

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

GUY RENAULT

Sur les anneaux non commutatifs. IV. Modules isotypiques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, n° 2 (1961-1962), exp. n° 16,
p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_2_A5_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES ANNEAUX NON COMMUTATIFS

IV. MODULES ISOTYPIQUES.

par Guy RENAULT

1. Modules injectifs indécomposables.

DÉFINITION 1. - Un A -module M est indécomposable si ses seuls facteurs directs sont 0 et M .

PROPOSITION 1. - Soit M un A -module ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a. 0 est α -irréductible dans M ;
- b. L'enveloppe injective $E(M)$ est indécomposable ;
- c. $E(M)$ est l'enveloppe injective de tout sous-module non nul de M .

(a) \Rightarrow (b). - Soit $E(M) = M_1 * M_2$; posons $X_1 = M \cap M_1$ et $X_2 = M \cap M_2$; $E(M)$ est une extension essentielle de M ; par suite, X_1 et X_2 sont différents de (0) et l'on a $X_1 \cap X_2 = 0$.

(b) \Rightarrow (c). - Soit P sous-module de M ; $E(P)$ est facteur direct de $E(M)$ et, par suite, $E(P) = E(M)$.

(c) \Rightarrow (a). - Soient X_1 et X_2 deux sous-modules de M tels que $X_1 \cap X_2 = 0$, $E(M)$ non extension essentielle de X_1 .

Exemple. - Soit E un A -module injectif indécomposable, alors $E = E(A/J)$ où J est un idéal irréductible. D'après la proposition 1, si J est un idéal irréductible, alors $E(A/J)$ est injectif et indécomposable.

Réciproquement, soit $x \in E$, alors $E = E(Ax)$; soit J annulateur de x :

$$Ax \cong A/J, \quad E = E(A/J)$$

avec J irréductible.

PROPOSITION 2. - Soit E un A -module injectif et indécomposable, alors $\text{Hom}_A(E, E)$ est un anneau local.

Soit $u \in \text{Hom}_\Lambda(E, E)$, u est un automorphisme de $E \iff u$ est injectif. En effet, dans ce cas $u(E)$ est un Λ -module injectif et, par suite, est facteur direct de E .

Soient $u, v \in \text{Hom}_\Lambda(E, E)$, $\text{Ker } u \neq 0$, $\text{Ker } v \neq 0$,

$$\text{Ker}(u + v) \supset \text{Ker } u \cap \text{Ker } v \neq 0 \implies \text{Ker}(u + v) \neq 0 \quad .$$

PROPOSITION 3. - Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des sous-modules irréductibles d'un Λ -module M tels que $0 = X_1 \cap \dots \cap X_n$ et 0 n'étant intersection d'aucune sous-famille des X_i . Alors

a. $E(M/X_i)$ est un Λ -module injectif indécomposable ;

b. $E(M) = E(M/X_1) \otimes \dots \otimes E(M/X_n)$.

La propriété (a) résulte immédiatement de la proposition 1. Soient φ_i l'application canonique $M \rightarrow M/X_i$ et $\varphi = (\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$,

$$\varphi_i : m \rightarrow [\varphi_1(m) \dots \varphi_n(m)] \quad .$$

φ est une application injective de M dans $E = E(M/X_1) \otimes \dots \otimes E(M/X_n)$. Il nous suffit d'établir que E est une extension essentielle de $\varphi(M)$. Par hypothèse, il existe

$$n \in \bigwedge_{j \neq i} X_j \text{ avec } n \notin X_i \quad ;$$

par suite,

$$\varphi(M) \cap M/X_i \neq 0 \quad .$$

D'après la proposition 1, on sait que $E(M/X_i)$ est l'enveloppe injective de $\varphi(M) \cap M/X_i$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$. Pour toute composante non nulle x_i , il existe $a_i \in \Lambda$ tel que $a_i x_i \in \varphi(M) \cap M/X_i$ avec $a_i x_i \neq 0$, et, par suite, il existe $s \in \Lambda$ tel que $sx \neq 0$ et avec $sx \in \varphi(M)$. E est une extension essentielle de $\varphi(M)$.

Avec des hypothèses analogues, si $X = X_1 \cap \dots \cap X_n$, alors

$$E(M/X) = E(M/X_1) \otimes \dots \otimes E(M/X_n) \quad .$$

Remarque. - Si M est un Λ -module noethérien, 0 est intersection d'un nombre fini de sous-modules irréductibles.

PROPOSITION 4. - Soit Λ un anneau noethérien à gauche ; tout Λ -module injectif M est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables.

