

# SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

CHARLES PISOT

## **Familles normales de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques**

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 16, n° 2 (1962-1963), exp. n° 14, p. 1-12

[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1962-1963\\_\\_16\\_2\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_2_A3_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

FAMILLES NORMALES DE FRACTIONS RATIONNELLES  
ET ENSEMBLES FERMÉS DE NOMBRES ALGÈBRIQUES

par Charles PISOT

En 1944, R. SALEM a démontré le résultat curieux suivant [7] :

Soit S l'ensemble des entiers algébriques réels  $\theta$  ; vérifiant  $\theta > 1$  et dont tous les conjugués autres que  $\theta$  ont un module strictement inférieur à l'unité. Alors S est un ensemble fermé.

Ce résultat s'obtient en démontrant la proposition suivante :

Désignons par  $Q(z)$  le polynôme irréductible primitif ayant  $1/\theta$  pour zéro, et soit  $A(z)$  un polynôme à coefficients entiers rationnels tel que

$$|A(z)| \leq |Q(z)| \text{ pour } |z| = 1 ,$$

A étant premier à Q . Alors la famille des fractions rationnelles

$$f(z) = A(z)/Q(z)$$

pour lesquelles  $\theta$  est borné supérieurement est une famille normale dans  $|z| < 1$ , au sens de Paul MONTEL.

La démonstration de cette proposition utilise un résultat de KRONECKER [5] :

La condition nécessaire et suffisante pour que la série  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$  représente le développement de Taylor d'une fraction rationnelle c'est que les déterminants

$$d_n = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_{n+1} \\ \dots & & & \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n} \end{vmatrix}$$

soient nuls pour n assez grand.

En majorant convenablement  $|d_n|$  , et en remarquant que les  $u_n$  de  $f(z)$  sont entiers rationnels, donc aussi  $d_n$  , on obtient le fait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0 ,$$

donc que  $f(z)$  est une fraction rationnelle.

Nous nous proposons ici de généraliser ces résultats en utilisant, en plus de la majoration de  $|d_n|$ , celle des diverses valeurs absolues  $p$ -adiques de  $d_n$ .

Nous commencerons par établir une majoration de  $|d_n|$ .

LEMME 1. — Soit  $\varphi(z)$  une fonction méromorphe dans  $|z| < 1$ , ayant dans  $|z| < 1$  au plus  $k$  pôles ( $k \geq 0$ ),  $z = 0$  n'étant pas un pôle, et supposons que  $|\varphi(z)|$  soit borné au voisinage de  $|z| = 1$ . La fonction  $\varphi(z)$  possède alors un développement de Taylor autour de  $z = 0$ , soit

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$$

et on a la majoration suivante :

Quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C(\varepsilon)$  indépendante de  $n$  telle que

$$|d_n| \leq C(\varepsilon) \varepsilon^n.$$

En effet, soit

$$\psi(z) = 1 + \psi_1 z + \dots + \psi_k z^k$$

le polynôme ayant pour zéros les pôles de  $\varphi(z)$ , alors

$$\varphi(z) \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n$$

est holomorphe et borné dans  $|z| < 1$  de même que

$$\varphi(z) \psi^2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n.$$

par suite, les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |w_n|^2$$

sont convergentes.

D'autre part on a :

$$v_n = u_n + \psi_1 u_{n-1} + \dots + \psi_k u_{n-k}; \quad w_n = v_n + \psi_1 v_{n-1} + \dots + \psi_k v_{n-k}$$

d'où

$$d_n = \begin{vmatrix} u_0 & \dots & u_{k-1} & v_k & \dots & v_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & \dots & u_{n+k-1} & v_{n+k} & \dots & v_{2n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0 & \dots & u_{k-1} & v_k & \dots & v_n \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ u_{k-1} & \dots & u_{2k-2} & v_{2k-1} & \dots & v_{n+k-1} \\ v_k & \dots & v_{2k-1} & w_{2k} & \dots & w_{n+k} \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ v_n & \dots & v_{n+k-1} & w_{n+k} & \dots & w_{2n} \end{vmatrix}$$

