Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

Julien Querré

Ordres maximaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, nº 1 (1964-1965), exp. nº 4, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_1_A4_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
18e année, 1964/65, n° 4

30 novembre 1964

ORDRES MAXIMAUX

par Julien QUERRÉ

Introduction. - La notion d'ordre apparaît dans plusieurs théories.

1° Si K est un corps, tout anneau d'intégrité commutatif unitaire ayant K pour corps des fractions est dit ordre de K.

2° Plus généralement, si R est un ordre de K et Σ une algèbre de dimension finie sur K, on appelle réseau de Σ, tout R-sous-module de Σ, de type fini, qui engendre Σ. Tout anneau qui est réseau de Σ est dit ordre de Σ.

3° Le sous-semi-groupe des éléments entiers d'un groupe ordonné G est appelé cône positif ou ordre de G.

4° Un sous-ensemble S d'un monoïde D est appelé ordre d'Asano de D si :

- S forme un sous-monoïde de D avec élément unité ;
- D est un monoïde-quotient de S selon $D^* \cap S$ (D^* désignant l'ensemble de tous les éléments de D ayant un inverse) ;

c'est-à-dire que, pour tout $x \in D$, il existe α et $\alpha' \in D^* \cap S$, tels que

$$\alpha x \text{ , } x\alpha \in S \text{ .}$$

Tous les ordres ainsi introduits ont la propriété commune d'intervenir comme élément d'un monoïde résidué vérifiant la condition $\alpha^2 \leqslant \alpha$. C'est ce qui va justifier l'exposé.

1. Monoïdes clos [3].

Soit G un monoïde résidué. On appellera ordre dans G, tout $m \in G$, tel que $m^2 \leqslant m$. Quel que soit $x \in G$, $x \mathbin{.\raisebox{0.5ex}{.}} x$ et $x \mathbin{\raisebox{0.5ex}{.}.} x$ sont des ordres, appelés respectivement ordres à droite et à gauche associés à x. Si $x \in G$, on posera :

$$x^{-1} = (x \mathbin{.\raisebox{0.5ex}{.}} x) \mathbin{\raisebox{0.5ex}{.}.} x \text{ .}$$

Un monoïde résidué G sera dit totalement clos (ou $\mathfrak{a}$-nomal) si l'ensemble des ordres associés aux éléments de G admet un plus grand élément ε dit élément bimaximum de G ; ε est équirésiduel.

L'équivalence $x \equiv y \quad (\mathfrak{a}_\varepsilon)$, si, et seulement si, $\varepsilon : x = \varepsilon : y$, fournit pour la loi induite, un groupe-quotient $G/\mathfrak{a}_\varepsilon$ homomorphe à G. Ce groupe est isomorphe à $G_\varepsilon = \{\varepsilon : x \;;\; x \in G\}$ muni de la loi

$$(\varepsilon : x) \circ (\varepsilon : y) = \varepsilon : yx \ .$$

Un monoïde G totalement clos, d'élément bimaximum ε , sera dit nomalement clos ($\mathfrak{a}$-nomalement fermé) si, quel que soit $x \in G$, on a

$$\varepsilon : (x \overset{\bullet}{.} \varepsilon) = \varepsilon : (x \ .^{\bullet} \varepsilon) = \varepsilon : x \ .$$

Enfin, un monoïde G totalement clos, d'élément bimaximum ε , sera dit intégralement clos ($\mathfrak{a}$-totalement fermé) si tous les ordres associés sont égaux à ε .

Un monoïde résidué G sera dit B-totalement clos ($\mathfrak{B}$-nomal) s'il existe un élément β vérifiant la condition

$$\beta^{-1} = \beta \overset{\bullet}{.} \beta = \beta \ .^{\bullet} \beta$$

et tel que, pour tout $x \in G$,

$$\beta = x(\beta \ .^{\bullet} x) = (\beta \overset{\bullet}{.} x)x \ .$$

β est dit B-élément. Un B-élément s'il existe est unique, c'est un idempotent appartenant au centre de G .

Un monoïde G , B-totalement clos, dont β est le B-élément, sera dit B-nomalement clos si, quel que soit $x \in G$, on a

$$(x \overset{\bullet}{.} x) \overset{\bullet}{.} \beta = (x \ .^{\bullet} x) \ .^{\bullet} \beta = \beta^{-1} \ .$$

Enfin, un monoïde intégralement clos, B-totalement clos, sera dit B-intégralement clos.

On montre qu'un monoïde résidué unitaire est un groupe ordonné si, et seulement si, l'élément neutre est B-élément.

2. Ordres maximaux.

Soit G un monoïde résidué. Un ordre de G sera dit maximal s'il n'existe aucun ordre plus grand. Un élément $x \in G$ sera dit normal si ses ordres associés sont maximaux.

Si un ordre ω est maximal, $\omega^2 \leqslant \omega$ implique $\omega \leqslant \omega \overset{\bullet}{.} \omega$ et $\omega \leqslant \omega \ .^{\bullet} \omega$; c'est donc un élément normal.

THÉORÈME 2.1. - L'ensemble N des éléments normaux de G est un sous-monoïde résidué de G . Si ω est un ordre maximal, l'ensemble N_ω des éléments normaux de G , ayant ω pour ordre associé à droite et à gauche, est un sous-monoïde résidué de N .

Soient x , y appartenant à N .

$$\left\{\begin{array}{l} x \mathbin{{}^{\bullet}\!.} x \leqslant xy \mathbin{{}^{\bullet}\!.} xy \\ y \mathbin{.\!{}^{\bullet}} y \leqslant xy \mathbin{.\!{}^{\bullet}} xy \end{array}\right. \Longrightarrow xy \in N$$

$$\left\{\begin{array}{l} x \mathbin{{}^{\bullet}\!.} x \leqslant (x \mathbin{{}^{\bullet}\!.} y) \mathbin{{}^{\bullet}\!.} (x \mathbin{{}^{\bullet}\!.} y) \\ y \mathbin{.\!{}^{\bullet}} y \leqslant (x \mathbin{{}^{\bullet}\!.} y) \mathbin{.\!{}^{\bullet}} (x \mathbin{{}^{\bullet}\!.} y) \end{array}\right. \Longrightarrow x \mathbin{{}^{\bullet}\!.} y \in N .$$

De même, $x \mathbin{.\!{}^{\bullet}} y \in N$.

Soient $N_\omega = \{x \in N \,;\ x \mathbin{{}^{\bullet}\!.} x = x \mathbin{.\!{}^{\bullet}} x = \omega\}$, et x et y deux éléments de N_ω .

$$\left\{\begin{array}{l} \omega = x \mathbin{{}^{\bullet}\!.} x \leqslant xy \mathbin{{}^{\bullet}\!.} xy \\ \omega = y \mathbin{.\!{}^{\bullet}} y \leqslant xy \mathbin{.\!{}^{\bullet}} xy \end{array}\right. \Longrightarrow xy \in N_\omega$$

$$\left\{\begin{array}{l} \omega = x \mathbin{{}^{\bullet}\!.} x \leqslant (x \mathbin{{}^{\bullet}\!.} y) \mathbin{{}^{\bullet}\!.} (x \mathbin{{}^{\bullet}\!.} y) \\ \omega = y \mathbin{.\!{}^{\bullet}} y \leqslant (x \mathbin{{}^{\bullet}\!.} y) \mathbin{.\!{}^{\bullet}} (x \mathbin{{}^{\bullet}\!.} y) \end{array}\right. \Longrightarrow x \mathbin{{}^{\bullet}\!.} y \in N_\omega$$

$$\left\{\begin{array}{l} \omega = x \mathbin{.\!{}^{\bullet}} x \leqslant (x \mathbin{.\!{}^{\bullet}} y) \mathbin{.\!{}^{\bullet}} (x \mathbin{.\!{}^{\bullet}} y) \\ \omega = y \mathbin{{}^{\bullet}\!.} y \leqslant (x \mathbin{.\!{}^{\bullet}} y) \mathbin{{}^{\bullet}\!.} (x \mathbin{.\!{}^{\bullet}} y) \end{array}\right. \Longrightarrow x \mathbin{.\!{}^{\bullet}} y \in N_\omega .$$

N_ω est donc un monoïde intégralement clos d'élément bimaximum ω . L'ensemble

$$\Phi_\omega = \{x^{-1} \ ;\ x \in N_\omega\}$$

est donc un groupe pour la loi $x^{-1} \circ y^{-1} = (yx)^{-1}$. On dira que c'est le <u>groupe associé</u> à l'ordre maximal ω .

En particulier, $x \in \Phi_\omega$, si et seulement si $(x^{-1})^{-1} = x$.

