Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Michel Mendès France

Un ensemble de nombres non normaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, nº 1 (1964-1965), exp. nº 2, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_1_A2_0>

UN ENSEMBLE DE NOMBRES NON NORMAUX

par Michel MENDÈS FRANCE

1. Définitions.

Soit $x \in (0 , 1)$ un nombre différent de $a/2^b$ (a , b entiers non négatifs). Il lui correspond alors un développement binaire unique

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{2^n} \qquad \varepsilon_n(x) = 0 \quad \text{ou} \quad 1 .$$

Soit A_k un élément de $\{(0) , (1)\}^k$ (k entier $\geqslant 1$) . Soit p un entier positif $\geqslant k$. $N(x , p , A_k)$ désigne le nombre de fois qu'apparait la suite A_k dans la suite finie $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x)$, ... , $\varepsilon_p(x)$. Le nombre x est dit <u>normal</u> (dans la base 2) si, pour tout k entier $\geqslant 1$ et pour toute suite $A_k \in \{(0) , (1)\}^k$, on a

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} N(x , p , A_k) = \frac{1}{2^k} .$$

En introduisant la suite de Rademacher $r_n(x) = 1 - 2\varepsilon_n(x)$, on obtient la caractérisation suivante [6] :

Le nombre x est normal si, et seulement si, pour toute suite finie d'entiers $0 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_s$, on a

$$(1) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} r_{n+k_1}(x)\, r_{n+k_2}(x) \dots r_{n+k_s}(x) = 0 .$$

2. L'ensemble E .

E désigne l'ensemble des nombres $x \in (0 , 1)$ qui ont la propriété suivante : il existe un polynôme réel φ tel que $r_n(x) = \exp i\pi[\varphi(n)]$, $n \in \mathbb{N}$, ($[t]$ représente la partie entière du nombre réel t). Nous nous proposons d'établir le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - <u>L'ensemble</u> E <u>ne contient aucun nombre normal</u>.

Il s'ensuit que E est de mesure nulle. On peut se demander si E contient "presque tous" (la signification de ceci est précisée ci-dessous) les nombres non normaux. On répond à la question en termes de dimension de Hausdorff ($\dim_h$) :

THÉORÈME 2. - La dimension de Hausdorff de l'ensemble E est 0, alors que celle de l'ensemble V des nombres non normaux est 1.

La démonstration du théorème 2 nous permettra d'énoncer le corollaire suivant :

COROLLAIRE. - L'ensemble E est un ensemble d'unicité (au sens strict) pour les séries trigonométriques alors que l'ensemble V est ensemble de multiplicité.

Remarque. - Il se peut que l'ensemble V soit un ensemble d'unicité au sens large : le problème reste ouvert. Il a été abordé par PJATECKIJ-ŠAPIRO [9] d'une part, et par KAHANE et SALEM [5] d'autre part.

3. Esquisse de la démonstration du théorème 1.

On se sert de la caractérisation (1). Soit $x \in E$. Il existe donc un polynôme φ tel que

$$r_n(x) = \exp i\pi[\varphi(n)] , \qquad n = 1 , 2 , \ldots .$$

Soit ν le degré de φ. On forme la quantité

$$L = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} r_n(x)(r_{n+1}(x))^{C_\nu^1} \ldots (r_{n+\nu}(x))^{C_\nu^\nu}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp i\pi(C_\nu^\nu[\varphi(n+\nu)] - C_\nu^{\nu-1}[\varphi(n+\nu-1)] + \ldots + (-1)^\nu[\varphi(n)]) .$$

On montre ensuite que L a une valeur voisine de

$$L' = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp i\pi[C_\nu^\nu \varphi(n+\nu) - C_\nu^{\nu-1} \varphi(n+\nu-1) + \ldots + (-1)^\nu \varphi(n)] .$$

Or $C_\nu^\nu \varphi(n+\nu) - C_\nu^{\nu-1} \varphi(n+\nu-1) + \ldots + (-1)^\nu \varphi(n)$ est une quantité indépendante de n. On en conclut que $|L'| = 1$, puis que $L \neq 0$. La caractérisation (1) montre alors que x n'est pas normal (détail de la démonstration dans [7]).

4. Démonstration du théorème 2.

Il est connu que l'ensemble V des nombres non normaux est de dimension de Hausdorff égale à 1 ([2] ou [3]). Toutefois on donne ici une démonstration de ce résultat, plus rapide, mais moins générale, que celle qui se trouve dans les articles cités.