La majoration de HADAMARD [4] d'un déterminant donne

$$|d_n| \leq \prod_{j=0}^n s_j ,$$

où

$$s_j^2 = |u_j|^2 + \dots + |u_{j+k-1}|^2 + |v_{j+k}|^2 + |v_{j+k+1}|^2 + \dots \quad \text{si } j = 0, \dots, k-1$$

et

$$s_j^2 = |v_j|^2 + \dots + |v_{j+k-1}|^2 + |w_{j+k}|^2 + |w_{j+k+1}|^2 + \dots \quad \text{si } j \geq k .$$

La convergence des séries de terme général  $|v_n|^2$  et  $|w_n|^2$  montre que  $s_j$  tend vers zéro. Etant donné  $\varepsilon > 0$ , on peut donc trouver  $h = h(\varepsilon)$  tel que  $|s_j| \leq \varepsilon$  pour tout  $j > h$ . En posant

$$C(\varepsilon) = \varepsilon^{-h} \prod_{j=0}^h s_j ,$$

on obtient

$$|d_n| \leq C(\varepsilon) \varepsilon^n .$$

Donnons maintenant quelques précisions sur le cas où  $\varphi(z)$  vérifie  $|\varphi(z)| \leq 1$  pour  $|z| = 1$ .

1° Si  $|u_0| > 1$ ,  $\varphi(z)$  a au moins un pôle dans  $|z| < 1$ . En effet, dans le cas contraire,  $\varphi(z)$  serait holomorphe, et  $|\varphi(z)|$  serait maximum sur  $|z| = 1$ , ce qui est contraire à

$$|\varphi(0)| = |u_0| > 1 .$$

2° Si  $|u_0| = 1$ , on voit de même que  $\varphi(z)$  est ou bien constant, égal à  $u_0$ , ou bien a au moins un pôle dans  $|z| < 1$ .

Réciproquement, si  $|u_0| = 1$  et si  $\varphi(z)$  a  $k$  pôles dans  $|z| < 1$ , considérons l'équation

$$\varphi(z) \psi(z) - r u_0 \psi(z) = 0 ,$$

où  $r$  est un nombre réel avec  $r > 1$ . Sur  $|z| = 1$ , on a

$$|\varphi(z) \psi(z)| < |r u_0 \psi(z)| ,$$

donc, d'après le théorème de Ronché, l'équation a, dans  $|z| \leq 1$ , le même nombre de racines que  $r u_0 \psi(z) = 0$ , c'est-à-dire  $k$ . Lorsque  $r \rightarrow 1$ , on voit que

$$\varphi(z) \psi(z) - u_0 \psi(z) = 0$$

a au plus  $k$  racines dans  $|z| < 1$ . Or, soit  $u_h$  le coefficient d'indice  $h \geq 1$ , le plus petit tel que  $u_h \neq 0$ , alors on a  $h \leq k$ ; car le développement de  $\varphi(z) \psi(z) - u_0 \psi(z)$  commence par  $u_h z^h$  donc si  $h > k$ , l'équation aurait

$h$  zéros en  $z = 0$  ce qui contredirait notre résultat précédent. Par suite : l'un au moins des coefficients  $u_1, \dots, u_k$  n'est pas nul.

Étudions maintenant le cas où  $\varphi(z)$  est une fraction rationnelle  $P(z)/Q(z)$ , où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes à coefficients entiers rationnels.

Remarquons d'abord que si l'on pose

$$Q(0) = q$$

les nombres  $u_n q^{n+1}$  sont des entiers rationnels.

En effet

$$q\varphi(qz) = qP(qz)/Q(qz)$$

est une fraction rationnelle à coefficients entiers, pour laquelle le terme constant du dénominateur peut être pris égal à 1 ; le développement de Taylor est donc à coefficients entiers rationnels.

