Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jacques Fort

Éléments injectifs (ou compléments) dans les treillis modulaires

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, nº 1 (1963-1964), exp. nº 5, p. 1-23

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_1_A4_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
17e année, 1963/64, n° 5

6 janvier 1964

ÉLÉMENTS INJECTIFS (OU COMPLÉMENTS) DANS LES TREILLIS MODULAIRES

par Jacques FORT

Nous nous proposons, dans ce travail, de définir une notion d'élément <u>injectif</u> dans un treillis (L) modulaire, $\cap$-continu et complet (pour ces définitions, voir [4]) ; nous nous sommes volontairement limités à la considération des seuls éléments de (L) et nous n'avons pas cherché à plonger (L) dans un treillis (L') plus riche en propriétés que (L) , ce qui est le cas, par exemple, du treillis des sous-modules d'un module M , lorsque M est plongé dans un module injectif. Nos définitions ont cependant été choisies de telle sorte qu'elles coïncident le plus souvent avec les définitions habituelles correspondantes, dans le cas particulier où (L) est le treillis des sous-modules d'un module <u>injectif</u>.

Le chapitre 1 rappelle ou précise quelques propriétés des treillis modulaires. Les chapitres 2 et 3 sont consacrés à l'étude des <u>extensions essentielles</u> d'un élément donné de (L) ; les éléments de (L) qui ne possèdent pas d'extension essentielle propre ont été appelés <u>injectifs</u>, bien qu'ils coïncident avec les éléments <u>compléments</u> de (L) (théorème 3.1) ; ces deux appellations sont maintenues afin de conserver l'analogie des énoncés des propriétés étudiées avec ceux des propriétés correspondantes que nous connaissons, touchant les modules.

Nous prouvons, au chapitre 4, l'existence "<u>d'enveloppes injectives</u>" d'un élément donné de (L) , qui sont caractérisées par des énoncés de même forme que ceux portant sur les enveloppes injectives d'un module (théorème 4.2), à l'exception cependant de leur unicité à un isomorphisme près.

Les éléments <u>injectifs extrémaux</u> de (L) sont étudiés au chapitre 5 ; leurs diverses caractérisations sont fondamentales pour l'étude des applications conduite au chapitre 6, et pour celle des éléments <u>isotypiques</u> de (L) (cette dernière étude fait l'objet de l'exposé n° 6 du 13 janvier 1964).

Chapitre 1

Similitude dans les treillis modulaires

1. Notations et définitions.

Les éléments du treillis (L) sont notés par des capitales d'imprimerie :

A , B , ... , X , ... L'union (borne supérieure) et l'intersection (borne inférieure) de (L) sont respectivement écrites $\cup$ et $\cap$. 0 et U sont l'élément nul et l'élément universel de (L) . La relation d'ordre $A \leq B$ dans (L) se lira indistinctement : A est inférieur ou égal à B , A est contenu (ou plongé) dans B , B contient A , B est une extension de A dans (L) .

On appelle <u>quotient</u> A/B le couple formé de deux éléments de (L) tels que $B \leq A$; au quotient A/B est associé le sous-treillis de (L) , ou <u>segment</u>, constitué de tous les éléments X de (L) tels que : $B \leq X \leq A$; ce segment sera noté aussi A/B ; pour l'ordre induit par celui de (L) , A/B est un treillis modulaire, $\cap$-continu et complet.

Deux quotients A/B et C/D sont dits <u>transposés</u> (cf. G. BIRKHOFF, [2], p. 72) si l'un des couples de conditions suivantes est réalisé :

(a) $B = A \cap D$ et $C = A \cup D$;

(b) $D = B \cap C$ et $A = B \cup C$.

Nous savons que, dans ces conditions, l'application $T \to T \cup D$ (resp. $T \to T \cap C$) réalise un isomorphisme des treillis A/B et C/D (cf. propriété 3, p. 63 de [5], ou le théorème 6, p. 73 de [2]). Dans le cas particulier du treillis des sous-groupes distingués stables d'un groupe à opérateurs, deux groupes quotients transposés A/B et C/D sont <u>isomorphes</u> (de façon naturelle) en tant que groupes à opérateurs (cf. par exemple le théorème 6, p. 83 du chapitre 1 de [3]).

Deux quotients A/B et C/D sont dits <u>semblables</u> (cf. O. ORE, [13], I, p. 430) ou projectifs (cf. G. BIRKHOFF, [2], p. 72) s'il existe une suite finie de quotients X_1/Y_1 , X_2/Y_2 , ... , X_n/Y_n , telle que deux quotients successifs soient transposés, et que $A/B = X_1/Y_1$, $C/D = X_n/Y_n$; les treillis A/B et C/D sont alors isomorphes.

2. Un théorème de similitude.

Dans la suite, il sera fait usage de la proposition suivante :

PROPOSITION 1.1. - <u>Soient</u> A , B , H , <u>trois éléments de</u> (L) <u>tels que</u>

$$H \cap A = H \cap B \quad (= N)$$

$$A_1 = (H \cup B) \cap A \qquad B_1 = (H \cup A) \cap B .$$

1° <u>Les quotients</u> A_1/N <u>et</u> B_1/N <u>sont semblables, et l'isomorphisme correspondant</u> : $T \to (T \cup H) \cap B$ <u>laisse invariant tous les éléments de</u> $(A \cap B)/N$.

2° Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

$$\text{(a)}\quad A_1 = A \cap B \,,$$

$$\text{(b)}\quad B_1 = A \cap B \,,$$

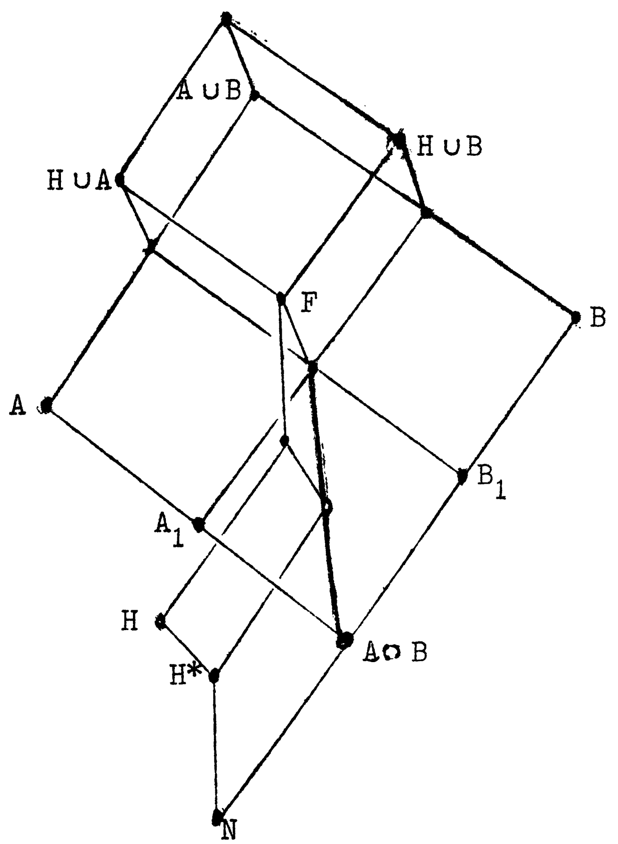
$$\text{(c)}\quad N = H \cap (A \cup B) \,.$$

Preuve. - Soit $F = (H \cup A) \cap (H \cup B)$.