Si ω et λ sont deux ordres maximaux distincts, il est immédiat que Φ_ω et Φ_λ sont disjoints. L'élément $f = \omega \mathbin{{}^{\bullet}\!.} \lambda$ sera dit <u>conducteur à gauche</u> de l'ordre maximal λ par rapport à l'ordre maximal ω . On a

$$\begin{array}{ll} f \mathbin{.\!{}^{\bullet}} f = \lambda \ ; \quad f^{-1} \mathbin{{}^{\bullet}\!.} f^{-1} = \lambda & \\ & f^{-1} = \omega \mathbin{.\!{}^{\bullet}} f = \lambda \mathbin{{}^{\bullet}\!.} f \\ f \mathbin{{}^{\bullet}\!.} f = \omega \ ; \quad f^{-1} \mathbin{.\!{}^{\bullet}} f^{-1} = \omega & \end{array} .$$

En particulier, ni f , ni f^{-1} , n'appartiennent à l'un des monoïdes N_ω et N_λ . Par contre, si $x \in G$, $y = fx\,f^{-1} \in N_\omega$ et $z = f^{-1}\,xf \in N_\lambda$. En effet,

$$\omega = f \mathbin{{}^{\bullet}\!.} f \leqslant y \mathbin{{}^{\bullet}\!.} y = fx\,f^{-1} \mathbin{{}^{\bullet}\!.} fx\,f^{-1} \qquad \text{d'où } \omega = y \mathbin{{}^{\bullet}\!.} y ,$$

$$\omega = f^{-1} \mathbin{.\!{}^{\bullet}} f^{-1} \leqslant y \mathbin{.\!{}^{\bullet}} y = fx\,f^{-1} \mathbin{.\!{}^{\bullet}} fx\,f^{-1} \qquad \text{d'où } \omega = y \mathbin{.\!{}^{\bullet}} y .$$

THÉORÈME 2.2. – <u>Si</u> ω <u>et</u> λ <u>sont deux ordres maximaux distincts, leurs groupes associés</u> Φ_λ <u>et</u> Φ_ω <u>sont isomorphes</u>.

(a) <u>L'application de</u> Φ_λ <u>dans</u> N_ω : $u \to \bar{u} = fu\, f^{-1}$ <u>est injective</u>.

$$\bar{u} = \bar{v} \implies fuf^{-1} = fvf^{-1} ,$$

d'où

$$\omega : fuf^{-1} = \omega : fvf^{-1} ,$$

soit

$$f^{-1} \mathbin{.^{\cdot}} uf^{-1} = f^{-1} \mathbin{.^{\cdot}} vf^{-1} .$$

Il vient alors

$$(f^{-1} \mathbin{.^{\cdot}} uf^{-1}) \mathbin{^{\cdot}.} f^{-1} = (f^{-1} \mathbin{.^{\cdot}} vf^{-1}) \mathbin{^{\cdot}.} f^{-1} ,$$

d'où

$$(f^{-1} \mathbin{^{\cdot}.} f^{-1}) \mathbin{.^{\cdot}} uf^{-1} = (f^{-1} \mathbin{^{\cdot}.} f^{-1}) \mathbin{.^{\cdot}} uf^{-1} ,$$

c'est-à-dire $\lambda \mathbin{.^{\cdot}} uf^{-1} = \lambda \mathbin{.^{\cdot}} vf^{-1}$, d'où

$$(\lambda \mathbin{^{\cdot}.} u) \mathbin{.^{\cdot}} f^{-1} = (\lambda \mathbin{^{\cdot}.} v) \mathbin{.^{\cdot}} f^{-1} \qquad \text{et} \qquad (f^{-1})^{-1} \mathbin{^{\cdot}.} u = (f^{-1})^{-1} \mathbin{^{\cdot}.} v ,$$

soit

$$[(f^{-1})^{-1} \mathbin{^{\cdot}.} u] \mathbin{.^{\cdot}} f = [(f^{-1})^{-1} \mathbin{^{\cdot}.} v] \mathbin{.^{\cdot}} f ,$$

d'où $\lambda : u = \lambda : v$, soit $u = v$, puisque u et v sont des fermés dans l'application $x \to \lambda \mathbin{^{\cdot}.} (\lambda \mathbin{.^{\cdot}} x)$.

(b) <u>L'application</u> $\varphi : \Phi_\lambda \to \Phi_\omega$ <u>telle que</u> $\varphi(u) = [(\bar{u})^{-1}]^{-1}$ <u>est injective</u>.

Remarquons que $\bar{u} \in N_\omega$ entraîne $(\bar{u})^{-1} \in \Phi_\omega$, puis $[(\bar{u})^{-1}]^{-1} \in \Phi_\omega$.

Soit $\varphi(u) = \varphi(v)$, d'où

$$[\varphi(u)]^{-1} = [\varphi(v)]^{-1}$$

et, puisque $(\bar{u})^{-1} \in \Phi_\omega$,

$$(\bar{u})^{-1} = (\bar{v})^{-1} ,$$

c'est-à-dire

$$\omega : fuf^{-1} = \omega : fvf^{-1} ,$$

ce qui implique $u = v$, d'après (a).

(c) <u>L'application</u> φ <u>est surjective</u>.

Soient $v \in \Phi_\omega$, $w = f^{-1}\, vf \in N_\lambda$, et $u = (w^{-1})^{-1} \in \Phi_\lambda$, donc $u = \lambda \mathbin{{}^{\bullet}.} (\lambda : f^{-1} vf)$.

$$f^{-1} \mathbin{.^{\bullet}} u = (\lambda \mathbin{{}^{\bullet}.} f) \mathbin{.^{\bullet}} [\lambda \mathbin{{}^{\bullet}.} (\lambda : f^{-1}\, vf)] = \{\lambda : [\lambda : (\lambda : f^{-1}\, vf)]\} \mathbin{{}^{\bullet}.} f$$

$$f^{-1} \mathbin{.^{\bullet}} u = (\lambda : f^{-1}\, vf) \mathbin{{}^{\bullet}.} f = (\lambda \mathbin{{}^{\bullet}.} f) \mathbin{.^{\bullet}} f^{-1}\, vf = f^{-1} \mathbin{.^{\bullet}} f^{-1}\, vf = \omega \mathbin{.^{\bullet}} vf$$

$$f^{-1} \mathbin{.^{\bullet}} uf^{-1} = \omega \mathbin{.^{\bullet}} vff^{-1} = (\omega \mathbin{{}^{\bullet}.} v) \mathbin{.^{\bullet}} ff^{-1} = (\omega \mathbin{.^{\bullet}} ff^{-1}) \mathbin{{}^{\bullet}.} v = (f^{-1} \mathbin{.^{\bullet}} f^{-1}) \mathbin{{}^{\bullet}.} v = \omega \mathbin{{}^{\bullet}.} v\ ,$$

et

$$\omega : (f^{-1} \mathbin{.^{\bullet}} uf^{-1}) = v\ .$$

Par ailleurs,

$$[(\bar{u})^{-1}]^{-1} = \omega : (\omega : \bar{u}) = \omega : (f^{-1} \mathbin{.^{\bullet}} uf^{-1})\ ;$$

donc $v = [(\bar{u})^{-1}]^{-1}$, et v a donc pour antécédent $u = (w^{-1})^{-1}$.

(d) φ <u>est un isomorphisme de groupe</u>.

Notons $\star$ la multiplication dans Φ_λ, et $\circ$ la multiplication dans Φ_ω.

$$\varphi(u \star v) = \omega : [\omega : f(u \star v) f^{-1}]\ ,$$

or

$$\omega : f(u\star v)f^{-1} = [(\omega \mathbin{.^{\bullet}} f) \mathbin{.^{\bullet}} (u\star v)] \mathbin{.^{\bullet}} f^{-1} = [f^{-1} \mathbin{.^{\bullet}} (u\star v)] \mathbin{.^{\bullet}} f^{-1} = [(\lambda \mathbin{{}^{\bullet}.} f) \mathbin{.^{\bullet}} (u \star v)] \mathbin{.^{\bullet}} f^{-1},$$

d'où

$$\omega : f(u\star v)f^{-1} = [(\lambda \mathbin{.^{\bullet}} uv) \mathbin{{}^{\bullet}.} f] \mathbin{.^{\bullet}} f^{-1} = f^{-1} \mathbin{.^{\bullet}} uvf^{-1}\ ,$$

$$\varphi(u) \circ \varphi(v) = [\omega : (\omega : \bar{u})] \circ [\omega : (\omega : \bar{v})] = \omega : [(\omega : \bar{v}) \circ (\omega : \bar{u})]$$
$$= \omega : (\omega : \bar{u}\bar{v})\ ,$$

$$\omega : \bar{u}\bar{v} = \omega : fuf^{-1}\, fvf^{-1} = [(\omega \mathbin{{}^{\bullet}.} fuf^{-1}) \mathbin{.^{\bullet}} f] \mathbin{.^{\bullet}} vf^{-1}\ ,$$

$$(\omega \mathbin{{}^{\bullet}.} fuf^{-1}) \mathbin{.^{\bullet}} f = (\omega \mathbin{.^{\bullet}} f) \mathbin{{}^{\bullet}.} fuf^{-1} = (f^{-1} \mathbin{{}^{\bullet}.} f^{-1}) \mathbin{{}^{\bullet}.} fu = \lambda \mathbin{{}^{\bullet}.} fu$$
$$= (\lambda \mathbin{.^{\bullet}} u) \mathbin{{}^{\bullet}.} f = (\lambda \mathbin{{}^{\bullet}.} f) \mathbin{.^{\bullet}} u = f^{-1} \mathbin{.^{\bullet}} u\ ,$$

donc

$$\omega : \overline{uv} = f^{-1} \mathbin{.^{\bullet}} uvf^{-1}\ ,$$

d'où

$$\omega : \bar{u}\bar{v} = \omega : f(u\star v)f^{-1}\ ,$$

soit

$$\omega : (\omega : \overline{u}\overline{v}) = \omega : (\omega : f(u \star v) f^{-1}) \ ,$$

finalement

$$\varphi(u \star v) = \varphi(u) \circ \varphi(v) \ .$$

Remarque. - L'application de ce théorème au monoïde résidué des parties P_G d'un groupe serait sans intérêt, G étant évidemment un ordre maximal, s'il n'était pas possible d'introduire une notion d'ordre maximal plus forte.