Soit k un entier $\geqslant 2$. Appelons C_k l'ensemble des $x \in (0, 1)$ tels que $r_{nk}(x) = +1$, $n \in \underset{\sim}{N}$. C_k est un ensemble de Cantor à dissection constante [4], et dont la dimension de Hausdorff est $1 - \frac{1}{k}$. D'autre part, on peut montrer que si x est normal, il en est de même du nombre y défini par $r_n(y) = r_{nk}(x)$, $n \in \underset{\sim}{N}$. On en conclut que $C_k \subset V$, donc que

$$\dim_h(V) \geqslant 1 - \frac{1}{k} .$$

Le raisonnement est vrai pour tout $k \geqslant 2$, donc

$$\dim_h(V) = 1 .$$

Pour établir que $\dim_h(E) = 0$, nous aurons besoin de quatre lemmes.

LEMME 1. - <u>Soient</u> A^0, A^1, ... <u>une suite infinie dénombrable d'ensembles ayant pour dimension de Hausdorff</u> 0 . <u>L'ensemble</u> $\bigcup_0^\infty A^\nu$ <u>a pour dimension de Hausdorff</u> 0 .

Nous admettons ce lemme facile à démontrer.

Soit E^ν l'ensemble des $x \in (0, 1)$ tels qu'il existe un polynôme réel de degré $\leqslant \nu$, vérifiant

$$r_n(x) = \exp i\pi[\varphi(n)] , \qquad n \in \underset{\sim}{N} .$$

Il est évident que

$$E = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} E^\nu .$$

D'après le lemme 1, le théorème 2 sera donc conséquence du lemme suivant.

LEMME 2. - <u>La dimension de Hausdorff de</u> E^ν <u>est nulle pour chaque</u> $\nu \in \underset{\sim}{N}$.

Soit $x \in E^\nu$. Il existe donc un polynôme φ tel que $r_n(x) = \exp i\pi[\varphi(n)]$, $n = 1, 2, \ldots$. Soit donc

$$\varphi(n) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_\nu n^\nu .$$

Comme φ n'intervient que par $[\varphi(n)]$ (mod 2), on peut sans perte de généralité supposer que le point $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ appartient à l'espace $[0, 2[^{\nu+1}$. Soit $N_\nu(p)$ le nombre de régions de l'espace $[0, 2[^{\nu+1}$ qui ont la propriété suivante : Quand α parcourt l'une quelconque de ces régions, la suite

$$[\varphi(1)] , [\varphi(2)] , \ldots , [\varphi(p)]$$

reste invariante.

Avant d'établir le lemme 2, nous devons encore démontrer deux lemmes.

LEMME 3. - <u>La mesure</u> <u>h-dimensionnelle</u> $(0 \leqslant h \leqslant 1)$ <u>de l'ensemble</u>

$E_p^\nu = \{x \mid r_n(x) = \exp i\pi[\varphi(n)]\ ;\quad n = 1\ ,\ 2\ ,\dots,\ p\ ;\ \varphi$ polynôme, degré de $\varphi \leqslant \nu\}$

<u>vérifie l'inégalité</u>

$$\mathrm{mes}_h(E_p^\nu) \leqslant \frac{N_\nu(p)}{2^{ph}} .$$

<u>Démonstration</u>. - En effet, quand φ parcourt l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant \nu$, à coefficients dans $[0\ ,\ 2[$, le point α décrit l'espace $[0\ ,\ 2[^{\nu+1}$. On voit ainsi que E_p^ν est composé au plus de $N_\nu(p)$ intervalles, la longueur de chacun d'eux étant $\frac{1}{2^p}$.

C. Q. F. D.

De l'égalité $E^\nu = \bigcap_{p=1}^{\infty} E_p^\nu$, on déduit que la dimension de Hausdorff de E^ν ne peut dépasser le nombre

$$\delta = \liminf_{p\to\infty} \frac{N_\nu(p)}{p \log 2} .$$

Le lemme 2 sera alors conséquence de l'égalité $\delta = 0$, laquelle découle du lemme suivant.

LEMME 4. - <u>Quand</u> p <u>croit indéfiniment, on a</u>

$$N_p(\nu) = O(p^{(\nu+1)^2}) .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit q_n un entier tel que $0 \leqslant q_n < 2(1 + n + \dots + n^\nu)$. On fixe n , et soit ρ_{n,q_n} le sous-ensemble de $[0\ ,\ 2[^{\nu+1}$ défini par la double inégalité

$$q_n \leqslant \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_\nu n^\nu < q_n + 1 .$$

