'expression

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \text{card}\{n \mid u_n \in I \pmod{1}; n = 1, 2, \dots, p\}$$

existe pour tout intervalle I de $[0, 1]$, et si elle est égale à la mesure de I , on dit que la suite u est équirépartie modulo 1 ([1], [2]).

Une famille de suites particulièrement intéressantes est la famille des suites de la forme $(u_n) = (x\theta^n)$, où $x > 0$ et $\theta > 1$. Dès 1916, WEYL démontre que $\theta > 1$ étant fixé, la suite $(x\theta^n)$ est équirépartie modulo 1 pour presque tous les nombres x . Vingt ans plus tard, KOKSMA démontre que x étant positif fixé, la suite $(x\theta^n)$ est équirépartie modulo 1 pour presque tous les nombres $\theta > 1$ [2]. Depuis, ces résultats ont été précisés, et l'ensemble des couples (x, θ) , qui sont tels que la suite $(x\theta^n)$ n'est pas équirépartie modulo 1, a donné lieu à de nombreux travaux. ERDÖS et TAYLOR établissent dans [3] que l'ensemble des x , pour lesquels la suite $(x\theta^n)$ est mal répartie (non équirépartie modulo 1), a une dimension de Hausdorff égale à 1. Dans une autre direction, PISOT et SALEM ont entrepris une étude détaillée des couples (x, θ) donnant lieu à une mauvaise répartition.

2. Nombres de Pisot-Vijayaraghavan (PV).

On appelle nombre PV un entier algébrique θ plus grand que 1 dont tous les conjugués autres que lui-même sont à l'intérieur du cercle unité ([7], [8]). On désigne par S l'ensemble des nombres PV. Si x appartient au corps algébrique de θ , on montre facilement que la suite $(x\theta^n)$ est mal répartie (elle a, en fait, un nombre fini de points d'accumulations). La réciproque est vraie sous la

forme suivante : Si θ est un nombre algébrique plus grand que 1, et s'il existe un nombre $x \neq 0$, tel que la suite $(x\theta^n)$ n'ait qu'un nombre fini de points d'accumulations modulo 1, alors θ est un nombre PV et x appartient au corps algébrique de θ [8].

Dans [7], on donne la caractérisation suivante :

$$\theta \in S \iff \exists x \neq 0 \text{ tel que } \prod_{m=0}^{\infty} \cos x\theta^m$$

soit un produit infini convergent .

Il sera commode d'écrire l'implication précédente sous la forme équivalente :

$$(1) \quad \theta \in S \iff \exists k \neq 0 \text{ entier tel que } \prod_{m=0}^{\infty} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m$$

soit un produit infini convergent .

3. L'ensemble de Cantor $C(\theta)$.

Certains des résultats précédents peuvent être complétés par l'introduction de l'ensemble de Cantor $C(\theta)$. Si θ est un nombre réel supérieur à 2, $C(\theta)$ représente l'ensemble des nombres x de la forme :

$$x = (\theta - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{\theta^n},$$

où ε_n est : soit 0, soit 1 . Il est facile de voir que cet ensemble est un ensemble parfait de mesure nulle. La surjection, qui à l'élément $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ du groupe $\{(0), (1)\}^{\mathbb{N}} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ fait correspondre $x = (\theta - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{\theta^n} \in C(\theta)$, permet de munir $C(\theta)$ d'une mesure positive μ (nécessairement singulière), image de la mesure de Haar sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$.

Appelons alors $\mathcal{P}(\theta)$ la propriété suivante : " μ -presque tous les x sont tels que la suite $(x\theta^n)$ est équirépartie modulo 1 " .

On démontre alors le résultat suivant [5] :

THÉORÈME 1. - Soit $\theta > 2$.

(1) Si pour tout entier $k \neq 0$, la série

$$\Sigma = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left| \prod_{m=0}^p \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m \right|$$

converge, alors $\mathcal{P}(\theta)$ a lieu.

(2) La série Σ converge pour presque tous les $\theta > 1$, de sorte que $\mathcal{P}(\theta)$ est vraie pour presque tous les $\theta > 2$.

D'après la caractérisation (1) de l'ensemble S , il est bien évident que si $\theta \in S$, alors la série Σ diverge pour un entier $k \neq 0$ au moins. Le théorème précédent ne nous donne donc aucun renseignement lorsque $\theta \in S$. Une étude particulière s'impose donc.