Réciproquement, supposons que  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$  soit le développement de Taylor d'une fraction rationnelle  $A(z)/G(z)$ , où

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad G(z) = g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \dots$$

et supposons qu'il existe un entier rationnel  $q$  tel que  $q^{n+1} u_n$  soit entier rationnel. Alors  $qA(qz)/G(qz)$  a un développement à coefficients entiers ; d'après un théorème de FATOU [3] on peut donc prendre  $g_0 = 1$ ,  $g_j q^j$  entier rationnel pour  $j \geq 1$  et  $a_j q^{j+1}$  entier rationnel pour  $j \geq 0$ .

Désignons par  $\mathfrak{Q}_p$  la complétion du corps des rationnels pour la valeur absolue  $p$ -adique définie par  $|p|_p = p^{-1}$  et  $|p'|_p = 1$  si  $p'$  est un nombre premier différent de  $p$ . Soient  $\Omega_p$  la clôture algébrique de  $\mathfrak{Q}_p$  et  $\hat{\Omega}_p$  le complété de  $\Omega_p$ . Dans  $\Omega_p$  nous posons

$$Q(z) = q \prod_{j=1}^s (1 - \alpha_j z)$$

et nous supposons

$$|\alpha_1|_p \geq |\alpha_2|_p \geq \dots \geq |\alpha_m|_p > 1 \geq |\alpha_{m+1}|_p \geq \dots \geq |\alpha_s|_p$$

où  $0 \leq m \leq s$ . Posons

$$Q_h(z) = q \prod_{j=h+1}^s (1 - \alpha_j z) \quad \text{et} \quad P(z)/Q_h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{h,n} z^n.$$

On a alors

$$u_{h,n} = u_n + \beta_{h,1} u_{n-1} + \dots + \beta_{h,h} u_{n-h}$$

où

$$1 + \beta_{h,1} z + \dots + \beta_{h,h} z^h = \prod_{j=1}^h (1 - \alpha_j z) .$$

D'autre part la série  $\sum_{n=0}^{\infty} u_{h,n} z^n$  converge pour  $|z|_p < |\alpha_{h+1}|_p^{-1}$ . Pour

$$|z|_p = \rho < |\alpha_{h+1}|_p^{-1}$$

on a

$$|Q_h(z)|_p = |q|_p .$$

D'autre part, pour  $h < m$ , on a  $\rho < 1$  et pour  $h = m$  prenons  $\rho \leq 1$ , alors  $|P(z)|_p \leq 1$ , donc

$$|P(z)/Q_h(z)|_p \leq |q|_p^{-1} \quad \text{pour } |z|_p = \rho .$$

Les inégalités de Cauchy [2] dans  $\Omega_p$  montrent alors que

$$|u_{h,n}|_p \leq |q|_p^{-1} \rho^{-n} .$$

Faisant tendre  $\rho$  vers  $|\alpha_{h+1}|_p^{-1}$  si  $h < m$ , vers 1 si  $h = m$ , on obtient

$$|u_{h,n}|_p \leq |q|_p^{-1} |\alpha_{h+1}|_p^n \quad \text{si } h < m$$

et

$$|u_{m,n}|_p \leq |q|_p^{-1} \quad \text{si } h = m ,$$

Or, si  $m \leq n$ , on a

$$d_n = \begin{vmatrix} u_{0,0} & u_{1,1} & \dots & u_{m,m} & u_{m,m+1} & \dots & u_{m,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{0,n} & u_{1,n+1} & \dots & u_{m,n+m} & u_{m,n+m+1} & \dots & u_{m,2n} \end{vmatrix}$$

Par suite :

$$|d_n|_p \leq |q|_p^{-(n+1)} |\alpha_1|_p^n |\alpha_2|_p^{n+1} \dots |\alpha_m|_p^{n+m-1} .$$