Il est clair que lorsque $\alpha = (\alpha_0\ ,\ \alpha_1\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_\nu)$ parcourt ρ_{n,q_n} , la quantité $[\varphi(n)] = [\alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_\nu n^\nu]$ ne change pas et reste égal à q_n . Soit alors $q_1\ ,\ q_2\ ,\ \dots\ ,\ q_p$ une suite d'entiers, chacun vérifiant la double inégalité

$$0 \leqslant q_n < 2(1 + n + \dots + n^\nu) , \qquad (n = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ p) .$$

Quand α parcourt $\bigcap_{n=1}^{p} \rho_{n,q_n}$ (ensemble supposé non vide), la suite

$$[\varphi(1)]\ ,\ [\varphi(2)]\ ,\ \dots\ ,\ [\varphi(p)]$$

reste invariante. Or le nombre $N_\nu(p)$ de telles régions est majoré par le nombre maximum de régions que l'on peut obtenir en découpant l'espace euclidien $\underset{\sim}{R}^{\nu+1}$ par les hyperplans

$$\alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_\nu n^\nu = q_n .$$

Leur nombre est lui-même majoré par

$$M = M_\nu(p) = \sum_{n=1}^{p} (2(1 + n + \dots + n^\nu) + 1) = O(p^{\nu+1}) .$$

Il est par ailleurs connu [8] que l'espace $\underset{\sim}{R}^{\nu+1}$ est partagé en $O(M^{\nu+1})$ régions par M hyperplans. Par suite,

$$N_\nu(p) = O((M_\nu(p))^{\nu+1}) = O(p^{(\nu+1)^2}$$

C. Q. F. D.

5. Conséquences.

De la démonstration des lemmes 3 et 4, il s'ensuit que l'ensemble E est ensemble d'unicité au sens strict pour les séries trigonométriques. En effet, la fermeture $\overline{E^\nu}$ de l'ensemble E^ν est invariante par la transformation $x \to \{2x\}$ (on a posé $\{t\} = t - [t]$). D'autre part, $\overline{E^\nu}$ est un sous-ensemble propre de l'intervalle $[0 , 1)$ comme le montrent les lemmes 3 et 4. Par suite, $\overline{E^\nu}$ est un ensemble H de Rajchman [4], donc ensemble d'unicité au sens strict. L'ensemble

$$E \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \overline{E^\nu}$$

est alors, lui aussi, ensemble d'unicité au sens strict.

D'un autre côté, il découle des résultats de PJATECKIJ-ŠAPIRO que l'ensemble V n'est pas un ensemble d'unicité au sens strict [9]. Cette remarque contribue à établir la différence qui existe entre les ensembles E et V .

Enfin, comme autre conséquence des lemmes 3 et 4, on peut remarquer que l'invariance de $\overline{E^\nu}$ par la transformation $x \to \{2x\}$ entraîne que, si $x \in E^\nu$, alors la suite $x.2^n$, $n = 1 , 2 , \dots$, n'est pas équirépartie (mod 1) . On peut montrer que cela implique que x n'est pas normal : on retrouve ainsi le théorème 1 comme corollaire des lemmes 3 et 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASS (Jean). - Fonctions pseudo-aléatoires et fonction de Wiener, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 1163-1165.

[2] BEYER (William A.). - Hausdorff dimension of level sets of some Rademacher series, Pacific J. of Math., t. 12, 1962, p. 35-46.

[3] ERDÖS (P.) and TAYLOR (S. J.). - On the set of points of convergence of a lacunary trigonometric series and the equidistribution properties of related sequences, Proc. London math. Soc., t. 7, 1957, p. 598-615.

[4] KAHANE (J.-P.) et SALEM (R.). - Ensembles parfaits et séries trigonométriques. - Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1301).

[5] KAHANE (J.-P.) and SALEM (R.). - Distribution modulo 1 and sets of uniqueness, Bull. Amer. math. Soc., t. 70, 1964, p. 259-261.

[6] MENDÈS FRANCE (Michel). - Nombres normaux et fonctions pseudo-aléatoires, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, p. 91-104.

[7] MENDÈS FRANCE (Michel). - A set of non-normal numbers, Pacific J. of Math. t. 15, 1965, p. 1165-1170.

[8] MOTZKIN (Theodore S.). - The probability of solvability of linear inequalities, Proceedings of the Second Symposium in linear programming [1955. Washington], Vol. 2, p. 607-611. - Washington, National Bureau of Standards, 1955.

[9] PJATECKIJ-ŠAPIRO (I. I.). - Sur le problème de l'unicité du développement d'une fonction en série trigonométrique (Supplément) [en russe], Moskovskij Gosudarstvennyj Universitet im M. V. Lomonosova, Učenye Zapiski, 165, Matematika 7, 1954, p. 79-97.