On appellera ordre maximal propre S de P_G un élément tel que $S = S \cdot\!\!\cdot S = S \,{}^{\bullet}\!\!\cdot S$ et qui n'est contenu dans aucun autre ordre que G .

Si S et U sont deux ordres maximaux propres de P_G dont le conducteur $F = S \,{}^{\bullet}\!\!\cdot U$ n'est pas vide, alors le théorème précédent subsiste.

3. Sous-monoïdes résidués ou non d'un monoïde résidué et ayant une image homomorphe et isotone à un groupe.

Un monoïde ordonné ayant une image homomorphe et isotone à un groupe sera dit quasi-clos.

On appellera ordre-$\mathfrak{A}$ d'un monoïde résidué G , un élément α tel que

$$\alpha \,{}^{\bullet}\!\!\cdot \alpha = \alpha \cdot\!{}^{\bullet} \alpha = \alpha \ .$$

LEMME 3.1. - Si α est un ordre-$\mathfrak{A}$, tel que, pour tout $m \in G$, on a $\alpha m \cdot\!{}^{\bullet} \alpha m \leqslant \alpha$ et $m\alpha \,{}^{\bullet}\!\!\cdot m\alpha \leqslant \alpha$, alors α est équirésiduel.

$$\alpha m \cdot\!{}^{\bullet} \alpha m \leqslant \alpha \Longrightarrow (\alpha m \,{}^{\bullet}\!\!\cdot m) \cdot\!{}^{\bullet} \alpha m \leqslant \alpha \,{}^{\bullet}\!\!\cdot m \Longrightarrow \alpha \cdot\!{}^{\bullet} \alpha m \leqslant \alpha \,{}^{\bullet}\!\!\cdot m \text{ d'où } \alpha \cdot\!{}^{\bullet} m \leqslant \alpha \,{}^{\bullet}\!\!\cdot m \ .$$

De même,

$$m\alpha \,{}^{\bullet}\!\!\cdot m\alpha \leqslant \alpha \Longrightarrow (m\alpha \cdot\!{}^{\bullet} m) \,{}^{\bullet}\!\!\cdot m\alpha \leqslant \alpha \cdot\!{}^{\bullet} m \Longrightarrow \alpha \,{}^{\bullet}\!\!\cdot m\alpha \leqslant \alpha \cdot\!{}^{\bullet} m \Longrightarrow \alpha \,{}^{\bullet}\!\!\cdot m \leqslant \alpha \cdot\!{}^{\bullet} m \ .$$

Si α est un ordre-$\mathfrak{A}$, notons D_α l'ensemble des $x \in G$ vérifiant les relations

$$(\alpha \,{}^{\bullet}\!\!\cdot x) \cdot\!{}^{\bullet} (\alpha \,{}^{\bullet}\!\!\cdot x) = (\alpha \cdot\!{}^{\bullet} x) \,{}^{\bullet}\!\!\cdot (\alpha \cdot\!{}^{\bullet} x) = \alpha \ .$$

D_α n'est pas vide, puisque $\alpha \in D_\alpha$.

LEMME 3.2. - Pour tout $x \in D_\alpha$, on a $\alpha \,{}^{\bullet}\!\!\cdot x = \alpha \cdot\!{}^{\bullet} x$.

$$(\alpha \cdot\!{}^{\bullet} \alpha x) \,{}^{\bullet}\!\!\cdot (\alpha \cdot\!{}^{\bullet} \alpha x) = [(\alpha \cdot\!{}^{\bullet} \alpha) \cdot\!{}^{\bullet} x] \,{}^{\bullet}\!\!\cdot [(\alpha \cdot\!{}^{\bullet} \alpha) \cdot\!{}^{\bullet} x] = \alpha \geqslant \alpha x \cdot\!{}^{\bullet} \alpha x$$

$$(\alpha \,{}^{\bullet}\!\!\cdot x\alpha) \cdot\!{}^{\bullet} (\alpha \,{}^{\bullet}\!\!\cdot x\alpha) = [(\alpha \,{}^{\bullet}\!\!\cdot \alpha) \,{}^{\bullet}\!\!\cdot x] \cdot\!{}^{\bullet} [(\alpha \,{}^{\bullet}\!\!\cdot \alpha) \,{}^{\bullet}\!\!\cdot x] = \alpha \geqslant x\alpha \,{}^{\bullet}\!\!\cdot x\alpha \ .$$

Le lemme 3.1 donne alors le résultat.

LEMME 3.3. - <u>Si</u> $x \in D_\alpha$, <u>alors</u> $\alpha : x \in D_\alpha$, <u>et l'application</u> $x \to \alpha : (\alpha : x)$ <u>est une fermeture dans</u> D_α .

$$\alpha = (\alpha : x) .^{\bullet} (\alpha : x) \leqslant [\alpha .^{\bullet} (\alpha : x)]^{\bullet} .[\alpha .^{\circ} (\alpha : x)] \leqslant [\alpha .^{\bullet} (\alpha : x)]^{\bullet} . x = (\alpha : x) .^{\bullet} (\alpha : x) = \alpha$$

$$\alpha = (\alpha : x)^{\bullet} .(\alpha : x) \leqslant [\alpha^{\bullet} \circ (\alpha : x)] .^{\bullet} [\alpha^{\bullet} .(\alpha : x)] \leqslant [\alpha^{\bullet} .(\alpha : x)] .^{\bullet} x = (\alpha : x)^{\bullet} .(\alpha : x) = \alpha .$$

Donc, si $x \in D_\alpha$, il en est de même de $\alpha : x$, donc aussi de $\alpha : (\alpha : x)$, et l'application $x \to \alpha : (\alpha : x)$ dans D_α est la restriction de celle définie dans G .

LEMME 3.4. - D_α <u>est un sous-monoïde de</u> G .

Etablissons que, si $x \in D_\alpha$, $\mathcal{A}_{\alpha : x} = \mathcal{A}_\alpha$. Posons $y^* = \alpha : (\alpha : y)$, $y \in D_\alpha$, d'où

$$y^* {}^{\bullet}. y^* = y^* .^{\bullet} y^* = \alpha .$$

Donc,

$$\mathcal{A}_{y^*} \subseteq \mathcal{A}_{y^* {}^{\bullet}. y^*} = \mathcal{A}_\alpha ;$$

mais,

$$\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}_{\alpha : (\alpha : y)} = \mathcal{A}_{y^*} ,$$

d'où

$$\mathcal{A}_{y^*} = \mathcal{A}_\alpha .$$

En particulier, si $y = \alpha : x$, on a

$$\mathcal{A}_{y^*} = \mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}_{\alpha : x} ,$$

car $y^* = y$.

$\mathcal{A}_{\alpha : x} = \mathcal{A}_\alpha$ entraîne $\alpha : (\alpha : x') = (\alpha : x) : [(\alpha : x) : x']$; si $x' \in D_\alpha$, on a

$$\alpha = (\alpha : x') : (\alpha : x') = \{(\alpha : x) : [\alpha : xx']\} : x' = (\alpha : xx') : (\alpha : xx') .$$

Donc $x , x' \in D_\alpha \implies xx' \in D_\alpha$.

THÉORÈME 3.1. - <u>Il y a bijection entre l'ensemble des ordres-</u>$\mathcal{A}$ <u>et l'ensemble des sous-monoïdes quasi-clos maximaux de</u> G .

Soient α un ordre-$\mathcal{A}$, et D_α le sous-monoïde précédemment défini qui lui est associé. Les lemmes précédents et les théorèmes 10 , 12 , 13 de [1] permettent d'affirmer que D_α est quasi-clos. L'homomorphisme isotone est ici la fermeture $x \to \alpha : (\alpha : x)$, et on peut prendre pour groupe-image $\Phi_\alpha = \{\alpha : x ; \ x \in D_\alpha\}$ muni de la loi $(\alpha : x) \circ (\alpha : y) = \alpha : yx$.

<u>Remarque</u>. – Si D_α est résidué, c'est alors un monoïde totalement clos, d'élément bimaximum α .

Soient α un ordre-$\mathfrak{A}$, et Γ_α l'ensemble des $x \in D_\alpha$ vérifiant les relations

$$\alpha \mathbin{{}^{\bullet}.} (x \mathbin{{}^{\bullet}.} \alpha) = \alpha \mathbin{.^{\circ}} (x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha) = \alpha : x \;;$$

Γ_α n'est pas vide, puisque $\alpha \in \Gamma_\alpha$.

Evidemment, si $x \in \Gamma_\alpha$, $\alpha \mathbin{{}^{\bullet}.} x = \alpha \mathbin{.^{\bullet}} x$. De plus,

$$\alpha(x \mathbin{.^{\circ}} \alpha) \mathbin{.^{\circ}} \alpha(x \mathbin{.^{\circ}} \alpha) \leqslant [\alpha \mathbin{.^{\bullet}} \alpha(x \mathbin{.^{\circ}} \alpha)] \mathbin{{}^{\bullet}.} [\alpha \mathbin{.^{\bullet}} \alpha(x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha)] = \alpha$$

$$(x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha)\alpha \mathbin{{}^{\bullet}.} (x \mathbin{.^{\circ}} \alpha)\alpha \leqslant [\alpha \mathbin{{}^{\bullet}.} (x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha)\alpha] \mathbin{.^{\bullet}} [\alpha \mathbin{{}^{\bullet}.} (x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha)\alpha] = \alpha \,,$$

donc, selon le lemme 3.2,

$$\alpha \mathbin{.^{\bullet}} (x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha) = \alpha \mathbin{{}^{\bullet}.} (x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha) \,.$$

On aurait de même

$$\alpha \mathbin{{}^{\bullet}.} (x \mathbin{{}^{\circ}.} \alpha) = \alpha \mathbin{.^{\bullet}} (x \mathbin{{}^{\bullet}.} \alpha) \,.$$

LEMME 3.5. – <u>Si</u> $x \in \Gamma_\alpha$, <u>alors</u> $\alpha : x \in \Gamma_\alpha$, <u>et l'application</u> $x \to \alpha : (\alpha : x)$ <u>est une fermeture dans</u> Γ_α .