Si  $n < m$ , on a

$$|d_n|_p \leq |q|_p^{-(n+1)} |\alpha_1|_p^n \dots |\alpha_{n+1}|_p^{2n} .$$

La considération du polygone de Newton du polynôme  $Q(z) = \sum_{j=0}^s q_j z^j$  montre que  $m$  est le plus petit indice tel que

$$|q_m|_p = \max_{0 \leq j \leq s} |q_j|_p$$

et que

$$|\alpha_1 \dots \alpha_m|_p = |q_m q_0^{-1}|_p \leq |q|_p^{-1} .$$

On a donc, dans tous les cas :

$$|d_n|_p \leq |q|_p^{-(3n+1)} .$$

Comme par ailleurs  $d_n$  est un nombre rationnel dont le dénominateur est une puissance de  $q$ , l'inégalité trouvée, appliquée à tous les nombres premiers  $p$  divisant  $q$  montre que

$$q^{3n+1} d_n \text{ est un entier rationnel.}$$

Ce résultat, obtenu ici par des méthodes  $p$ -adiques peut s'obtenir directement, comme l'a montré F. DRESS dans une démonstration non encore publiée.

Remarquons encore que si  $|u_0|_p > |q_m|_p^{-1}$ , la fraction rationnelle  $P(z)/Q(z)$  a, dans  $\Omega_p$ , au moins un pôle effectif dans  $|z|_p < 1$ . En effet pour  $|z|_p = \rho$  avec  $|q_m|_p^{-1} < \rho < 1$ , on a

$$|Q(z)|_p = |q_m|_p \rho^m \quad \text{et} \quad |P(z)|_p \leq 1 ,$$

donc

$$|P(z)/Q(z)|_p \leq |q_m|_p \rho^{-m} .$$

Si cette fraction n'avait pas de pôle dans  $|z|_p < 1$ , les inégalités de Cauchy [2] donneraient en particulier

$$|u_0|_p \leq |q_m|_p^{-1} \rho^{-m} .$$

En faisant tendre  $\rho$  vers 1, on obtient une contradiction.

Définition. - Nous désignons par  $\mathfrak{F}$  l'ensemble des fractions rationnelles

$$\varphi(z) = P(z)/Q(z) ,$$

telles que  $P$  et  $Q$  soient des polynômes à coefficients entiers rationnels, que  $|\varphi(z)| \leq 1$  pour  $|z| = 1$  avec

$$Q(z) = q + q_1 z + \dots$$

où  $q$  est un entier fixe, où  $q_1$  est premier à  $q$ , et que  $Q(z)$  a, dans  $|z| < 1$ , au plus  $k$  zéros,  $k \geq 0$ , tous dans une couronne fixe  $0 < \delta \leq |z| < 1$ . Nous supposons de plus que, pour tout nombre premier  $p$  divisant effectivement  $q$ , on ait

$$|P(0)|_p > |q|_p .$$

On a alors la proposition suivante :

THEOREME-1. -- L'ensemble  $\mathfrak{F}$  est une famille normale dans  $|z| < 1$  au sens de Paul MONTEL.

Démonstration. -- A chaque fraction  $\varphi(z)$  de  $\mathfrak{F}$  nous associons la fonction  $b(z)$  produit des fonctions  $\frac{1 - \theta z}{\theta - z}$  pour tous les  $\theta$  tels que  $1/\theta$  soit un pôle de  $\varphi(z)$  dans  $|z| < 1$ . Il y a donc  $k$  au plus de tels facteurs dans  $b(z)$ . La fonction  $b(z) \varphi(z)$  est holomorphe dans  $|z| \leq 1$  et, comme  $|b(z)| = 1$  sur  $|z| = 1$ , on a

$$|b(z) \varphi(z)| \leq 1 \text{ dans } |z| \leq 1.$$

Les fonctions  $b(z) \varphi(z)$  constituent donc une famille normale dans  $|z| < 1$ , c'est-à-dire un ensemble compact pour la convergence uniforme dans tout compact contenu dans  $|z| < 1$ .