1° A_1/N et F/H sont des quotients transposés car :

$$H \cap A_1 = H \cap (H \cup B) \cap A = H \cap A = N \,,$$

$$H \cup A_1 = H \cup [A \cap (H \cup B)] = (H \cup A) \cap (H \cup B) = F \,,$$



puisque (L) est modulaire ; $T \to T \cup H$ est l'isomorphisme associé à cette transposition. De même, les quotients F/H et B_1/N sont transposés, l'isomorphisme associé étant : $T \to T \cap B$ car

$$T \cap B_1 = T \cap (H \cup A) \cap B = T \cap B$$

lorsque $T \leqslant F$.

A_1/N et B_1/N sont donc semblables, l'isomorphisme associé

$$\sigma : T \to (T \cup H) \cap B$$

étant le composé des deux isomorphismes précédents.

σ laisse invariant tout élément Z de $(A \cap B)/N$; en effet, $Z \leqslant B$, $N = H \cap B \leqslant Z$, et la modularité de (L) entraînent

$$(Z \cup H) \cap B = Z \cup (H \cap B) = Z \,.$$

2° Montrons tout d'abord que l'élément $H' = H \cap (A \cup B)$ peut remplacer H dans les expressions définissant A_1 et B_1. Soit $T \leqslant A \cup B$,

$$(T \cup H') \cap A = \{T \cup [H \cap (A \cup B)]\} \cap A = (T \cup H) \cap (A \cup B) \cap A = (T \cup H) \cap A \,.$$

De même :

$$(T \cup H') \cap B = (T \cup H) \cap B \,.$$

Il suffit alors de faire respectivement $T = B$ et $T = A$ dans chacune des égalités précédentes pour obtenir :

$$A_1 = (H' \cup B) \cap A \qquad B_1 = (H' \cup A) \cap B .$$

Supposons maintenant que $A_1 = A \cap B$; (L) étant modulaire :

$$B = B \cup (A \cap B) = B \cup A_1 = B \cup [A \cap (B \cup H')] = (B \cup A) \cap (B \cup H') ,$$

mais $H' \leqslant A \cup B$.

$B = H' \cup [B \cap (A \cup B)] = H' \cup B$, ce qui entraîne :

$$H' = H' \cap B = H \cap (A \cup B) \cap B = H \cap B = N .$$

Inversement, supposons que $H' = N$, alors :

$$A_1 = (H' \cup B) \cap A = (N \cup B) \cap A = B \cap A .$$

L'équivalence des conditions (b) et (c) se démontre de la même manière.

3. Décompositions directes.

Rappelons les définitions et propriétés suivantes :

DÉFINITION 1.1 (cf. G. BIRKHOFF [2], p. 74 et 94). - Z étant un élément donné de (L) , un élément A de (L) est union directe sur Z des n éléments $A_1 , A_2 , \dots , A_n$ de (L) lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

1° $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

2° $A_1 , A_2 , \dots , A_n$ sont $\cup$-indépendants sur Z , c'est-à-dire :

$$\forall i , \quad A_i \cap (\bigcup_{\lambda \neq i} A_\lambda) = Z , \quad A_i \neq Z .$$

Lorsque $Z = 0$ (cas usuel), on écrit :

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i .$$

PROPOSITION 1.2 (cf. O. ORE [13], I, p. 435). - Pour que n éléments $A_1 , A_2 , \dots , A_n$ de (L) soient $\cup$-indépendants sur Z , il faut et il suffit que

$$A_i \neq Z \quad \text{et} \quad A_i \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{i-1}) = Z \qquad (i = 2 , 3 , \dots , n) .$$

COROLLAIRE 1.1. - Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $A_1 \cap A_2 = A_3 \cap (A_1 \cup A_2)$,

(b) $A_2 \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$,

(c) $A_3 \cap A_1 = A_2 \cap (A_3 \cup A_1)$.

Chapitre 2

Eléments injectifs de (L)

1. Extensions essentielles.

La notion d'extension essentielle d'un module introduite par ECKMANN et SCHOPF dans [6], s'étend sans modification aux éléments de (L) :

DÉFINITION 2.1. - L'élément B de (L) est extension essentielle de A dans (L) si $B \leq A$, et si, X étant un élément inférieur ou égal à B , la relation $A \cap X = 0$ implique $X = 0$.

De même, pour deux éléments B , A $(B \geq A)$ du quotient C/D , B est appelé extension essentielle de A dans C/D si

$$" X \leq B , \quad X \cap A = D " \quad \text{implique} \quad " X = D " .$$

Remarque. - Dans le treillis des sous-objets d'un objet d'une catégorie, R. DEHEUVELS définit un sous-objet épais E d'un objet C par la propriété :

$$H \text{ sous-objet de } C \text{ , et } H \cap E = 0 \Rightarrow H = 0 ,$$

ce qui équivaut à dire que C est extension essentielle de E , ou que E est élément essentiel du treillis des sous-objets (cf. définition 2.3 du chapitre 2).

Un couple $A \subset B$ de sous-objets de C est dit épais si A est épais dans B (ce qui signifie que B est extension essentielle de A dans C).

Lorsque le treillis des sous-objets de C satisfait à l'axiome :

Toute famille filtrante croissante (B_i) de sous-objets a une borne supérieure $\bigcup_i B_i$, et quel que soit le sous-objet H , on a ,

$$H \cap (\bigcup_i B_i) = \bigcup_i (H \cap B_i) .$$

Pour tout sous-objet A , il existe alors au moins un couple épais maximal $(A \subset B)$ (cf. le théorème 2.1 du chapitre 2) ; et il est ainsi possible d'introduire et d'étudier des sous-objets injectifs et des enveloppes injectives (R. DEHEUVELS, Cours d'Analyse supérieure, Fac. Sc. Lille 1958/59, non publié).

Il est aisé de vérifier :

PROPOSITION 2.1. - Soient A, B, C, trois éléments du quotient E/D, tels que

$$A \leqslant B \leqslant C .$$

Pour que C soit extension essentielle de A dans E/D, il faut et il suffit que C soit extension essentielle de B dans E/D et que B soit extension essentielle de A dans E/D.

PROPOSITION 2.2. - Pour que E soit extension essentielle de A dans C/D, il faut et il suffit que, pour tout $C' \geqslant C$ et tout $D' \leqslant D$, E soit extension essentielle de A dans C'/D'.