Soit C un sous-module maximal, somme directe de sous-modules injectifs indécomposables. Alors $C = M$; sinon, il existe $x \in P$, $x \notin C$; soit $O(X)$ annulateur de x , Λ noethérien, par suite, $O(x) = X_1 \cap \dots \cap X_n$, où les X_i sont des idéaux irréductibles de Λ , $O(X)$ n'étant intersection d'aucune sous-famille des X_i .

$$E(A/O(X)) = E(\Lambda x) = E(A/X_1) \otimes \dots \otimes E(A/X_n)$$

le sous-module de M , $C \otimes E(A/X_1) \otimes \dots \otimes E(A/X_n)$ est somme directe de modules injectifs indécomposables, ce qui contredit le caractère maximal de C .

2. Le théorème d'Azumaya.

THÉORÈME. - La décomposition d'un module M en somme directe de sous-modules injectifs et indécomposables est unique à un automorphisme près de M .

Soit

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i$$

une telle décomposition ; on va prouver que tout sous-module N injectif indécomposable est isomorphe à un M_i ,

$$M = N \otimes P \quad .$$

Soient f et f' les applications canoniques de M dans N et P . On a

$$1 = f + f', \quad f \circ f' = f' \circ f = 0 \quad .$$

Il existe $i_1, \dots, i_s \in I$ tel que

$$N \cap M_{i_1} \otimes \dots \otimes M_{i_s} \neq 0 \quad .$$

LEMME. - Soit A un anneau des endomorphismes de M , $f, f' \in A$ tels que $f + f' = 1$. Alors, pour tout système d'indices fini i_1, \dots, i_s , il existe des sous-modules P_1, \dots, P_s tels que :

a. Pour tout k , f ou f' induise un isomorphisme de $M_k \rightarrow P_k$.

b. $M = P_1 \otimes \dots \otimes P_s \otimes \left(\bigotimes_{i \neq i_k} M_i \right)$.

Soit $li_1 : M \rightarrow M_{i_1}$ la projection de M sur M_{i_1} parallèlement aux autres facteurs.

$$li_1 = li_1 \circ f + li_1 \circ f' ,$$

et, par suite,

$$li_1 \circ f \text{ ou } li_1 \circ f'$$

induit un isomorphisme sur M_{i_1} . Supposons que $li_1 \circ f$ induit cet isomorphisme

$$P_1 = f(M_{i_1}) \cong M_{i_1}$$

et li_1 induit un isomorphisme de P_1 sur M_{i_1}

$$\text{Ker } li_1 = \left(\bigotimes_{i \neq i_1} M_i \right) ,$$

par suite,

$$M = P_1 \otimes \left(\bigotimes_{i \neq i_1} M_{i_1} \right) ;$$

en itérant le procédé, on obtient le résultat.

Appliquons le lemme à la situation précédente. f' annule $N \cap M_{i_1} \otimes \dots \otimes M_{i_s}$ et, par suite, ne peut définir un isomorphisme de $M_{i_1} \otimes \dots \otimes M_{i_s}$ sur $P_{i_1} \otimes \dots \otimes P_{i_s}$; on en conclut que, pour au moins un k , f est un isomorphisme. $M_{i_k} \rightarrow P_k$; N étant un module injectif indécomposable, il s'en suit $P_k = N$.

Montrons l'unicité de cette décomposition à un automorphisme près de M . Soit $M = \bigotimes_{j \in J} N_j$ une autre décomposition de M en somme directe de sous-modules injectifs et indécomposables, d'après ce qui précède, tout N_j est isomorphe à un M_i , et réciproquement tout M_i est isomorphe à un N_j .

Deux indices de I (resp. J) seront dits équivalents s'ils définissent des sous-modules isomorphes. Les classes de I et de J se correspondent biunivo-

quement, et on notera K , l'ensemble de ces classes ; tout $k \in K$ définit une classe $[I(k), J(k)]$, tout revient à prouver que $\text{card } I(k) = \text{card}[J(k)]$.