De tout sous-ensemble infini de fonctions  $b(z) \varphi(z)$  on peut donc extraire une suite partielle telle que, d'une part  $b(z)$  tende vers une fonction limite  $B(z)$  du même type que les  $b(z)$ , et que d'autre part  $b(z) \varphi(z)$  tende vers une fonction limite que nous pouvons écrire  $B(z) \Phi(z)$ ; alors

$$|B(z) \Phi(z)| \leq 1 \text{ pour } |z| < 1.$$

Comme  $b(z)$  est holomorphe et  $\neq 0$  pour  $|z| < \delta$ , il en est de même pour  $B(z)$ , donc  $\Phi(z)$  est holomorphe dans  $|z| < \delta$  et y est limite de  $\varphi(z)$ . On a donc

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n z^n,$$

la série convergeant pour  $|z| < \delta$  et  $U_n$  est limite des  $u_n$  de même indice  $n$ . Comme  $q^{n+1} u_n$  est entier rationnel, on voit qu'il en est de même de  $q^{n+1} U_n$  et  $u_n$  finit par être égal à  $U_n$ . De plus, comme  $B(z) \Phi(z)$  est holomorphe dans  $|z| < 1$ ,  $\Phi(z)$  est méromorphe dans  $|z| < 1$  et y a au plus  $k$  pôles, aucun de ces pôles n'est en  $z = 0$ .

Enfin  $|B(z)| = 1$  pour  $|z| = 1$ , donc  $\Phi(z)$  est borné au voisinage de  $|z| = 1$ . Posant alors

$$D_n = \begin{vmatrix} U_0 & \dots & U_n \\ \dots & & \\ U_n & \dots & U_{2n} \end{vmatrix}$$

le lemme 1 montre que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver  $C(\varepsilon)$ , indépendant de  $n$ , tel que

$$|D_n| \leq C(\varepsilon) \varepsilon^n.$$

D'autre part, comme  $u_n$  finit par être égal à  $U_n$ , le nombre  $q^{3n+1} D_n$  est un entier rationnel. Or

$$|q^{3n+1} D_n| \leq C(\varepsilon) q(\varepsilon q^3)^n.$$

En choisissant  $\varepsilon < q^{-3}$ , on voit que pour  $n$  assez grand  $|q^{3n+1} D_n| < 1$ , donc  $D_n = 0$  et  $\phi(z)$  est une fraction rationnelle.

La condition  $(q, q_1) = 1$  montre que  $|q_1|_p = 1$  pour tout  $p$  divisant  $q$ . Le polygone de Newton de  $Q(z)$  montre alors que  $Q(z)$  a, dans  $\Omega_p$ , exactement un zéro dans  $|z|_p < 1$ ; comme il est unique, il appartient à  $\mathfrak{O}_p$ ; soit  $1/\alpha$  ce zéro, on aura

$$|\alpha|_p = |q|_p^{-1}.$$

Enfin  $|P(0)|_p > |q|_p$ , c'est-à-dire  $|\varphi(0)|_p > 1 = |q_1|_p$ , montre que  $1/\alpha$  est effectivement un pôle de  $\varphi(z)$ . Comme la circonférence  $|z|_p = |q|_p^{-1}$  est compacte dans  $\mathfrak{O}_p$ , on peut extraire de la suite des  $\varphi(z)$  convergeant vers  $\phi(z)$  une suite partielle telle que  $\alpha$  tende vers une limite  $\alpha^*$  telle que  $|\alpha^*|_p = |q|_p^{-1}$ , et cela dans chaque  $\mathfrak{O}_p$  pour lequel  $p$  divise  $q$ .