Seule la condition nécessaire est à prouver. Soit donc $X \in (L)$ tel que $X \leqslant E$, $X \cap A = D'$. (L) étant modulaire :

$$(D \cup X) \cap A = D \cup (X \cap A) = D \cup D' = D .$$

E étant extension essentielle de A dans C/D :

$$D \cup X = D ,$$

ce qui entraîne $X \leqslant D \leqslant A$,

$$D' = X \cap A = X .$$

2. Eléments injectifs de (L).

Lorsque (L) est le treillis des sous-modules d'un module injectif M, l'ensemble des sous-modules injectifs de M est identique à l'ensemble des sous-modules n'ayant pas d'extension essentielle propre (cf. L. LESIEUR et R. CROISOT [10], p. 98 et 99). Il est ainsi légitime de poser :

DÉFINITION 2.2. - L'élément Q de (L) est dit injectif s'il ne possède pas d'extension essentielle propre dans (L) (0 et U sont des injectifs).

Cette définition s'étend aux quotients de (L) : $Q \in C/D$ est dit injectif dans C/D, s'il ne possède pas d'extension essentielle propre dans C/D. Ceci ést équivalent à :

$$" A \in (L) , \ Q < A \leqslant C " \Rightarrow " \exists X , \ X \in (L) , \ D < X \leqslant A , \ Q \cap X = D " .$$

A l'exemple de R. E. JOHNSON (cf. [9], III, p. 710), donnons la définition :

DÉFINITION 2.3. - On appelle élément essentiel de (L) ou épais (cf. Terminologie de R. DEHEUVELS, remarque suivant la définition 2.1), un élément S ayant la propriété suivante :

$$S \cap X = 0 \Rightarrow X = 0 .$$

Il revient au même de dire que U est extension essentielle de S .

THÉORÈME 2.1. - Tout élément non essentiel A de (L) peut être plongé dans un injectif de (L) , distinct de U , et qui est extension essentielle maximale de A dans (L) .

En effet, la famille $\mathfrak{F} = \{E_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ des extensions essentielles de A dans (L) est non vide, et est inductive pour l'ordre induit sur $\mathfrak{F}$ par celui de (L) . Pour le vérifier, considérons une sous-famille $\mathfrak{F}' = \{E_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}'}$ non vide de $\mathfrak{F}$, totalement ordonnée. La borne supérieure $E = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}'} E_\alpha$ existe dans (L) complet. Montrons que E est extension essentielle de A dans (L) :

$$\text{Soit : } X \in (L) , \ X \leqslant E , \ X \cap A = 0 .$$

Par suite : $\forall \alpha \in \mathfrak{A}'$, $X \cap A \cap E_\alpha = 0$; E_α étant extension essentielle de A dans (L) :

$$\forall \alpha \in \mathfrak{A}' , \ X \cap E_\alpha = 0 .$$

(L) étant $\cap$-continu,

$$X = X \cap E = X \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}'} E_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}'} (X \cap E_\alpha) = 0 .$$

Donc, E est dans $\mathfrak{F}$.

Choisissons un élément maximal Q de $\mathfrak{F}$ (théorème de Zorn) ; toute extension essentielle de Q étant extension essentielle de A (en vertu de la proposition 2.1), Q est élément injectif de (L) ; Q est distinct de U , car A n'est pas essentiel.

COROLLAIRE 2.1. - Pour que S soit un élément essentiel de (L) , il faut et il suffit que U soit le seul injectif de (L) qui contienne S .

(Appliquer la proposition 2.1 et le théorème 2.1.)

PROPOSITION 2.3. - Q est un élément injectif du quotient B/A de (L) si, et seulement si, Q est élément injectif de tout quotient B'/A' , B' étant un élément arbitraire de B/Q et A' étant un élément arbitraire de Q/A .

(Considérer une extension essentielle de Q dans B'/A' , et appliquer la proposition 2.2.)

Chapitre 3

Eléments compléments de (L)

1. Compléments et injectifs.

La notion de complément est étroitement liée à celle d'extension essentielle :

- dans le cas des modules (cf. L. LESIEUR et R. CROISOT, [11], et aussi G. RENAULT [14] et [15]),
- dans le cas des catégories abéliennes (cf. P. GABRIEL, [8], p. 361),
- dans le cas des treillis modulaires (cf. R. E. JOHNSON, [9], I, p. 520).

DÉFINITION 3.1. - Soit A un élément de (L) ; tout élément K de (L) maximal dans l'ensemble des X de (L) tels que $X \cap A = 0$, est appelé complément relatif (ou plus simplement complément) de A dans (L). Un élément complément dans (L) est un élément K pour lequel il existe $A \in (L)$ dont K soit complément relatif.

Tout élément A de (L) admet au moins un complément dans (L) (conséquence immédiate du fait que (L) est complet et $\cap$-continu).

THÉORÈME 3.1. - Pour que A soit élément injectif du quotient C/D, il faut et il suffit que A soit élément complément de C/D.

La condition est suffisante : A est complément de B dans C/D. Soit alors $A' \in C/D$ tel que $A < A'$; A étant maximal dans C/D tel que $A \cap B = D$, nous avons :

$$A' \cap B > D \qquad \text{avec} \quad (A' \cap B) \cap A = D \ ;$$

A est injectif dans C/D.

La condition est nécessaire : Soit K un complément de A dans C/D, A étant injectif dans C/D. Montrons que A est complément de K dans C/D. Si non, il existerait $A' \in C/D$ tel que :

$$A' > A \ , \qquad A' \cap K = D \ .$$

Mais A étant injectif dans C/D, on pourrait trouver $X \in C/D$ tel que :

$$D < X \leq A' \qquad \text{et} \qquad A \cap X = D \ .$$

Par suite,

$$K \cap (A \cup X) = A \cap X = D \ ,$$

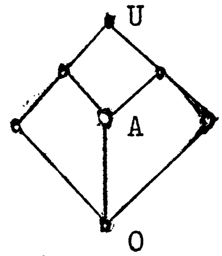
et d'après le corollaire 1.2 :

$$D = X \cap K = A \cap (X \cup K) .$$

La maximalité de K, tel que $A \cap K = D$, entraînerait : $X \cup K = K$ ou $X = X \cap K = D$, en contradiction avec $D < X$.

Remarque. - Lorsque (L) n'est pas modulaire, un élément de (L) peut être injectif sans être complément.

Il en est ainsi pour l'élément A du treillis ci-contre.



COROLLAIRE 3.1. - *Si un élément* K *de* (L) *est complément d'un injectif* Q *de* (L), *alors* Q *est complément de* K *dans* (L).

Deux tels éléments K et Q compléments l'un de l'autre sont dits *compléments réciproques*.

2. Compléments et extensions essentielles.

R. E. JOHNSON a établi les deux résultats suivants (cf. [9], I, p. 520), énoncés dans le langage adopté ici :

PROPOSITION 3.1. - *Soit* K *un* complément *de* A *dans* (L) ; *pour qu'un élément* E *contenant* A *soit extension* essentielle *de* A, *il faut et il suffit que* :

$$E \cap K = 0 .$$

PROPOSITION 3.2. - *Si* K *est* complément *de* A *dans* (L), $A \cup K$ *est alors un élément* essentiel *de* (L).