α . $\text{card}[I(k)]$ fini. - Soient $j_1 \in J(k)$ et f_1 la projection de M sur N_{j_1} ; en utilisant ce qui précède, il existe $i_1 \in I$ tel que f_1 soit un isomorphisme¹ de M_{i_1} sur N_{j_1} et on a

$$(1) \quad M = M_{i_1} \star \left(\bigotimes_{j \neq j_1} N_j \right) \quad .$$

Si j_1 est le seul élément de $j(k)$, on a

$$\text{card}[I(k)] \geq \text{card}[J(k)]$$

d'où l'égalité ; sinon, on recommence l'opération. D'où, finalement,

$$\text{card}[I(k)] \geq \text{card}[J(k)]$$

et, par suite,

$$\text{card}[I(k)] = \text{card}[J(k)] \quad .$$

β . $\text{card}[I(k)]$ infini. - Soit f_j la projection de M sur N_j , parallèlement aux autres facteurs.

$$M_i = \sup_J (M_i \cap \bigotimes_{j \in L} N_j)$$

où L parcourt les familles finies de J . Par suite, $M_i \cap \text{Ker } f_j = 0$ pour un nombre fini de j ; pour tout i , il existe un nombre fini de j tel que f_j soit un isomorphisme de M_i sur N_j ; soit $j(i) = \{j\}$ cet ensemble. Quand i parcourt $i(k)$, les $j(i)$ recouvrent $j(k)$. $\text{card}[I(k)]$ infini, par suite,

$$\text{card}[I(k)] \geq \text{card}[J(k)] \quad .$$

3. Modules isotypiques.

DÉFINITION 2. - On dit que X est un sous-module isotypique de M , si $E(M/X)$ est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables tous isomorphes.

Remarque. - $E(M/X)$ est isotypique au sens de N. BOURBAKI.

Soit I un sous-module isotypique "dont les composantes" sont isomorphes à π , module injectif indécomposable. π est le type de I , on dit que I est π -isotypique.

PROPOSITION 5. - L'intersection de deux sous-modules π -isotypiques est un sous-module π -isotypique.

$X = X_1 \cap X_2$, $E(M/X) \subset E(M/X_1) \otimes E(M/X_2)$ et $E(M/X)$ est facteur direct de $E(M/X_1) \otimes E(M/X_2)$; le théorème d'Azumaya entraîne la propriété.

Cette propriété permet, dans une décomposition comme intersection de sous-modules isotypiques, de rassembler les sous-modules de même type. On obtient ainsi une décomposition réduite, c'est-à-dire une décomposition comme intersection de sous-modules isotypiques de types tous différents sans élément superflu.

PROPOSITION 6. - Tout sous-module d'un module artinien ou noethérien admet une décomposition réduite comme intersection de sous-modules isotypiques. Soient deux décompositions de X

$$X = I_1 \cap \dots \cap I_n = I'_1 \cap \dots \cap I'_{n'},$$

alors $n = n'$ et les types des I_i sont les mêmes que ceux des I'_j .

Ces propriétés sont les conséquences des théorèmes précédents.

4. Applications aux anneaux commutatifs.

THÉORÈME 2. - Soit A un anneau commutatif noethérien, il y a correspondance biunivoque entre les idéaux primaires de A et les modules injectifs indécomposables. $P \leftrightarrow E(A/P)$ si Q est un idéal irréductible P -primaire, alors

$$E(R/Q) \simeq E(R/P) \quad .$$

Soit P un idéal premier de A ; alors P est irréductible et, par suite, $E(A/P)$ est un A -module injectif et indécomposable. Soient P_1 et P_2 deux idéaux premiers tels que $E(A/P_1) \simeq E(A/P_2) = E$. On plonge A/P_1 et A/P_2 dans E , et on a $A/P_1 \cap A/P_2 \neq 0$; c'est un sous-module qui a pour annulateur P_1 et P_2 ; par suite $P_1 = P_2$.

Soit Q un idéal irréductible P -primaire; il existe n tel que $P^n \subset Q$, n étant le plus petit entier tel que P^n a la propriété. Il existe $b \in P^{n-1}$, $b \notin Q$; soit \bar{b} l'image de b dans A/Q . Soit $O(\bar{b})$ l'annulateur de \bar{b} ; il est clair que $O(\bar{b}) \supset P$. D'autre part, $a \in O(\bar{b})$. Alors $ab \in Q$ et, par suite, $a \in P$; d'où finalement

$$O(\bar{b}) = P \quad .$$

$$E(A/Q) \simeq E(A/P) \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).
 - [2] ECKMANN (B.) und SCHOPF (A.). - Über injektive Moduln, Archiv der Math., t. 4, 1953, p. 75-78.
 - [3] GABRIEL (Pierre). - Objets injectifs dans les catégories abéliennes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 12, 1958/59, n° 17, 32 p.
 - [4] GABRIEL (Pierre). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962 [à paraître] (Thèse Sc. math. Paris. 1961).
 - [5] MATLIS (Eben). - Injective modules over noetherian rings, Pacific J. Math., t. 8, 1958, p. 511-528.
-