Si $x \in \Gamma_\alpha$, $x \in D_\alpha$ et $\alpha : x \in D_\alpha$ d'après le lemme 3.3. De plus,

$$\alpha \mathbin{.^{\bullet}} [(\alpha : x) \mathbin{.^{\bullet}} \alpha] = \alpha \mathbin{.^{\bullet}} [(\alpha : \alpha) \mathbin{{}^{\bullet}.} x] = \alpha \mathbin{.^{\bullet}} (\alpha : x)$$

$$\alpha \mathbin{{}^{\bullet}.} [(\alpha : x) \mathbin{{}^{\bullet}.} \alpha] = \alpha \mathbin{{}^{\circ}.} [(\alpha : \alpha) \mathbin{.^{\bullet}} x] = \alpha \mathbin{{}^{\bullet}.} (\alpha : x) \,.$$

Donc, $\alpha : x \in \Gamma_\alpha$, et aussi $\alpha : (\alpha : x)$, et l'application $x \to \alpha : (\alpha : x)$ dans Γ_α est la restriction de celle définie dans D_α .

LEMME 3.6. – Γ_α <u>est un sous-monoïde de</u> D_α .

Soient x et y deux éléments de Γ_α ; donc, d'après le lemme 3.4, $xy \in D_\alpha$. D'autre part,

$$\alpha : (x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha) = \alpha : (x \mathbin{{}^{\bullet}.} \alpha) = \alpha : x \quad \text{entraîne} \quad x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha \equiv x \mathbin{{}^{\bullet}.} \alpha \equiv x \quad (\mathfrak{A}_\alpha) \,,$$

$\mathfrak{A}_\alpha$ étant régulière à droite pour la multiplication $xy \equiv (x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha)y \quad (\mathfrak{A}_\alpha)$; or,

$$(x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha)y \leqslant xy \mathbin{.^{\bullet}} \alpha \leqslant (xy)^* \mathbin{.^{\bullet}} \alpha \,.$$

Mais,

$$(xy)^* \mathbin{.^{\circ}} \alpha = [\alpha \mathbin{{}^{\bullet}.} (\alpha \mathbin{.^{\bullet}} xy)] \mathbin{.^{\bullet}} \alpha = (\alpha : \alpha) \mathbin{{}^{\bullet}.} (\alpha \mathbin{.^{\bullet}} xy) = (xy)^*,$$

donc, en raison de la convexité des classes,

$$xy \mathbin{.^{\bullet}} \alpha \equiv xy \quad (\mathfrak{a}_\alpha) \qquad \text{et aussi} \qquad xy \mathbin{^{\bullet}.} \alpha \equiv xy \quad (\mathfrak{a}_\alpha) \; .$$

Donc, $xy \in \Gamma_\alpha$.

LEMME 3.7. — Γ_α <u>est un sous-monoïde résidué, nomalement clos de</u> G , <u>d'élément bimaximum</u> α .

(a) Si $x , y \in \Gamma_\alpha$, $(x \mathbin{.^{\bullet}} y) \mathbin{.^{\bullet}} \alpha \equiv (x \mathbin{.^{\bullet}} y) \mathbin{^{\bullet}.} \alpha \equiv x \mathbin{.^{\bullet}} y \quad (\mathfrak{a}_\alpha)$.

Remarquons tout d'abord que $\alpha : y(\alpha : y) = \alpha$, d'où $y(\alpha : y) \equiv \alpha \quad (\mathfrak{a}_\alpha)$; mais $x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha \equiv x \quad (\mathfrak{a}_\alpha)$, d'où, par multiplication à droite,

$$y(\alpha : y)(x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha) \equiv \alpha x \quad (\mathfrak{a}_\alpha) \; ;$$

or $\alpha \mathbin{.^{\bullet}} \alpha x = \alpha \mathbin{.^{\bullet}} x$, d'où $y(\alpha : y)(x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha) \equiv x \quad (\mathfrak{a}_\alpha)$.

On a donc

$$(\alpha : y)(x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha) \leqslant x \mathbin{.^{\bullet}} y \leqslant (\alpha : y) \mathbin{^{\bullet}.} (\alpha : x) = \alpha : (\alpha : x)y$$

$$y(\alpha : y)(x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha) \leqslant y(x \mathbin{.^{\bullet}} y) \leqslant y[\alpha : (\alpha : x)y] \leqslant \alpha : (\alpha : x) \; ;$$

par convexité de la classe x , $y(x \mathbin{.^{\bullet}} y) \equiv x \quad (\mathfrak{a}_\alpha)$.

De même,

$$(\alpha : y)(x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha) \mathbin{.^{\bullet}} \alpha \leqslant (x \mathbin{.^{\bullet}} y) \mathbin{.^{\bullet}} \alpha \leqslant [\alpha : (\alpha : x)y] \mathbin{.^{\bullet}} \alpha = (\alpha : \alpha) \mathbin{^{\bullet}.} (\alpha : x)y$$

$$[(\alpha : y) \mathbin{.^{\bullet}} \alpha](x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha) = (\alpha : y)(x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha) \leqslant (\alpha : y)(x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha) \mathbin{.^{\bullet}} \alpha \; ;$$

donc

$$y(\alpha : y)(x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha) \leqslant y[(x \mathbin{.^{\bullet}} y) \mathbin{.^{\bullet}} \alpha] \leqslant y[\alpha : (\alpha : x)y] \leqslant \alpha : (\alpha : x) \; ,$$

d'où, par convexité, $y[(x \mathbin{.^{\bullet}} y) \mathbin{.^{\bullet}} \alpha] \equiv x \quad (\mathfrak{a}_\alpha)$.

On a finalement

$$y(x \mathbin{.^{\bullet}} y) \equiv y[(x \mathbin{.^{\bullet}} y) \mathbin{.^{\bullet}} \alpha] \qquad (\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{a}_{y*} \text{ lemme } 3.4) \; ,$$

donc

$$y^{*} \mathbin{.^{\bullet}} y(x \mathbin{.^{\bullet}} y) = y^{*} \mathbin{.^{\bullet}} y[(x \mathbin{.^{\bullet}} y) \mathbin{.^{\bullet}} \alpha] \; ,$$

$$\alpha \mathbin{.^{\bullet}} (x \mathbin{.^{\bullet}} y) = \alpha \mathbin{.^{\bullet}} [(x \mathbin{.^{\bullet}} y) \mathbin{.^{\bullet}} \alpha] \; .$$

On a de même

$$\alpha \mathbin{^{\bullet}.} (x \mathbin{.^{\bullet}} y) = \alpha \mathbin{^{\bullet}.} [(x \mathbin{.^{\bullet}} y) \mathbin{^{\bullet}.} \alpha] \; .$$

(b) Si $x , y \in \Gamma_\alpha$, $x \mathbin{.^{\bullet}} y$ et $x \mathbin{^{\bullet}.} y$ sont des éléments de Γ_α .

$$\alpha \mathbin{^{\bullet}.} [(\alpha : y) \mathbin{^{\bullet}.} (\alpha : x)] \leqslant \alpha \mathbin{^{\bullet}.} (x \mathbin{.^{\bullet}} y) \leqslant \alpha \mathbin{^{\bullet}.} (\alpha : y)(x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha) = [\alpha \mathbin{^{\bullet}.} (x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha)] \mathbin{^{\bullet}.} (\alpha : y)$$

$$(\alpha : x)y \leqslant \alpha \mathbin{^{\bullet}.} [\alpha \mathbin{.^{\bullet}} y(\alpha : x)] \leqslant \alpha \mathbin{^{\bullet}.} (x \mathbin{.^{\bullet}} y) \leqslant (\alpha : x) \mathbin{^{\bullet}.} (\alpha : y) = \alpha : (\alpha : y)x \; .$$

Posons

$$p = [\alpha \mathbin{^{\cdot}.} (x \mathbin{.^{\cdot}} y)] \mathbin{.^{\cdot}} [\alpha \mathbin{^{\cdot}.} (x \mathbin{.^{\cdot}} y)] \,.$$

On a $p < [\alpha : (\alpha : y)x] \mathbin{.^{\cdot}} (\alpha : x)y$. Or,

$$x(\alpha : x) \equiv \alpha \quad (\mathfrak{a}_\alpha) \,,$$

d'où $(\alpha : y)x\, (\alpha : x)y \equiv (\alpha : y)\alpha y \equiv \alpha \quad (\mathfrak{a}_\alpha)$, d'où $p \leqslant \alpha$. De même,

$$q = [\alpha \mathbin{.^{\cdot}} (x \mathbin{.^{\cdot}} y)] \mathbin{^{\cdot}.} [\alpha \mathbin{.^{\cdot}} (x \mathbin{.^{\cdot}} y)] \leqslant \alpha \,,$$

d'où, selon le lemme 3.1,

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha(x \mathbin{.^{\cdot}} y) \mathbin{.^{\cdot}} \alpha(x \mathbin{.^{\cdot}} y) \leqslant q \leqslant \alpha \\ (x \mathbin{.^{\cdot}} y)\alpha \mathbin{^{\cdot}.} (x \mathbin{.^{\cdot}} y)\alpha \leqslant p \leqslant \alpha \end{array}\right. \Longrightarrow \alpha \mathbin{.^{\cdot}} (x \mathbin{.^{\cdot}} y) = \alpha \mathbin{^{\cdot}.} (x \mathbin{.^{\cdot}} y) \,.$$

Donc $p \geqslant \alpha$ et $q \geqslant \alpha$, ce qui implique $p = q = \alpha$, puis $x \mathbin{.^{\cdot}} y \in \Gamma_\alpha$.