La première de ces propositions nous permet d'établir :

PROPOSITION 3.3. - *Soient* A *et* B *deux éléments de* (L) *tels que* $A \leqslant B$. *Pour que* A *et* B *aient* même *ensemble de compléments dans* (L), *il faut et il suffit que* B *soit une extension essentielle de* A.

La condition est nécessaire, en vertu de la proposition 3.1. Réciproquement, supposons que B soit extension essentielle de A ; alors, tout complément de A est complément de B (proposition 3.1) ; soit, d'autre part, K un complément de B : $B \cap K = 0$, et aussi $A \cap K = 0$. Il existe alors au moins un complément K' de A qui contient K ; K' est aussi complément de B d'après ce qui précède, ce qui montre que $K = K'$.

PROPOSITION 3.4. - Si K est complément de A dans (L), $A \cup K$ est alors élément essentiel du quotient U/K.

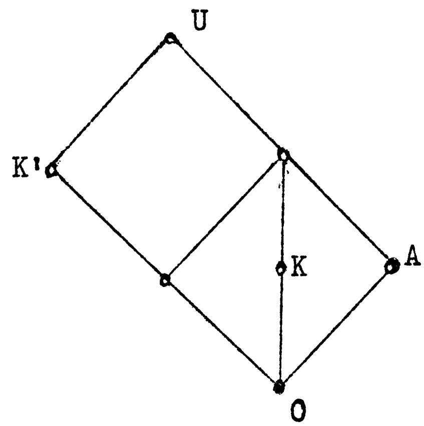
Soit en effet $X \in (L)$ tel que $X \cap (A \cup K) = K$. Il résulte :

$$0 = A \cap K = A \cap [X \cap (A \cup K)] = A \cap X ,$$

$X \geqslant K$, et la maximalité de K entraîne $X = K$.

3. Compléments d'un même élément.

Deux compléments K et K' d'un même élément A de (L) ne définissent pas en général deux quotients $K/0$ et $K'/0$ isomorphes, comme le montre l'exemple ci-contre (modulaire).



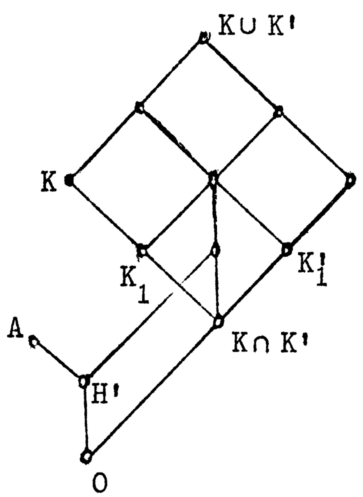
Il est néanmoins possible de trouver des sous-quotients $K_1/0$ dans $K/0$ et $K_1'/0$ dans $K'/0$, semblables et non triviaux (i. e. contenant en commun le quotient $(K \cap K')/0$ et différents tous deux de ce quotient), plus précisément :

THÉORÈME 3.2. - Si K et K' sont deux compléments de A dans (L), distincts, on peut alors trouver K_1 et K_1' tels que :

1° $K \cap K' < K_1 \leqslant K$, $K \cap K' < K_1' \leqslant K'$,

2° Les quotients $K_1/0$ et $K_1'/0$ sont semblables.

Preuve. - K et K' sont distincts, tous deux compléments de A, donc incomparables :



$$K \cup K' > K' \quad \text{et} \quad K \cup K' > K .$$

En raison de la maximalité de K (ou de K'), l'élément $H' = A \cap (K \cup K')$ est différent de 0.

La proposition 1.1 appliquée au choix :

$$A \to K , \quad B \to K' , \quad H \to A$$

montre que les quotients $K_1/0$ et $K_1'/0$ sont semblables,

$$K_1 = (A \cup K') \cap K , \quad K_1' = (A \cup K) \cap K'$$

et que

$$K \cap K' < K_1 \ , \quad K \cap K' < K_1' \ ,$$

puisque $A \cap (K \cup K')$ est distinct de $0 = K \cap A = K' \cap A$.

Remarque. - Dans le cas du treillis (L) des sous-modules d'un module U , la similitude des quotients $K_1/0$ et $K_1'/0$ définit un isomorphisme des sous-modules K_1 et K_1' .

4. Deux caractérisations des éléments compléments.

G. RENAULT a montré (cf. [15], théorème 1) qu'un sous-module X d'un module M est complément dans M si, et seulement s'il est la trace sur M d'un sous-module injectif de l'enveloppe injective $E(M)$ de M .

$E(M)$ est, en particulier, une extension essentielle de M (cf. ECKMANN-SCHOPF [6]). Il est possible d'étendre cette propriété aux quotients $A/0$ du treillis (L) , et à toute extension essentielle E de A dans (L) :

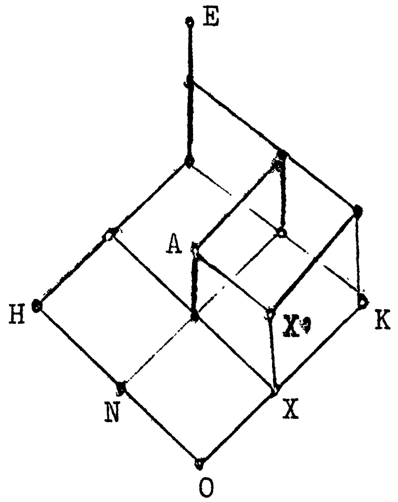
THÉORÈME 3.3. - Soit E une extension essentielle de A dans (L) ; pour que X soit un élément complément dans le quotient $A/0$, il faut et il suffit que : $X = K \cap A$, où K est un élément complément (ou injectif) du quotient $E/0$.

La condition est nécessaire : Soit X , complément de l'élément N de $A/0$; $X \cap N = 0$. E étant un élément de (L) contenant A (E pas nécessairement extension essentielle de A), considérons un élément K de $E/0$ qui contienne X et qui soit complément de N dans $E/0$.

$$K \cap N = 0 \ ; \quad A \cap K \cap N = 0 \ , \quad A \cap K \in A/0 \ , \quad X \leqslant A \cap K \ ;$$

X étant complément de N dans $A/0$: $X = A \cap K$.

La condition est suffisante : Soient E une extension essentielle de A dans (L) , K un complément de H dans $E/0$; montrons que l'élément $X = K \cap A$ est complément de l'élément $N = H \cap A$ dans $A/0$.



Soit donc $X' \in A/X$ tel que $X' \cap N = 0$. (L) étant modulaire :

$$[(X' \cup K) \cap H] \cap A = [X' \cup (K \cap A)] \cap H =$$

$$X' \cap H = X' \cap A \cap H = X' \cap N = 0 \ .$$

E est extension essentielle de A :

$$(X' \cup K) \cap H = 0 .$$

K est complément de H dans $E/0'$:

$$X' \cup K = K , \qquad X' = X' \cap K = X' \cap A \cap K = X' \cap X = X .$$

Le théorème suivant étend de même à (L) la proposition 1 de [15] :

THÉORÈME 3.4. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) X est élément complément de (L) ,

(2) Quels que soient E et A de (L) contenant X , avec E extension essentielle de A dans (L) , alors E est extension essentielle de A dans le quotient U/X .