On montre alors le résultat suivant [5] :

THÉORÈME 2. - Si $\theta > 2$ et $\theta \in S$, alors la propriété $\mathcal{P}(\theta)$ n'a pas lieu. Plus précisément, μ -presque tous les x sont tels que la suite $(x\theta^n)$ est mal répartie.

On peut se demander si, sous les hypothèses du théorème, il existe des nombres $x \in C(\theta)$ tels que la suite $(x\theta^n)$ soit équirépartie modulo 1, ou si au contraire l'implication

$$" x \in C(\theta) \implies (x\theta^n) \text{ mal répartie } "$$

est vraie. Nous n'avons pas su résoudre ce problème dans le cas général. Cependant, si $\theta > 2$ est un nombre PV dont tous les conjugués sont à l'intérieur du cercle $|z| < \frac{1}{2}$, alors l'implication précédente a lieu. Ceci se produit en particulier si θ est une unité quadratique de S .

Signalons aussi un théorème qui découle immédiatement d'un résultat de SALEM et ZYGMUND [9] :

THÉORÈME 3. - Si $\theta > 2$ et $\theta \in S$, il existe alors un entier algébrique $\lambda \neq 0$ du corps de θ tel que, pour tout $x \in C(\theta)$, la suite $(\lambda x\theta^n)$ soit mal répartie.

Enfin, avant d'énoncer un dernier résultat, introduisons des notations : $[t]$ (resp. $\{t\}$) désigne la partie entière (resp. fractionnaire) du nombre réel t . $E(\theta)$ représente l'ensemble des nombres x de la forme

$$x = (\theta - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2\{\varphi(n)\}]}{\theta^n}$$

où φ est un polynôme réel. On démontre que $E(\theta)$ est contenu dans $C(\theta)$, qu'il est dense dans $C(\theta)$, qu'il a la puissance du continu dans toute portion non vide de $C(\theta)$, et que sa dimension de Hausdorff est nulle.

THÉORÈME 4. - Si $\theta \in S$ et $x \in E(\theta)$, alors la suite $(x\theta^n)$ est mal répartie. De façon plus précise, l'adhérence $A(x)$ de l'ensemble des points $x\theta^n$, $n \in \mathbb{N}$, a une dimension de Hausdorff nulle (voir [5]).

Ce théorème et les remarques qui précèdent constituent une généralisation des résultats obtenus dans [6].

Remarque. - On sait que l'ensemble des x , pour lesquels la suite $(x\lambda_n)$, $(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq q > 1)$, n'est pas équirépartie modulo 1, a la puissance du continu sur chaque intervalle (voir [4] par exemple). Le théorème 4 précise ce résultat dans le cas $\lambda_n = \theta^n$, $\theta \in S$, en ce sens qu'il permet de construire effectivement un ensemble de points x , ayant la puissance du continu sur chaque intervalle et tel que $(x\theta^n)$ soit mal répartie.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CASSELS (J. W. S.). - An introduction to diophantine approximation. - Cambridge, University Press, 1957 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 45).
- [2] CHAUVINEAU (Jean). - Equirépartition et équirépartition uniforme modulo 1, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 3, 1961/62, n° 7, 35 p.
- [3] ERDÖS (P.) and TAYLOR (S. J.). - On the set of points of convergence of a lacunary trigonometric series and the equidistribution properties of related sequences, Proc. London math. Soc., t. 7, 1957, p. 598-615.
- [4] MÉLA (Jean-François). - Suites lacunaires de Sidon, ensembles propres et points exceptionnel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 14, 1964, p. 533-538.
- [5] MENDÈS FRANCE (Michel). - Quelques remarques sur la répartition modulo 1 de la suite $x\theta^n$, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 6, 1964/65, n° 11, 9 p.
- [6] MENDÈS FRANCE (Michel). - Un ensemble de nombres non normaux, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 18, 1964/65, n° 2, 6 p.
- [7] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Annali Scuola di Pisa, t. 7, 1938, p. 205-248.
- [8] PISOT (Charles). - Répartition modulo 1 des puissances successives des nombres réels, Comment. math. Helvet., t. 19, 1946/47, p. 153-160.
- [9] SALEM (R.) et ZYGMUND (A.). - Sur un théorème de Pjateckij-Šapiro, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 240, 1955, p. 2040-2042.