Pour  $|z|_p = \rho$  avec  $|q|_p < \rho < 1$ , on a

$$|Q(z)|_p = \rho \quad \text{et} \quad |P(z)|_p \leq 1,$$

donc

$$|\varphi(z)|_p \leq \rho^{-1}.$$

La famille des fonctions  $(1 - \alpha z) \varphi(z)$  est donc uniformément bornée par  $|q|_p^{-1}$ . D'autre part, comme  $u_n$  finit par être égal à  $U_n$ , les coefficients de la série

$$(1 - \alpha z) \varphi(z) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - \alpha u_{n-1}) z^n$$

convergent au sens de  $\mathfrak{O}_p$  vers ceux de la série

$$U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (U_n - \alpha^* U_{n-1}) z^n = (1 - \alpha^* z) \phi(z).$$

D'après un théorème de DWORK [2], il y a convergence uniforme de  $(1 - \alpha z) \varphi(z)$  vers  $(1 - \alpha^* z) \phi(z)$  dans  $\Omega_p$  dans tout disque

$$|z|_p \leq \rho' < \rho$$

et on a

$$|(1 - \alpha^* z) \phi(z)|_p \leq |q|_p^{-1}.$$

Pour  $|z|_p = \rho'$  avec  $|q|_p < \rho' < 1$ , on a

$$|1 - \alpha^* z|_p = \rho' |q|_p^{-1},$$

donc

$$|\Phi(z)|_p \leq \rho^{i-1}.$$

Enfin

$$|u_0|_p = |P(0)/Q(0)|_p > 1,$$

on a alors aussi  $|U_0|_p > 1$ , car les valeurs absolues  $p$ -adiques sont discrètes sur le corps des rationnels. Cette inégalité montre que  $\Phi(z)$  a effectivement au moins un pôle dans  $|z|_p < 1$ , ce pôle ne peut être que  $1/\alpha^*$ . Posons

$$\Phi(z) = P^*(z)/Q^*(z) \quad \text{où} \quad Q^*(z) = q + q_1^* z + q_2^* z^2 + \dots;$$

la condition  $q^{n+1} U_n$  entier montre que les coefficients de  $P^*$  et  $Q^*$  sont des nombres rationnels, n'ayant comme dénominateurs possibles que des puissances de  $q$ . Le polygone de Newton de  $Q^*$  montre que, puisque  $1/\alpha^*$  est le seul zéro de  $Q^*$  dans  $|z|_p < 1$  et que  $|\alpha^*|_p = |q|_p^{-1}$ , on a  $|q_1^*|_p = 1$  et  $|q_j^*|_p \leq 1$  pour  $j \geq 2$ . Ceci ayant lieu pour tout  $p$  divisant  $q$ , il en résulte que les nombres  $q_j^*$  sont entiers rationnels et que  $q_1^*$  est premier avec  $q$ .

Enfin, pour  $|z|_p = \rho^i$  avec  $|q|_p < \rho^i < 1$ , on a

$$|\Phi(z)|_p \leq \rho^{i-1},$$

donc

$$|P^*(z)|_p \leq \rho^{i-1} |Q^*(z)|_p = 1;$$

les inégalités de Cauchy [2] montrent que le coefficient  $p_j^*$  de  $z^j$  dans  $P^*$  vérifie  $|p_j^*|_p \leq \rho^{i-j}$ , et par suite, pour  $\rho^i$  tendant vers 1,  $|p_j^*|_p \leq 1$ . Ceci ayant lieu pour tout  $p$  divisant  $q$ , on en conclut encore que les coefficients de  $P^*(z)$  sont des entiers rationnels.

L'inégalité  $|U_0|_p > 1$  montre que

$$|P^*(0)|_p > |q|_p.$$

Par suite  $\Phi(z) \in \mathfrak{F}$  et le théorème 1 est démontré.

Nous allons donner deux applications du théorème 1.