(1) entraîne (2) : Soit $Z \in E/X$ tel que $Z \cap A = X$. N étant un élément de (L) dont X soit le complément :

$$Z \cap N \cap A = N \cap X = 0 .$$

E est extension essentielle de A dans (L) :

$$Z \cap N = 0 .$$

Mais $Z \geqslant X$, et X est complément de N :

$$Z = X .$$

(2) entraîne (1) : Soit N un complément de X dans (L) . Montrons que X est complément de N dans (L) . Pour cela, considérons $X' \in U/X$ tel que $X' \cap N = 0$. (L) étant modulaire :

$$X = X \cup 0 = X \cup (N \cap X') = (X \cup N) \cap X' .$$

Mais $N \cup X$ est un élément essentiel de (L) d'après la proposition 3.2 ; la propriété (2) de l'énoncé du théorème appliquée à $E = U$ et à $A = N \cup X$, entraîne que $N \cup X$ est aussi un élément essentiel du quotient U/X ; donc $X' = X$.

Chapitre 4

Enveloppes injectives d'un élément.

1. Théorème fondamental.

Lorsqu'un module A est sous-module d'un module injectif Q , nous savons que toute extension essentielle E de A est isomorphe (relativement à A) à un sous-module de Q contenant A (cf. [10], prop. 10.7).

Pour le treillis (L) , nous obtenons :

LEMME 4.1. - Soient Q un injectif de (L) contenant A , E une extension essentielle de A dans (L) telle que $E \not\leqslant Q$; dans ces conditions, il existe E_1 et Q_1 ayant les propriétés suivantes :

(1) $E \cap Q < E_1 \leqslant E$, $E \cap Q < Q_1 \leqslant Q$,

(2) Il existe une similitude des quotients $E_1/0$ et $Q_1/0$, laissant invariants tous les éléments de $(E \cap Q)/0$.

$E \cup Q > Q$; Q étant injectif, il existe $X \neq 0$ tel que

$$X \leqslant E \cup Q \qquad \text{et} \qquad X \cap Q = 0 .$$

D'autre part, $X \cap E \cap A = X \cap E \cap Q \cap A = 0$ entraîne $X \cap E = 0$, car E est extension essentielle de A . Le lemme est alors une conséquence de la proposition 1.1 appliquée au cas :

$$A \to E , \quad B \to Q , \quad H \to X .$$

THÉORÈME 4.1. - Dans tout injectif Q contenant un élément donné A de (L) , il existe une extension essentielle de A qui est élément injectif de (L) .

Preuve. - Soit E une extension essentielle maximale de A dans le quotient $Q/0$ (existence assurée par le théorème 2.1 et par son corollaire). Nous nous proposons de montrer que E , qui est injectif dans $Q/0$, est aussi injectif dans (L) . Considérons pour cela une extension essentielle E' de A dans (L) , contenant E :

$$E' \geqslant E' \cap Q \geqslant E \geqslant A .$$

$E' \cap Q$ est extension essentielle de A dans $Q/0$ (cf. propositions 2.1 et 2.2) ; la maximalité de E montre que

$$E' \cap Q = E .$$

Supposons que $E' > E$. Dans ces conditions, $E' \not\leqslant Q$, en raison du caractère maximal de E . Le lemme 4.1 montre alors qu'il existe E'_1 et Q_1 ayant les propriétés

$$E < E'_1 \leqslant E' , \quad E < Q_1 \leqslant Q ,$$

et il existe un isomorphisme de treillis σ : $E'_1/0 \to Q_1/0$, laissant invariants tous les éléments de $E/0$ (donc a fortiori ceux de $A/0$). Mais E'_1 est une extension essentielle de A , puisque E' est une extension essentielle de A ; en raison de l'isomorphisme σ , Q_1 est aussi extension essentielle de A , telle que $E < Q_1$; ce qui est impossible, d'après la définition de E .

Ainsi donc, toute extension essentielle E' de A dans (L) contenant E est nécessairement confondue avec E . E est donc sans extension essentielle propre dans (L) .

A l'exemple des résultats connus dans le cas des modules (cf. P. GABRIEL, [7], p. 17.03, ou L. LESIEUR et CROISOT, [10], théorème 10.2), nous obtenons :

THÉORÈME 4.2. - Etant donné un élément A de (L) , il existe un élément E de (L) , contenant A , et ayant les propriétés équivalentes suivantes :

(1) E est maximal dans l'ensemble des extensions essentielles de A dans (L) ;

(2) E est extension essentielle de A , et E est élément complément dans tout quotient $E'/0$, E' étant une extension arbitraire de E dans (L) ;

(3) E est extension essentielle de A , et élément injectif de (L) ;

(4) E est minimal dans l'ensemble des injectifs de (L) contenant A .

L'existence d'un élément E possédant la propriété (1) est assurée par le théorème 2.1 (si A est essentiel, alors $E = U$).

L'équivalence de (1) et (3) résulte de la définition d'un injectif et de la proposition 2.1.

L'équivalence de (2) et (3) est assurée par la proposition 2.3 et par le théorème 3.1.

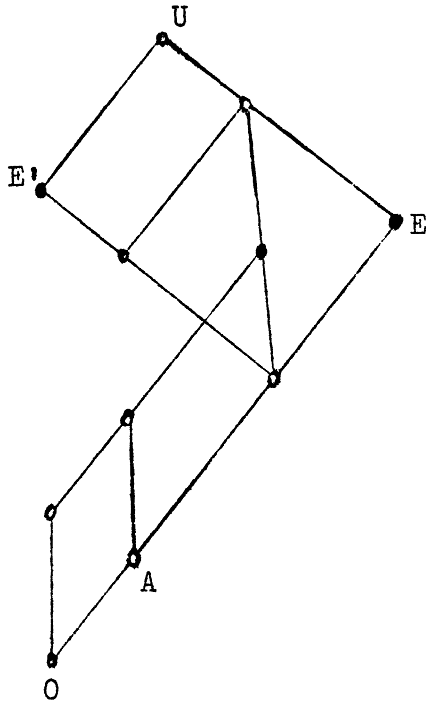
(3) entraîne (4), car E est extension essentielle de tout élément du quotient E/A .

Enfin, soit E un élément minimal dans l'ensemble des injectifs de (L) contenant A . En vertu du théorème 4.1, il existe dans E une extension essentielle E' de A qui est élément injectif de (L) . Donc, $E = E'$ vérifie les conditions (3).

DÉFINITION 4.1. - Un élément E de (L) satisfaisant aux propriétés du théorème 4.2 est appelé enveloppe injective de A dans (L) .

Le théorème 4.1 exprime que dans tout injectif de (L) contenant A , il existe une enveloppe injective de A .