On démontrerait de même que $x \mathbin{^{\cdot}.} y \in \Gamma_\alpha$.

Si $x \in \Gamma_\alpha$, on a

$$x \mathbin{.^{\cdot}} x \leqslant (\alpha : x) \mathbin{^{\cdot}.} (\alpha : x) = \alpha \,,$$

donc Γ_α est totalement clos d'élément bimaximum α . Comme de plus

$$x \mathbin{.^{\cdot}} \alpha \equiv x \mathbin{^{\cdot}.} \alpha \equiv \alpha \quad (\mathfrak{a}_\alpha) \,,$$

Γ_α est nomalement clos. On pourra donc énoncer :

THÉORÈME 3.2. - <u>Il y a bijection entre l'ensemble des ordres-$\mathfrak{a}$ et l'ensemble des sous-monoïdes nomalement clos maximaux de</u> G .

On notera $\Phi_\alpha = \{\alpha : x \;;\; x \in \Gamma_\alpha\}$ le groupe, pour la loi $(\alpha : x) \circ (\alpha : y) = \alpha : yx$, homomorphe et isotone à Γ_α .

Dans le cas particulier où G est totalement clos d'élément bimaximum ε , ε est un ordre maximal ; si Φ_ε est son groupe associé, on a, a priori, $\Phi_\varepsilon \subseteq G_\varepsilon$, mais si $x \in G_\varepsilon$, il existe y tel que $x = \varepsilon : y$ et $x \in N_\varepsilon$, donc $\varepsilon : x \in \Phi_\varepsilon$ et de même $\varepsilon : (\varepsilon : x) = x \in \Phi_\varepsilon$, donc $G_\varepsilon = \Phi_\varepsilon$.

Naturellement, G contient un sous-monoïde nomalement clos

$$\Gamma_\varepsilon = \{x \;;\; \varepsilon : (x \mathbin{.^{\cdot}} \varepsilon) = \varepsilon : x = \varepsilon : (x \mathbin{^{\cdot}.} \varepsilon)\} \,,$$

et un sous-monoïde intégralement clos

$$N_\varepsilon = \{x \in \Gamma_\varepsilon / x \mathbin{^{\cdot}.} x = x \mathbin{.^{\cdot}} x = \varepsilon\} \,,$$

et on a les relations d'inclusion

$$G_\varepsilon \subseteq N_\varepsilon \subseteq \Gamma_\varepsilon \subseteq G \,.$$

On notera que

$$G/\mathfrak{A}_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon/\mathfrak{A}_\varepsilon = N_\varepsilon/\mathfrak{A}_\varepsilon \cong G_\varepsilon \ .$$

Si α est un ordre-$\mathfrak{A}$, en appliquant ces dernières considérations à Γ_α , on peut énoncer :

THÉORÈME 3.3. - <u>Il y a bijection entre l'ensemble des ordres-$\mathfrak{A}$ et l'ensemble des sous-monoïdes intégralement clos maximaux de</u> G .

Soient u un ordre quelconque, et I_u l'ensemble des $x \in G$ vérifiant les relations $xu \leqslant x$; $ux \leqslant x$; I_u n'est pas vide, puisque $u \in I_u$.

I_u est un sous-monoïde résidué de G . En effet, si x et $y \in I_u$, $yu \leqslant y$ entraîne $xyu \leqslant xy$; de même, $ux \leqslant x$ entraîne $uxy \leqslant xy$. Par ailleurs,

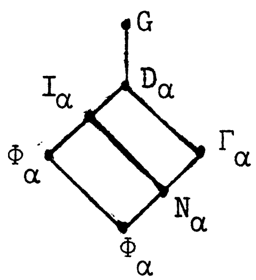
$$(x \mathbin{{}^{\bullet}.} y)u \leqslant (x \mathbin{{}^{\bullet}.} uy)u = [(x \mathbin{{}^{\bullet}.} y) \mathbin{{}^{\bullet}.} u]u \leqslant x \mathbin{{}^{\bullet}.} y$$

$$u(x \mathbin{{}^{\bullet}.} y) \leqslant ux \mathbin{{}^{\bullet}.} y \leqslant x \mathbin{{}^{\bullet}.} y \ .$$

Analogue pour $x \mathbin{.{}^{\bullet}} y$.

Si u est un ordre-$\mathfrak{A}$ α , si $x \in N_\alpha$, cela implique $x \in I_\alpha$ et $N_\alpha \subsetneq I_\alpha$. De même, $\bar{\Phi}_\alpha \subseteq I_\alpha$.

On a donc le diagramme d'inclusion suivant, associé à chaque ordre-$\mathfrak{A}$ de G :



4. <u>Sous-monoïdes $\mathfrak{B}$-clos d'un monoïde résidué.</u>

Soit G un monoïde résidué. On appellera <u>ordre-$\mathfrak{B}$</u> un idempotent $\beta \in G$ tel que

$$\beta^{-1} = \beta \mathbin{.{}^{\bullet}} \beta = \beta \mathbin{{}^{\bullet}.} \beta \qquad \text{et} \qquad \beta^{-1}\beta = \beta\beta^{-1} = \beta \ .$$

On notera Λ_β l'ensemble des $x \in G$ vérifiant les relations

$$\begin{cases} \beta = x(\beta \mathbin{.{}^{\bullet}} x) = (\beta \mathbin{{}^{\bullet}.} x)x \\ (x \mathbin{{}^{\bullet}.} x) \mathbin{{}^{\bullet}.} \beta = (x \mathbin{.{}^{\bullet}} x) \mathbin{.{}^{\bullet}} \beta = \beta^{-1} \ . \end{cases}$$

Λ_β n'est pas vide, car $\beta \in \Lambda_\beta$.

LEMME 4.1. - <u>Si</u> β <u>est un ordre-</u>$\mathcal{B}$, <u>on a</u> $(x \cdot\!\!. \, x) \,.\!\!\cdot\, \beta = (x \,.\!\!\cdot\, x) \cdot\!\!. \, \beta = \beta^{-1}$ <u>pour tout</u> $x \in \Lambda_\beta$.

Soit $p = (x \cdot\!\!. \, x) \,.\!\!\cdot\, \beta$. On a $p \cdot\!\!. \, \beta = \beta^{-1} \,.\!\!\cdot\, \beta = \beta^{-1}$, d'où $p < \beta^{-1}$. Mais

$$(x \cdot\!\!. \, x) \cdot\!\!. \, \beta = \beta^{-1} = \beta \cdot\!\!. \, \beta \quad \text{implique} \quad x \cdot\!\!. \, x \equiv \beta \quad ({}_\beta\mathcal{B}) \ ;$$

or $\beta = \beta^{-1}\beta$, donc est plus petit élément dans sa classe [3], et $\beta \leqslant x \cdot\!\!. \, x \leqslant \beta^{-1}$, d'où $p > \beta \,.\!\!\cdot\, \beta = \beta^{-1}$.

LEMME 4.2. - Λ_β <u>est un sous-monoïde</u> B-<u>nomalement clos de</u> G , <u>dont</u> β <u>est le</u> B-<u>élément</u>.

(a) Si $x , y \in \Lambda_\beta$, $x \,.\!\!\cdot\, y$ et $x \cdot\!\!. \, y$ sont des éléments de Λ_β .

$$\beta \,.\!\!\cdot\, (x \,.\!\!\cdot\, y) \geqslant [y \,.\!\!\cdot\, (x \,.\!\!\cdot\, y)](\beta \,.\!\!\cdot\, y) \geqslant [\beta^{-1} \,.\!\!\cdot\, (x \,.\!\!\cdot\, y)](y \,.\!\!\cdot\, \beta^{-1})(\beta \,.\!\!\cdot\, y)$$

$$\geqslant [(y \,.\!\!\cdot\, y) \,.\!\!\cdot\, (x \,.\!\!\cdot\, y)](y \,.\!\!\cdot\, \beta^{-1})(\beta \,.\!\!\cdot\, y) \geqslant (y \,.\!\!\cdot\, x)(y \,.\!\!\cdot\, \beta^{-1})(\beta \,.\!\!\cdot\, y) ,$$

$$y \,.\!\!\cdot\, \beta^{-1} = y \,.\!\!\cdot\, (y \cdot\!\!. \, \beta y) \geqslant \beta y , \quad \text{d'où} \quad \beta \,.\!\!\cdot\, (x \,.\!\!\cdot\, y) \geqslant (y \,.\!\!\cdot\, x)\beta y(\beta \,.\!\!\cdot\, y) = (y \,.\!\!\cdot\, x)\beta ,$$

$$x \,.\!\!\cdot\, y \geqslant (\beta^{-1} \,.\!\!\cdot\, y)(x \,.\!\!\cdot\, \beta^{-1}) \geqslant (\beta^{-1} \,.\!\!\cdot\, y)\beta x ,$$

donc

$$(x \,.\!\!\cdot\, y)[\beta \,.\!\!\cdot\, (x \,.\!\!\cdot\, y)] \geqslant (\beta^{-1} \,.\!\!\cdot\, y)\beta x(\beta \,.\!\!\cdot\, x)\beta y \beta = (\beta^{-1} \,.\!\!\cdot\, y)\beta y \beta = (\beta \,.\!\!\cdot\, \beta y)\beta y \beta = \beta ,$$

finalement $(x \,.\!\!\cdot\, y)[\beta \,.\!\!\cdot\, (x \,.\!\!\cdot\, y)] = \beta$. De même, $[\beta \cdot\!\!. \, (x \,.\!\!\cdot\, y)](x \,.\!\!\cdot\, y) = \beta$. Par ailleurs,

$$\beta^{-1} = (y \,.\!\!\cdot\, y) \cdot\!\!. \, \beta \leqslant [(x \,.\!\!\cdot\, y) \cdot\!\!. \, (x \,.\!\!\cdot\, y)] \cdot\!\!. \, \beta \leqslant \beta^{-1} .$$

Même étude pour $x \cdot\!\!. \, y$.