1° Définition. — Nous désignons par  $S_q$  l'ensemble suivant de nombres algébriques réels :  $\theta \in S_q$  si  $1/\theta$  est zéro d'un polynôme  $Q(z) = q + q_1 z + \dots$  à coefficients entiers, tels que  $q \neq 0$  est fixe et que  $q_1$  est premier à  $q$ , nous supposons que  $\theta > 1$ , que les autres zéros que  $1/\theta$  de  $Q(z)$  soient dans  $|z| > 1$  et qu'il existe un polynôme à coefficients entiers  $P(z)$  vérifiant

$$|P(z)| \leq |Q(z)| \quad \text{sur} \quad |z| = 1, \quad P(1/\theta) \neq 0,$$

$$|P(0)| \geq |q| \quad \text{et} \quad |P(0)|_p > |q|_p .$$

pour tout nombre premier  $p$  divisant  $q$  .

L'ensemble  $S_q$  contient une infinité d'éléments. En effet, appartient à  $S_q$  tout nombre algébrique  $\theta > 1$ , dont l'équation irréductible est de degré  $s \geq 3$ , a pour termes de plus haut degré  $qz^s + q_1 z^{s-1} + \dots$  avec  $q_1$  premier à  $q$ , et a  $\theta$  pour seul zéro dans  $|z| \geq 1$ ; et de plus dont la norme  $N(\theta)$  vérifie

$$|N(\theta)| \geq 1, \quad |N(\theta)|_p > 1 .$$

Pour le voir, il suffit de prendre pour polynôme  $P(z)$  le polynôme irréductible dont  $\theta$  est zéro, et pour  $Q(z)$  le polynôme réciproque

$$Q(z) = z^s P(1/z) .$$

On a :

THÉORÈME 2. - L'ensemble  $S_q$  est fermé.

Démonstration. - À chaque nombre  $\theta \in S_q$ , nous associons la fraction rationnelle

$$\varphi(z) = P(z)/Q(z) .$$

Alors  $|\varphi(z)| \leq 1$  pour  $|z| = 1$  et  $Q(z)$  a, dans  $|z| < 1$ , exactement un zéro, à savoir  $z = 1/\theta$ . Ce zéro n'est pas zéro de  $P(z)$ , par suite  $\varphi(z)$  a exactement un pôle dans  $|z| < 1$  et ce pôle n'est pas en  $z = 0$ .

Or

$$|u_0| = |P(0)/q| \geq 1 ;$$

l'existence du pôle  $z = 1/\theta$  entraîne que si  $|u_0| = 1$ , on a  $u_1 \neq 0$ .

Considérons alors une suite de fonctions  $\varphi(z)$  correspondant à des nombres  $\theta$  tendant vers une limite  $\theta^*$ ; pour tous ces nombres  $\theta$  on aura donc

$$|\theta| \leq 1/\delta .$$

Les fonctions  $\varphi(z)$  correspondantes forment donc, d'après le théorème 1, une famille normale  $\mathfrak{F}$ . On peut en extraire une suite partielle tendant vers une fonction limite

$$\Phi(z) = P^*(z)/Q^*(z) .$$

On peut supposer  $Q^*(0) = q$ ; comme  $U_0$  et  $U_1$  sont limites respectivement de  $u_0$  et  $u_1$ , on en déduit que

$$|P^*(0)| \geq |Q^*(0)| = |q| ,$$

et que  $\Phi(z)$  a effectivement un pôle dans  $|z| < 1$ , ce pôle étant  $1/\theta^*$ , donc  $P^*(1/\theta) \neq 0$ . Enfin

$$|P^*(z)| \leq |Q^*(z)|, \quad \text{donc } \theta^* \in S_q$$

et le théorème 2 est démontré.