Remarque. - Un élément A peut admettre plusieurs enveloppes injectives E , E', ... dans (L) , sans que les quotients $E/0$, $E'/0$, ... soient semblables (isomorphes)



deux à deux. Nous pouvons le voir sur l'exemple de treillis modulaire ci-contre.

Deux enveloppes injectives distinctes E et E' de A dans (L) sont cependant "partiellement isomorphes", au sens suivant :

Il existe deux éléments E_1 et E_1' de (L), contenus respectivement dans E et E', contenant strictement $E \cap E'$, et tels que les quotients $E_1/0$ et $E_1'/0$ soient semblables.

En effet, E et E' ont même ensemble de compléments dans (L), celui des compléments de A (cf. proposition 3.3) ; soit K l'un d'entre eux : E et E' sont alors deux compléments distincts de K (cf. corollaire 3.1). Il suffit d'appliquer le théorème 3.2 pour obtenir les éléments E_1 et E_1' désirés.

2. Eléments co-irréductibles de (L).

Rappelons la définition d'éléments co-irréductibles (cf. par exemple, P. GABRIEL, [8], p. 359).

DÉFINITION 4.2. - Un élément A de (L), $A \neq 0$, est dit co-irréductible, lorsque 0 est $\cap$-irréductible dans le quotient $A/0$.

Les propriétés des sous-modules co-irréductibles (E. MATLIS, [12], prop. 2.2), ou des objets co-irréductibles (P. GABRIEL, [8], prop. 11, p. 361), se transposent aux éléments co-irréductibles de (L) de la façon suivante :

PROPOSITION 4.1. - $\mathcal{E}(A)$ étant l'ensemble des enveloppes injectives d'un élément donné A de (L), les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) A est élément co-irréductible ;

(2) Tout élément de $\mathcal{E}(A)$ est élément injectif minimal de (L), c'est-à-dire élément minimal de l'ensemble des injectifs non nuls de (L) ;

(3) Tout élément E de $\mathcal{E}(A)$ est une enveloppe injective de tous les éléments non nuls du quotient $E/0$;

(4) $\mathcal{E}(A)$ contient au moins un élément E ayant l'une des propriétés :

(α) E <u>est co-irréductible,</u>

(β) E <u>est injectif minimal,</u>

(γ) E <u>est enveloppe injective de tous les éléments non nuls de</u> $E/0$.

Montrons que (1) entraîne les propriétés (2) , (3) , et (4) :

Soient $E \in \mathcal{E}(A)$ et Q un injectif de (L) vérifiant :

$$0 < Q \leqslant E .$$

Alors $Q = E$, sinon il existerait $X \neq 0$ tel que

$$X \leqslant E \qquad \text{et} \qquad 0 = X \cap Q ,$$

ce qui est impossible car E , en tant qu'extension essentielle de A , est aussi co-irréductible (aisé à vérifier). De plus, E étant co-irréductible est extension essentielle de tous les éléments Z non nuls de $E/0$, donc enveloppe injective de Z .

Supposons maintenant qu'un élément E de $\mathcal{E}(A)$ soit injectif minimal de (L) . Si 0 était $\cap$-réductible dans $A/0$, il existerait X , Y , tels que

$$0 < X \leqslant A , \quad 0 < Y \leqslant A , \quad 0 = X \cap Y .$$

Soit E' une enveloppe injective de X contenue dans E (théorème 4.1) ; $Y \not\leqslant E'$, car E' est extension essentielle de X ; nous aurions donc :

$$0 < E' < E ,$$

ce qui serait contraire au caractère minimal de l'injectif E .

Enfin supposons que l'élément E de $\mathcal{E}(A)$ soit enveloppe injective de tous les éléments non nuls de $E/0$. Tous ces éléments sont essentiels dans $E/0$, et 0 est $\cap$-irréductible dans $E/0$, a fortiori dans $A/0$.

Chapitre 5

Eléments injectifs extrêmaux de (L)

1. Injectifs (compléments) minimaux.

Pour un sous-module A d'un module M , la propriété d'être complément minimal est équivalente à celle d'être complément co-irréductible (cf. G. RENAULT, [14] et [15]). Cela s'étend à (L) et se précise ainsi :

THÉORÈME 5.1. - <u>Soit</u> A <u>un élément de</u> (L) . <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(1) A <u>est</u> co-irréductible maximal ;
(2) A <u>est</u> injectif minimal ;
(3) A <u>est élément</u> injectif <u>et</u> co-irréductible.

L'équivalence de (2) et de (3) est assurée par la proposition 4.1, car, lorsque A est injectif, l'ensemble $\mathcal{E}(A)$ de ses enveloppes injectives est réduite à $\{A\}$ (cf. théorème 3.2). Les implications (1) $\Rightarrow$ (3) et (2) $\Rightarrow$ (1) sont également assurées par la proposition 4.1.

<u>Remarque</u>. - Lorsqu'il n'est pas vide, l'ensemble des éléments co-irréductibles de (L) contenus dans un élément donné B de (L) est <u>inductif</u> pour la relation d'ordre de (L) (vérification aisée).

2. Injectifs (compléments) maximaux.

Un élément <u>injectif maximal</u> de (L) est un élément maximal de l'ensemble des injectifs de (L) distincts de l'élément universel U .

Nous savons qu'un sous-module A , complément maximal dans un module M , est nécessairement sous-module $\cap$-irréductible minimal de M (cf. G. RENAULT, [15], théorème 3).

L'introduction de la notion de complément universel dans (L) , permet de caractériser avec précision ces éléments injectifs maximaux :

DÉFINITION 5.1. - <u>Un élément</u> K <u>de</u> (L) <u>est appelé</u> complément universel <u>dans</u> (L) , <u>s'il n'est pas essentiel, et s'il est complément dans</u> (L) <u>de tout élément</u> Z <u>de</u> (L) <u>satisfaisant à</u>

$$Z > 0 \quad \text{et} \quad Z \cap K = 0 \ .$$

THÉORÈME 5.2. - <u>Soit</u> A <u>un élément de</u> (L) ; <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(1) A <u>est</u> $\cap$-irréductible <u>et</u> non singulier ;
(2) A <u>est</u> injectif (<u>ou complément</u>) maximal ;
(3) A <u>est</u> maximal <u>dans l'ensemble des éléments</u> non essentiels <u>de</u> (L) ;
(4) A <u>est</u> complément universel.

<u>De plus, lorsque l'une des conditions précédentes est réalisée</u>, A <u>est alors</u> minimal <u>dans l'ensemble des</u> $\cap$-irréductibles <u>de</u> (L) .

<u>Preuve</u>. - Elle suivra le cycle d'implications :

$$(2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \ .$$

(a) Preuve de (2) $\Rightarrow$ (1) . - A , injectif maximal par hypothèse, est complément d'un élément N de (L) , non nul, car $A \neq U$.