(b) Si $x , y \in \Lambda_\beta$, $xy \in \Lambda_\beta$.
On a $(\beta \,.\!\!\cdot\, x) \,.\!\!\cdot\, y \geqslant (\beta \,.\!\!\cdot\, y)(\beta \,.\!\!\cdot\, x\beta)$, d'où

$$xy(\beta \,.\!\!\cdot\, xy) \geqslant xy(\beta \,.\!\!\cdot\, y)(\beta \,.\!\!\cdot\, x\beta) = x\beta(\beta \,.\!\!\cdot\, x\beta) = \beta .$$

Donc, $xy(\beta \,.\!\!\cdot\, xy) = \beta$. De même, $(\beta \cdot\!\!. \, xy)xy = \beta$. Par ailleurs,

$$\beta^{-1} = (y \,.\!\!\cdot\, y) \,.\!\!\cdot\, \beta \leqslant (xy \,.\!\!\cdot\, xy) \,.\!\!\cdot\, \beta \leqslant \beta^{-1} ,$$

d'où $xy \in \Lambda_\beta$.

THÉORÈME 4.1. - <u>Il y a bijection entre l'ensemble des ordres-</u>$\mathcal{B}$ <u>et l'ensemble des sous-monoïdes de</u> G B-<u>nomalement clos maximaux</u>.

Remarquons que β^{-1} est un ordre-$\mathfrak{A}$, car $\beta^{-1} \mathbin{.\!^{\cdot}} \beta^{-1} = \beta^{-1} \mathbin{^{\cdot}\!.} \beta^{-1} = \beta^{-1}$. C'est de plus l'élément bimaximum de Λ_β (voir lemme 4.1). Donc, Λ_β est un sous-monoïde nomalement clos d'élément bimaximum β^{-1} , c'est-à-dire qu'il est contenu dans $\Gamma_{\beta^{-1}}$.

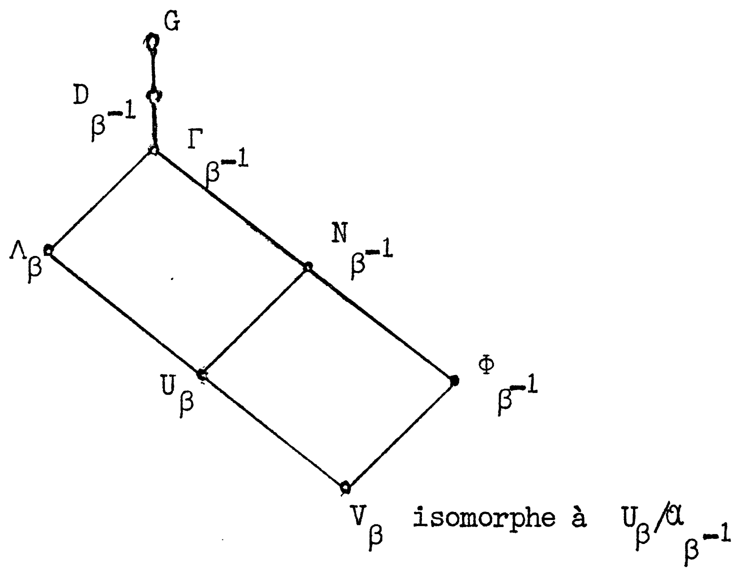
Notons U_β l'ensemble des $x \in \Lambda_\beta$ tel que $x \mathbin{.\!^{\cdot}} x = x \mathbin{^{\cdot}\!.} x = \beta^{-1}$; U_β n'est pas vide, car il contient au moins β . Comme Λ_β est nomalement clos, U_β est le sous-monoïde intégralement clos maximal contenu dans Λ_β ; or, pour tout $x \in U_\beta$,

$$x(\beta \mathbin{.\!^{\cdot}} x) = (\beta \mathbin{^{\cdot}\!.} x)x = \beta \;;$$

donc U_β est B-totalement clos, soit finalement B-intégralement clos. Evidemment, $U_\beta \subseteq N_{\beta^{-1}}$. On peut énoncer :

THÉORÈME 4.2. - <u>Tout sous-monoïde</u> B-<u>nomalement clos associé à un ordre</u>-$\mathfrak{B}$ <u>contient un sous-monoïde</u> B-<u>intégralement clos</u>.

On a donc le diagramme d'inclusion suivant correspondant à un ordre-$\mathfrak{B}$.



5. Sous-monoïdes clos d'un monoïde résidué unitaire.

Soit G un monoïde résidué unitaire. On notera e l'élément unité.

LEMME 5.1. - <u>Si</u> G <u>est un monoïde résidué unitaire, les ordres à gauche et à droite sont les seuls idempotents entiers (c'est-à-dire</u> $\geqslant e$).

Posons $z = y \mathbin{^{\cdot}\!.} y$. D'une part, $e \leqslant ey \mathbin{^{\cdot}\!.} y = z$ entraîne $z \leqslant z^2$. D'autre part, $zy \leqslant y$ entraîne $z^2 y \leqslant zy \leqslant y$, d'où $z^2 \leqslant y \mathbin{^{\cdot}\!.} y = z$. Donc, $z^2 = z$. On montrerait de même que $z' = y \mathbin{.\!^{\cdot}} y$ est un idempotent.

Si u est un idempotent et $u \geqslant e$, $u \leqslant u^2 \cdot\!\!\cdot\, u = u \cdot\!\!\cdot\, u$, or $e \leqslant e$ entraîne

$$u \cdot\!\!\cdot\, u \leqslant u \cdot\!\!\cdot\, e = (u \cdot\!\!\cdot\, e)e \leqslant u ,$$

d'où $u = u \cdot\!\!\cdot\, u$.

On rappelle que dans un monoïde résidué unitaire :

$$e \leqslant x \cdot\!\!\cdot\, x \ ; \quad e \leqslant x \,.\!\cdot\, x$$

$$x \,.\!\cdot\, (x \cdot\!\!\cdot\, x) = x = x \,.\!\cdot\, e \qquad \text{quel que soit } x \in G$$

$$x \cdot\!\!\cdot\, (x \,.\!\cdot\, x) = x = x \cdot\!\!\cdot\, e$$

de sous-monoïde nomalement clos Γ_e associé à l'élément unité e sera défini par

$$\Gamma_e = \{x \in G \ ; \ (e \,.\!\cdot\, x) \cdot\!\!\cdot\, (e \,.\!\cdot\, x) = (e \cdot\!\!\cdot\, x) \,.\!\cdot\, (e \cdot\!\!\cdot\, x) = e\} ,$$

car $e \,.\!\cdot\, (x \,.\!\cdot\, e) = e \,.\!\cdot\, x$ et $e \cdot\!\!\cdot\, (x \cdot\!\!\cdot\, e) = e \cdot\!\!\cdot\, x$.

Mais $e \leqslant x \,.\!\cdot\, x$ et $e \leqslant x \cdot\!\!\cdot\, x$, quel que soit x , entraîne $x \cdot\!\!\cdot\, x = x \,.\!\cdot\, x = e$ pour tout $x \in \Gamma_e$, donc $D_e = \Gamma_e = N_e$. Ainsi, D_e est un monoïde unitaire intégralement clos ; c'est même un sous-groupe de G , puisque e est un ordre-ß [3].

Soit u un idempotent entier de G . On notera I_u l'ensemble des $x \in G$ vérifiant les relations : il existe p et $q \in G$ tel que $x = p \,.\!\cdot\, u = q \cdot\!\!\cdot\, u$; I_u n'est pas vide, puisque $u \in I_u$.

LEMME 5.3. - <u>Un élément</u> x <u>appartient à</u> I_u <u>si, et seulement si,</u> $xu = ux = x$.

$xu = x$ entraîne d'une part $x \leqslant xu \cdot\!\!\cdot\, u = x \cdot\!\!\cdot\, u$; d'autre part, $e \leqslant u$ implique $x \cdot\!\!\cdot\, u \leqslant x \cdot\!\!\cdot\, e = x$, d'où $x = x \cdot\!\!\cdot\, u$. De même $ux = x$ entraîne $x = x \,.\!\cdot\, u$, et donc $x \in I_u$.

Réciproquement, si $x = q \cdot\!\!\cdot\, u$, on a $x \cdot\!\!\cdot\, u = q \cdot\!\!\cdot\, u^2 = q \cdot\!\!\cdot\, u = x$, d'où

$$xu = (x \cdot\!\!\cdot\, u)u \leqslant x .$$

Mais $e \leqslant u$ entraîne $x \leqslant xu$, d'où $xu = x$. De même, $x = p \,.\!\cdot\, u$ entraîne $ux = x$.