Remarque. -- Pour  $q = 1$ , les nombres premiers  $p$  n'existent pas, l'ensemble  $S_1$  coïncide avec l'ensemble  $S$  défini au début ; en effet  $\theta$  est alors entier algébrique, donc  $|N(\theta)| \geq 1$ , et si le degré  $s$  de  $\theta$  dépasse 2, nous obtenons la caractérisation déjà indiquée. Pour  $s = 1$  ou  $s = 2$  on peut montrer que  $P(z) = 1$  est un polynôme qui convient. Le théorème 2 contient donc le théorème de R. SALEM [7].

Il serait intéressant d'étudier comment les propriétés diverses des nombres de  $S_1$  peuvent éventuellement se généraliser aux nombres de  $S_q$ .

2° Définition. -- Nous désignons par  $\mathcal{C}$  l'ensemble des nombres  $\alpha$  de  $\mathbb{Q}_p$ , algébriques sur le corps  $\mathbb{Q}$  des rationnels, pour lesquels il existe un exposant entier  $h \geq 1$  tel que  $p^h \alpha$  soit entier algébrique sur les rationnels, que l'équation irréductible dans  $\mathbb{Q}$  ayant  $\alpha$  pour zéro ait toutes ses racines dans  $|z| < 1$ , et dans  $\mathbb{Q}_p$  ait toutes ses racines autres que  $\alpha$  dans  $|z|_p \leq 1$ , tandis que  $|\alpha|_p > 1$ .

Alors on a :

THÉORÈME 3 (CHABAUTY [1]). -- L'ensemble  $\mathcal{C}$  est fermé dans  $\mathbb{Q}_p$ .

Démonstration. -- Soit  $Q(z)$  le polynôme irréductible dans  $\mathbb{Q}$  ayant  $1/\alpha$  pour zéro dans  $\mathbb{Q}_p$ . Le polygone de Newton montre que  $Q(z) = p^h + q_1 z + \dots$ , où  $q_1$  est premier à  $p$ . Posons

$$P(z) = z^s Q(1/z)$$

$s$  étant le degré de  $Q$  ; comme les zéros de  $Q(z)$  sont dans  $|z| > 1$ , ceux de  $P(z)$  sont dans  $|z| < 1$ , donc

$$\varphi(z) = P(z)/Q(z)$$

est une fraction irréductible.

Le produit des zéros de  $P(z)$  montre que  $|P(0)/Q(0)| < 1$ , donc la puissance de  $p$ , qui peut diviser  $P(0)$ , est strictement inférieure à  $h$ , c'est-à-dire  $|P(0)|_p > |Q(0)|_p$ . Ainsi  $\varphi(z)$  appartient à une famille  $\mathfrak{F}$  avec  $q = p^h$ .

Le théorème 1 montre que si  $\alpha$  tend vers une limite  $\alpha^*$  dans  $\mathcal{O}_p$ , le dénominateur de la fraction limite a les mêmes propriétés que le polynôme  $Q(z)$ , donc  $\alpha^* \in \mathcal{U}$ , et le théorème 3 est démontré.

Signalons aussi une généralisation de ce résultat, cas particulier du théorème 1 [6].

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHABAUTY (Claude). - Sur la répartition modulo un de certaines suites p-adiques, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 231, 1950, p. 465-466.
- [2] DWORK (Bernard). - On the zeta-function of a hypersurface. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 12 ; p. 5-68).
- [3] FATOU (Pierre). - Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math., t. 30, 1906, p. 335-400.
- [4] HADAMARD (Jacques). - Résolution d'une question relative aux déterminants, Bull. Sc. math., t. 17, 1893, p. 240-246.
- [5] KRONECKER (Leopold). - Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen, Berl. Monatsber., 1881, p. 535-600.
- [6] PISOT (Charles). - Une famille normale de fractions rationnelles, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 4, 1962/63, n° 7, 6 p.
- [7] SALEM (Raphaël). - A remarkable class of algebraic integers, Proof of a conjecture of Vijayaraghavan, Duke math. J., t. 11, 1944, p. 103-108.