Soit une $\cap$-décomposition de A dans (L) , triviale ou non,

$$A = A_1 \cap A_2 ,$$

qui entraîne :

$$A_1 \cap A_2 \cap N = 0 .$$

Considérons un complément K de $A_2 \cap N$ dans (L) , contenant A_1 . A étant complément maximal dans (L) :

- ou bien $K = A$, et par suite $A = A_1$;
- ou bien $K = U$, qui entraîne $A_2 \cap N = 0$, et par suite $A = A_2$ (puisque A est complément de N).

L' $\cap$-décomposition de A est donc triviale.

(b) Preuve de (1) $\Rightarrow$ (4) . - Considérons A , $\cap$-irréductible et non essentiel.

Soit Z tel que $Z > 0$, $A \cap Z = 0$ (il existe dans (L) de tels éléments puisque A n'est pas essentiel). Montrons que A est complément de Z dans (L) ; soit donc $A' \in$ (L) , $A' \geqslant A$, $A' \cap Z = 0$; (L) étant modulaire :

$$(A \cup Z) \cap A' = A \cup (Z \cap A') = A .$$

Mais A est $\cap$-irréductible, et $A \cup Z > A$ (sinon $Z = A \cap Z = 0$) ; par suite, $A' = A$.

(c) Preuve de (4) $\Rightarrow$ (3) . - Soit A un complément universel dans (L) ; A est non essentiel, par définition. Considérons un élément non essentiel A' de (L) tel que $A' \geqslant A$; il existe alors $X \in$ (L) ayant les propriétés :

$$X > 0 , \quad X \cap A' = 0 \qquad (\text{donc } X \cap A = 0).$$

A étant complément de X : $A' = A$.

(d) Preuve de (3) $\Rightarrow$ (2) . - Soit A un élément maximal dans l'ensemble des éléments non essentiels de (L) . Toute enveloppe injective E de A dans (L) est distincte de U , puisque A est non essentiel ; il existe donc des injectifs (soit Q l'un d'entre eux) de (L) tels que

$$A \leqslant Q < U .$$

Nous affirmons que $Q = A$. En effet, Q est complément d'un élément N de (L) (théorème 3.1) ; N n'est pas nul (car $Q \neq U$) :

$$Q \cap N = 0 = A \cap N ;$$

et si Q était distinct de A, il serait essentiel, et il en résulterait $N = 0$.

Considérons, pour terminer, un élément A vérifiant les conditions précédentes, et montrons qu'il est $\cap$-irréductible minimal. Si $A = 0$, il n'y a rien à montrer. Si $A > 0$, A est alors complément d'un élément $N > 0$; $0 = N \cap A$; dans ce cas, le caractère minimal de A résulte de la propriété suivante des treillis modulaires (appliquée pour $X = A$, $Y = N$, $Z = 0$) :

LEMME 5.1. - *Soient trois éléments* X, Y, Z *de* (L), *tels que* :

$$Z = X \cap Y \,, \quad X > Z \,, \quad Y > Z \,.$$

Dans ces conditions, il n'existe aucun élément $\cap$-*irréductible de* (L) *distinct de* X *et* Y, *dans les quotients* X/Z *et* Y/Z.

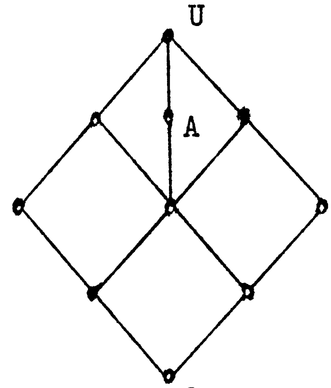
En effet, si T vérifie par exemple : $Z \leqslant T < X$, alors :

$$T = T \cup Z = T \cup (Y \cap X) = (T \cup Y) \cap X \qquad \text{avec} \quad T \cup Y > T$$

(sinon, $T \geqslant Y$ entraînerait $Y = Y \cap T \leqslant Y \cap X = Z$, ce qui est en contradiction avec $Y > Z$).

Remarques :

1° Il existe des $\cap$-irréductibles minimaux qui ne sont pas injectifs : c'est le cas de l'élément A du treillis modulaire ci-contre, qui est essentiel et distinct de U.



2° Il peut arriver que tous les éléments non nuls de (L) soient tous essentiels, et les seuls injectifs sont alors 0 et U. C'est le cas du treillis des idéaux de l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$.

3. Caractérisation des injectifs extrêmaux au moyen de leurs compléments.

PROPOSITION 5.1. - *Pour un élément* non essentiel A *de* (L), *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(1) A *est* co-irréductible ;

(2) *Tous les compléments de* A *sont des* injectifs maximaux *de* (L) ;

(3) A *possède un complément qui est injectif* maximal *de* (L).

(1) *entraîne* (2) : Soit K un complément de A ; $K > 0$, car A est non essentiel ; $A > 0$, puisque A est co-irréductible ; il en résulte que K est non essentiel. Montrons que K est $\cap$-irréductible :

$K = K_1 \cap K_2$; $K_1 > K$, $K_2 > K$ entraîneraient (puisque K est complément de A) :

$$K_1 \cap A > 0 \; , \quad K_2 \cap A > 0 \; , \qquad 0 = (K_1 \cap A) \cap (K_2 \cap A) \; ,$$

ce qui contredirait le fait que 0 est $\cap$-irréductible dans $A/0$. K est complément maximal de (L) , d'après le théorème 5.2.

(2) entraîne (3) : évident.

(3) entraîne (1) : Soit K un complément de A , K étant complément maximal de (L) ; alors, $K < U$; $K > 0$ (puisque A n'est pas essentiel). Si 0 était $\cap$-décomposable dans $A/0$, alors K serait $\cap$-décomposable dans $(K \cup A)/K$, car les deux quotients $A/0$ et $(K \cup A)/K$ sont transposés (cf. chapitre 1).

PROPOSITION 5.2. - Pour un élément non essentiel A de (L) , les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) A est $\cap$-irréductible ;

(2) A est injectif et tous ses compléments sont des injectifs minimaux ;

(3) A est injectif et possède un complément qui est injectif minimal.

(1) entraîne (2) : Soit A un $\cap$-irréductible non essentiel de (L) ; A est alors injectif (cf. théorème 5.2). Si $A = 0$, tous les éléments non nuls de (L) sont essentiels, et les seuls injectifs de (L) sont 0 et U ($A = 0 \neq U$, car U est essentiel dans (L)), et leur seul complément de $A = 0$ est U , lequel est bien, dans ce cas, injectif minimal de (L) .

Si $A > 0$, considérons un complément K de A ; $K > 0$, car A n'est pas essentiel. Les quotients $K/0$ et $(K \cup A)/A$ sont transposés, par suite 0 est $\cap$-irréductible dans $K/0$; de plus, K n'est pas essentiel. K est complément co-irréductible, donc injectif minimal (théorème 5.1).

(2) entraîne (3) : Evident.

(3) entraîne (1) : Soit A injectif possédant un complément K qui est injectif minimal de (L) . A est alors complément de K (corollaire 3.1), qui est co-irréductible non essentiel (théorème 5.1). La proposition 5.1 montre alors que A est injectif maximal, et aussi $\cap$-irréductible non essentiel (théorème 5.2).