LEMME 5.3. - I_u <u>est un sous-monoïde résidué unitaire de</u> G , <u>semi-réticulé ou réticulé en même temps que</u> G .

Si x et y sont des éléments de I_u , $ux = x$ entraîne $uxy = xy$. De même $yu = y$ entraîne $xyu = xy$, donc, d'après le lemme ci-dessus, $xy \in I_u$.

$ux = x$ entraîne $y \cdot\!\!\cdot\, x = y \cdot\!\!\cdot\, ux = (y \cdot\!\!\cdot\, x) \cdot\!\!\cdot\, u$. De plus, $y = q' \,.\!\cdot\, u$, d'où $y \cdot\!\!\cdot\, x = (q' \,.\!\cdot\, u) \cdot\!\!\cdot\, x = (q' \cdot\!\!\cdot\, x) \,.\!\cdot\, u$, donc $y \cdot\!\!\cdot\, x \in I_u$. Même étude pour $y \mathbin{.\!^{\bullet}} x$.

Si G est semi-réticulé supérieurement,

$$u(x \vee y) = ux \vee uy = x \vee y \qquad \text{et} \qquad (x \vee y)u = xu \vee yu = x \vee y ,$$

donc $x \vee y \in I_u$.

Si G est réticulé,

$$u(x \wedge y) \leqslant ux \wedge uy = x \wedge y ,$$

et d'autre part $e \leqslant u$ entraîne

$$x \wedge y \leqslant u(x \wedge y) .$$

On peut finalement énoncer :

THÉORÈME 5.1. - Il y a bijection entre l'ensemble des idempotents entiers et l'ensemble des sous-monoïdes résidués unitaires maximaux.

Nécessairement, si u est élément neutre d'un sous-monoïde unitaire de G , on a $u^2 = u$ et $u \mathbin{^{\bullet}\!.} u = u \mathbin{.\!^{\bullet}} u = u$, donc u est un idempotent entier.

THÉORÈME 5.2. - Un monoïde unitaire totalement clos ne contient qu'un seul sous-monoïde unitaire intégralement clos maximal ; en particulier, $N_\varepsilon = I_\varepsilon$ (ε élément bimaximum).

Si le monoïde unitaire G est totalement clos, son élément bimaximum est le plus grand idempotent entier, donc I_ε est un monoïde résidué totalement clos dont l'élément bimaximum ε est aussi élément unité ; c'est-à-dire que I_ε est un sous-monoïde unitaire intégralement clos maximal.

Supposons maintenant l'existence d'un autre sous-monoïde unitaire intégralement clos T d'élément unité ε^* . Si $x \in T$,

$$e \leqslant x \mathbin{.\!^{\bullet}} x = x \mathbin{^{\bullet}\!.} x = \varepsilon^* \leqslant \varepsilon ,$$

donc ε^* est un idempotent entier et $T \subseteq I_{\varepsilon^*}$. Par ailleurs, $e \leqslant \varepsilon^* \leqslant \varepsilon$ entraîne $\varepsilon \leqslant \varepsilon^* \varepsilon \leqslant \varepsilon^2 \leqslant \varepsilon$ et $\varepsilon^* \varepsilon = \varepsilon\varepsilon^* = \varepsilon$, donc, d'après le lemme 5.1,

$$\varepsilon \in I_{\varepsilon^*} .$$

Il en résulte que $\varepsilon \mathbin{.\!^{\bullet}} \varepsilon = \varepsilon^* = \varepsilon$ et $I_{\varepsilon^*} = I_\varepsilon$. Si T est maximal, $T = I_\varepsilon$.

Le sous-monoïde nomalement clos Γ_ε associé à l'élément bimaximum ε contient un monoïde intégralement clos maximal.

$$N_\varepsilon = \{x \in \Gamma_\varepsilon ;\ \ x \mathbin{^{\bullet}\!.} x = x \mathbin{.\!^{\bullet}} x = \varepsilon\} ,$$

Or, puisque G est unitaire, ε est un idempotent, et si $x = p \mathbin{.^{\cdot}} \varepsilon = q \mathbin{^{\cdot}.} \varepsilon$ est un élément de I_ε, on a

$$\varepsilon : [(p \mathbin{.^{\cdot}} \varepsilon) \mathbin{.^{\cdot}} \varepsilon] = \varepsilon : [(q \mathbin{^{\cdot}.} \varepsilon) \mathbin{^{\cdot}.} \varepsilon] = \varepsilon : x ,$$

donc $x \in \Gamma_\varepsilon$. Il en résulte que $I_\varepsilon = N_\varepsilon$, puisque le monoïde unitaire nomalement clos Γ_ε ne peut contenir qu'un seul sous-monoïde unitaire intégralement clos maximal.

Considérons maintenant un monoïde résidué unitaire quelconque G. Soit u un idempotent entier. Les résultats précédents nous permettent de considérer les sous-monoïdes résidués suivants :

(a) $\quad I_u = \{x \; ; \text{ il existe } p \text{ et } q \in G \text{ tel que } x = p \mathbin{.^{\cdot}} u = q \mathbin{^{\cdot}.} u\}$;

I_u étant unitaire (d'élément unité u), contient un sous-monoïde Γ_u^* unitaire intégralement clos maximal dans I_u,

(b) $\quad \Gamma_u^* = N_u^* = \{x \in I_u \; ; \; (u \mathbin{^{\cdot}.} x) \mathbin{.^{\cdot}} (u \mathbin{^{\cdot}.} x) = (u \mathbin{.^{\cdot}} x) \mathbin{^{\cdot}.} (u \mathbin{.^{\cdot}} x) = u\}$.

Par ailleurs, u étant ordre-$\mathfrak{A}$ de G, on peut lui associer un monoïde nomalement clos maximal dans G,

(c) $$\Gamma_u = \left\{ x \in G \; ; \; (u \mathbin{.^{\cdot}} x) \mathbin{^{\cdot}.} (u \mathbin{.^{\cdot}} x) = (u \mathbin{^{\cdot}.} x) \mathbin{.^{\cdot}} (u \mathbin{^{\cdot}.} x) = u \; ; \; \begin{matrix} u \mathbin{^{\cdot}.} (x \mathbin{^{\cdot}.} u) = u \mathbin{.^{\cdot}} x \\ u \mathbin{.^{\cdot}} (x \mathbin{.^{\cdot}} u) = u \mathbin{^{\cdot}.} x \end{matrix} \right\} ;$$

Γ_u contient un monoïde intégralement clos maximal dans Γ_u :

(d) $$N_u = \{x \in \Gamma_u \; ; \; x \mathbin{^{\cdot}.} x = x \mathbin{.^{\cdot}} x = u\} .$$

Si $x \in N_u$, G étant unitaire, on a

$$x \mathbin{.^{\cdot}} (x \mathbin{^{\cdot}.} x) = x \mathbin{^{\cdot}.} (x \mathbin{.^{\cdot}} x) = x = x \mathbin{.^{\cdot}} u = x \mathbin{^{\cdot}.} u ,$$

donc $x \in I_u$, puis $x \in N_u^*$, d'où $N_u \subseteq N_u^*$. D'autre part, si $x \in N_u^*$,

$$u \mathbin{^{\cdot}.} [(q \mathbin{^{\cdot}.} u) \mathbin{^{\cdot}.} u] = u \mathbin{^{\cdot}.} (q \mathbin{^{\cdot}.} u^2) = u \mathbin{^{\cdot}.} (q \mathbin{^{\cdot}.} u)$$

$$u \mathbin{.^{\cdot}} [(p \mathbin{.^{\cdot}} u) \mathbin{.^{\cdot}} u] = u \mathbin{.^{\cdot}} (p \mathbin{.^{\cdot}} u^2) = u \mathbin{.^{\cdot}} (p \mathbin{.^{\cdot}} u) ,$$

donc $x \in \Gamma_u$ et $N_u^* \subseteq \Gamma_u$. Comme N_u est un monoïde intégralement clos maximal dans Γ_u, il en résulte $N_u^* = N_u$.

On notera qu'un monoïde résidué unitaire ne peut contenir que des monoïdes intégralement clos unitaires.

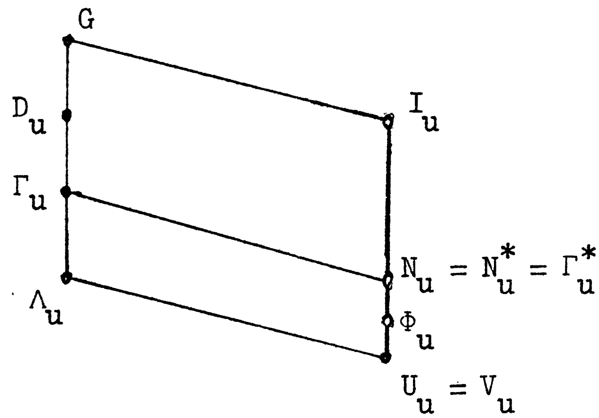
Notons enfin que tout idempotent entier est ordre-$\mathfrak{B}$, ce qui permet d'introduire

Λ_u sous-monoïde B-nomalement clos maximal, puis U_u sous-monoïde B-intégralement clos maximal qui est un groupe puisque u élément unité est aussi B-élément. C'est un groupe compatible d'ailleurs avec la structure résidué du monoïde G. Convenons d'appeler G-groupe un groupe qui est aussi sous-monoïde résidué de G. On peut donc énoncer :

THÉORÈME 5.3. - Il y a bijection entre l'ensemble des idempotents entiers et l'ensemble des G-groupes maximaux.