Chapitre 6

Applications

1. Applications aux $\cap$-décompositions.

Supposons qu'un élément X de (L), $X \neq U$, soit l'intersection réduite d'une famille collective (X_i, $i \in I$, et $i \neq j$ entraîne $X_i \neq X_j$) non vide, finie ou infinie, d'éléments $\cap$-irréductibles X_i de (L) :

$$X = \bigcap_{i \in I} X_i \; ; \quad \forall\, i \in I \qquad \overline{X}_i = \bigcap_{\lambda \in I - \{i\}} X_\lambda \not\leq X_i \; ;$$

ce qui, lorsque X n'est pas $\cap$-irréductible, équivaut à :

$$\forall\, i \in I \, , \quad X = X_i \cap \overline{X}_i \, , \quad X < X_i \, , \quad X < \overline{X}_i \, .$$

Dans le quotient U/X, l'élément X_i est donc $\cap$-irréductible et non essentiel; X_i possède ainsi, dans U/X, toutes les propriétés données au théorème 5.2, et c'est en particulier un élément minimal dans l'ensemble des $\cap$-irréductibles de (L) qui contiennent X.

Si X est en outre complément dans (L), les composantes X_i sont des compléments maximaux non seulement dans le quotient U/X, mais encore dans le treillis (L) lui-même. En effet, soit $N > 0$ un élément de (L) dont X soit complément; $\overline{X}_i > X$ entraîne alors :

$$\overline{X}_i \cap N > 0 \qquad \text{et} \qquad X_i \cap (\overline{X}_i \cap N) = 0 \, .$$

X_i, étant $\cap$-irréductible et non singulier dans (L), est bien complément maximal dans (L) (cf. théorème 5.2).

Nous avons donc montré :

PROPOSITION 6.1. - Soit X un élément de (L), $\cap$-irréductible, représentable en intersection réduite d'éléments $\cap$-irréductibles X_i de (L) :

$$X = \bigcap_{i \in I} X_i \, .$$

Dans ces conditions ;

1° Tous les X_i sont minimaux dans l'ensemble des $\cap$-irréductibles de (L) qui contiennent X.

2° Si X est complément dans (L), tous les X_i sont des compléments (ou injectifs) maximaux de (L).

Cette proposition prend effet lorsque la représentation de tout élément en intersection réduite d'éléments ∩-irréductibles, en nombre fini, est assurée ; c'est en particulier le cas lorsque (L) est noethérien (cf. [5], p. 12) ; mais cette représentation est aussi assurée lorsque (L) est artinien (cf. L. LESIEUR et R. CROISOT, [10], théorème 8.1).

THÉORÈME 6.1. - Si (L) est noethérien (ou artinien), tout élément complément K de (L), distinct de U, est l'intersection réduite d'un nombre fini n de compléments maximaux de (L) ; et cet entier n ($n \geqslant 1$) ne dépend que de K.

Le fait que deux telles décompositions de K, en intersection réduite finie de compléments maximaux, aient le même nombre n de composantes, résulte du théorème de KUROŠ-ORE ([5], p. 122), et du fait que tout complément maximal de (L) est ∩-irréductible (théorème 5.2).

2. Autres applications.

Indiquons l'énoncé de deux résultats (les démonstrations seront publiées prochainement).

THÉORÈME 6.2. - Soit U l'élément universel du treillis (L), ∩-continu, modulaire et complet, et vérifiant la condition :

(S) Deux compléments maximaux réciproques de (L) sont toujours supplémentaires (leur union est U).

Dans ces conditions, pour deux décompositions de U en union directe d'un nombre fini d'éléments injectifs minimaux de (L) :

$$U = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n = M'_1 \oplus M'_2 \oplus \dots \oplus M'_{n'} ,$$

on a $n = n'$, et il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que le quotient $M_i/0$ soit semblable au quotient $M'_{\sigma(i)}/0$ pour tout i.

Ce théorème, appliqué au treillis (L) des sous-modules d'un module U, donne l'énoncé du théorème d'AZUMAYA dans le cas d'un nombre fini de composantes directes (cf. [1]).

En effet U, étant somme directe finie de sous-modules injectifs, est lui-même module injectif, et le treillis (L) vérifie alors la condition (S).

De plus, les sous-modules injectifs indécomposables de U coïncident avec les éléments compléments (injectifs) minimaux du treillis (L) ; enfin, toute similitude définit, dans le cas des modules, un isomorphisme des modules quotients correspondants.

THÉORÈME 6.3. - Pour qu'un A-module à gauche unitaire Q soit injectif, il faut et il suffit que, pour tout idéal à gauche α de A, le sous-module $Q' = Q \times \{0\}$ du module produit $P_\alpha = Q \times (A/\alpha)$ ait la propriété suivante :

(P) Tout complément de Q' dans P_α est supplémentaire de Q'.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AZUMAYA (G.). - Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull-Remark-Schmidt's theorem, Nagoya math. J., t. 1, 1950, p. 117-124.

[2] BIRKHOFF (G.). - Lattice theory, 2nd edition. - New York, American mathematical Society, 1948 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 25).

[3] BOURBAKI (Nicolas). - Livre II : Algèbre. - Paris, Hermann, 1942 à 1962 (Act. scient. et ind.) [en 7 fascicules).

[4] DUBREIL (P.) et DUBREIL-JACOTIN (M.-L.). - Leçons d'algèbre moderne. - Paris, Dunod, 1961 (Collection universitaire de Mathématiques, 6).

[5] DUBREIL (M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

[6] ECKMANN (B.) und SCHOPF (A.). - Über injektive Moduln, Arch. der Math., t. 4, 1953, p. 75-78.

[7] GABRIEL (Pierre). - Objets injectifs dans les catégories abéliennes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 12, 1958/59, n° 17, 32 p.

[8] GABRIEL (Pierre). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

[9] JOHNSON (R. E.). - Structure theory of faithful rings, I : Closure operations on lattices, Trans. Amer. math. Soc., t. 84, 1957, p. 508-522 ; II : Restricted rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 84, 1957, p. 523-544 ; III : Irreductibles rings, Proc. Amer. math. Soc., t. 11, 1960, p. 710-717.

[10] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémorial des Sciences mathématiques, 154).

[11] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Coeur d'un module, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 4, 1963, p. 367-407.

[12] MATLIS (E.). - Injective modules over noetherian rings, Pacific J. Math., t. 8, 1958, p. 511-528.

[13] ORE (O.). - On the foundation of abstract algebra, I : Annals of Math., Series 2, t. 36, 1935, p. 406-437 ; II : Annals of Math., Series 2, t. 37, 1936, p. 265-292.

[14] RENAULT (G.). - Sous-modules compléments dans un A-module M, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963, p. 3222-3225.

[15] RENAULT (G.). - Etude des sous-modules compléments dans un A-module, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 16, 1962/63, n° 16, 12 p.