Remarquons que U_u est un sous-groupe de Φ_u. En effet, pour les éléments de U_u, la α_u-multiplication [3] est réduite à la multiplication dans G.

On a finalement le diagramme d'inclusion général suivant associé à un idempotent quelconque entier u.



Cas particuliers.

1° $u = e$:

$$G = I_e$$

$$D_e = \Gamma_e = N_e = \Lambda_e = \Phi_e = U_e$$

2° $u = \varepsilon$: ε élément bimaximum, c'est-à-dire G totalement clos

$$G = D_\varepsilon$$

$$\Gamma_\varepsilon = N_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon = \Phi_\varepsilon = U_\varepsilon = I_\varepsilon$$

3° $u = \beta$: β B-élément, c'est-à-dire G B-totalement clos

$$\begin{array}{c} G = \Lambda_\beta = \Gamma_\beta \\ | \\ I_\beta = N_\beta = U_\beta = \Phi_\beta \end{array}$$

6. Exemples.

(A). - Soit E un groupe ordonné. Soit E_+ le cône positif. On convient d'appeler E_+-complexes les complexes X vérifiant les conditions :

$$E_+ : X \ , \quad X \ ^{\bullet}. \ E_+ \ , \quad X \ .^{\bullet} \ E_+ \quad \text{et} \quad (X \ .^{\bullet} \ E_+) \ ^{\bullet}. \ E_+ \quad \text{sont des complexes.}$$

On démontre que l'ensemble L_{E_+} des E_+-complexes est un sous-monoïde résidué de P_E, monoïde des parties de E.

Notons $[X] = M(m(X))$ le majeur engendré par $X \in P_E$, et M_{E_+} l'ensemble des majeurs $\neq \emptyset$. On démontre que les majeurs non vides de E sont engendrés par des E_+-complexes, et que l'application $X \to [X]$ de L_{E_+} sur M_{E_+} est la fermeture de type α associée à E_+ ; M_{E_+} est l'ensemble des fermés. On définit donc une multiplication des majeurs

$$[X] \circ [Y] = [XY] \ .$$

Si M_{E_+} est un groupe pour cette multiplication, E est dit totalement clos. Ceci revient à dire que L_{E_+} est un sous-monoïde totalement clos de P_E. Mais E_+ est un idempotent entier, donc un ordre-$\mathfrak{a}$. On peut donc lui associer D_{E_+} sous-monoïde quasi-clos maximal de P_E,

$$D_{E_+} = \{X \in P_E \ ; \ (E_+ : X) \ .^{\bullet} \ (E_+ : X) = (E_+ : X) \ ^{\bullet}. \ (E_+ : X) = E_+\} \ .$$

Etablissons que D_{E_+} est contenu dans L_{E_+}.

Si $E_+ : X = \emptyset$, alors $\emptyset \ .^{\bullet} \ \emptyset = E = E_+$, ce qui est banal.

Si $X \ ^{\bullet}. \ E_+ = \emptyset$, alors $(X \ .^{\bullet} \ X) \ ^{\bullet}. E_+ = \emptyset \ .^{\bullet} \ X = E$, or $X \ .^{\bullet} \ X \subset E_+$, d'où $E \subset E_+$, ce qui est impossible.

Si $(X \ ^{\bullet}. \ E_+) \ .^{\bullet} \ E_+ = \emptyset$, on a de même $(X \ ^{\bullet}. \ E_+ X) \ .^{\bullet} \ E_+ = E$, d'où $E \subset E_+$.

Donc, si L_{E_+} est totalement clos, donc quasi-clos, puisque D_{E_+} est un sous-monoïde quasi clos maximal,

$$D_{E_+} = L_{E_+} \ .$$

On sait que E peut être immergé dans M_{E_+} , qui est conditionnellement complet, avec conservation du inf et du sup , si et seulement si E est totalement clos.

Ce plongement est-il unique ?

On pourra toujours se ramener au cas des cônes positifs maximaux. Si ces cônes soht aussi des monoïdes ordres maximaux de P_E , alors le plongement est unique.

(B). - Soit A un ordre d'un corps K ; K est évidemment un A-module. Un A-sous-module I de K est appelé idéal fractionnaire de A s'il existe $d \neq 0 \in A$ tel que $dI \subset A$.

Notons $L(A)$ le sous-monoïde résidué des A-complexes de P_K , et $F(A)$ l'ensemble des idéaux fractionnaires de A . L'application φ : $L(A) \to F(A)$ telle que

$$\varphi(X) = X^* = \{\sum_i a_i x_i \ ; \ a_i \in A \ ; \ x_i \in X\}$$

est une application de fermeture dans $L(A)$ dont les fermés sont les idéaux fractionnaires. L'équivalence de fermeture associée est régulière. On peut donc définir une multiplication des idéaux fractionnaires

$$X^* \circ Y^* = (XY)^*;$$

$F(A)$ est alors un monoïde résidué unitaire dont la résiduation définie à partir de cette multiplication coïncide avec celle définie à partir de la multiplication des complexes dans $L(A)$.

Si le monoïde résidué unitaire $F(A)$ est intégralement clos, l'anneau A est dit <u>complètement intégralement clos</u>.

Si le monoïde résidué $L(A)$ est totalement clos, l'anneau A est dit <u>anneau de Dedekind</u>. Mais A est un idempotent entier, donc un ordre-$\mathfrak{A}$ de P_K . On peut lui associer D_A sous-monoïde quasi clos maximal de P_K ,

$$D_A = \{X \in P_K \ ; \ (A : X) : (A : X) = A\} .$$

On peut montrer que D_A est contenu dans $L(A)$, donc lui est égal, c'est-à-dire que, si A est un anneau de Dedekind, $L(A)$ est un sous-monoïde totalement clos maximal de P_K .

(C). - Soient R un anneau d'intégrité, K son corps des quotients, Σ une algèbre de dimension finie sur K , et G l'ensemble des réseaux de Σ . On définit sur G une structure de monoïde résidué, en posant, pour des éléments X, Y de G,

$$X.Y = \{\sum x_i y_i \ ; \ x_i \in X \ ; \ y_i \in Y\}$$

$$X \overset{\bullet}{.} Y = \{m \in \Sigma \ ; \ mY \subseteq X\}$$

$$X \ .^{\bullet}\ Y = \{m \in \Sigma \ ; \ Ym \subseteq X\} \quad .$$

Un ordre Ω de Σ est un sous-anneau de Σ, appartenant à G ; Ω est maximal s'il n'est contenu dans aucun ordre. On a évidemment $\Omega^2 \subseteq \Omega$, donc un ordre maximal de Σ est aussi un ordre maximal du monoïde résidué G.

Soit Ω un ordre maximal de Σ. L'ensemble

$$N_\Omega = \{X \in G \ ; \ X \overset{\bullet}{.} X = X \ .^{\bullet}\ X = \Omega\}$$

est un sous-monoïde de G intégralement clos, et l'ensemble

$$\Phi_\Omega = \{X^{-1} \ ; \ X \in N_\Omega\}$$

est un groupe pour la loi $X^{-1} \circ Y^{-1} = (YX)^{-1}$.

Ainsi peut-on associer à chaque ordre maximal un groupe. Pour deux ordres maximaux distincts, les groupes sont isomorphes. Si Ω est un R-module noethérien, Φ_Ω est un groupe commutatif [3] (chapitre II, section 3).

Un R-module A est dit réflexif si l'homomorphisme canonique de A dans son bidual A^{**} est un isomorphisme. Soit X un élément de G. Tout $f \in X^*$ admet alors une extension unique, élément de $\mathrm{Hom}_K(\Sigma, K)$, ce qui permet d'identifier le bidual X^{**} de X avec un réseau réflexif de Σ. Dans ces conditions, l'application $\varphi : G \to G$ tel que $\varphi(X) = X^{**}$ est une application de fermeture dont l'ensemble F des réseaux réflexifs de G est l'ensemble des fermés. L'équivalence de fermeture $\mathcal{H}_\varphi$ associée à φ est régulière pour la multiplication dans G, ce qui permet de définir dans F une structure de monoïde en posant

$$X \top Y = (XY)^{**} .$$

La résiduation définie à partir de cette opération coïncide avec la résiduation dans G.

Supposons dorénavant R noethérien et intégralement clos, et Σ séparable sur K. Soient

$$F_\Omega = F \cap N_\Omega ,$$

et $\mathcal{H}'_\varphi$ la restriction de $\mathcal{H}_\varphi$ à N_Ω. Si $X \in F_\Omega$, d'une part

$$X \top X^{-1} = X^{-1} \top X = \Omega ,$$

d'autre part

$$(X^{-1})^{-1} = X .$$

Donc $\mathcal{H}'_\varphi$ est l'équivalence $\mathfrak{a}$-nomale $\mathfrak{a}_\Omega$ dans N_Ω , et $F_\Omega = \Phi_\Omega$, c'est-à-dire que X^{-1} est un réseau réflexif si $X \in N_\Omega$ [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUBREIL-JACOTIN (Marie-Louise). - Sur les images homomorphes d'un demi-groupe ordonné, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 101-115.

[2] GOLDMAN (Oscar). - Quasi-egality in maximal orders, J. Math. Soc. Japan, t. 13, 1961, p. 371-376.

[3] QUERRÉ (Julien). - Contribution à la théorie des structures ordonnées et des systèmes d'idéaux, Annali di Mat. pura ed appl., Série 4, t. 66, 1964, p. 265-389 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).