CLAUDE JOULAIN

Sur les anneaux non commutatifs. II. Anneaux noethériens et artiniens à gauche

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, n° 2 (1961-1962), exp. n° 14, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_2_A3_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
15e année, 1961/62, n° 14

12 mars 1962

SUR LES ANNEAUX NON COMMUTATIFS
II. ANNEAUX NOETHÉRIENS ET ARTINIENS À GAUCHE.

par Claude JOULAIN

On trouvera, dans les deux premières parties de cet exposé, les définitions et des exemples d'anneaux, de modules et de demi-groupes noethériens et artiniens. La troisième partie est consacrée à l'étude de la structure d'un anneau premier, unitaire, artinien à gauche.

Cet exposé reprend, dans ses grandes lignes, un chapitre de l'ouvrage [5].

1. Anneaux, modules, et demi-groupes noethériens.

DÉFINITION 1.1. - Un anneau A est dit noethérien à gauche (resp. à droite, bilatère), s'il vérifie la condition de chaîne ascendante (finie) pour les idéaux à gauche (resp. à droite, bilatères).

Si l'anneau A est noethérien à gauche et à droite, il est dit noethérien.

La condition de chaîne ascendante (finie) exprime que toute suite strictement croissante d'idéaux

$$X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$$

est nécessairement finie.

Elle a été introduite par E. NOETHER en 1921 (cf. [7]) dans le cas commutatif.

Cette condition de chaîne ascendante, équivaut à la condition maximale, ou encore à la condition de base finie.

La condition maximale, signifie que tout ensemble d'idéaux de A possède un élément maximal dans cet ensemble.

La condition de base finie, signifie que tout idéal dans A possède un nombre fini de générateurs.

Donnons quelques exemples d'anneaux noethériens à gauche, ou noethériens.

1° Soit l'anneau des polynômes à deux variables non permutables X et Y, à coefficients dans un corps commutatif K, dont les éléments permutent avec X et Y, avec les relations

$$XY = 0 , \qquad Y^2 = 0$$

(cf. H. CARTAN et S. EILENBERG [2]).

C'est un anneau noethérien à gauche, et non à droite. Ce n'est pas un anneau premier.

2° Si on considère l'anneau des polynômes à une variable X et à coefficients dans le corps $K(Y)$ avec les relations

$$\forall \ f(Y) \in K(Y) , \qquad Xf(Y) = f(Y^2) \ X \qquad ,$$

on obtient un anneau d'intégrité, donc premier, qui est noethérien à gauche et non à droite (cf. L. LESIEUR et R. CROISOT [6], exemple 1).

3° Dans le cas commutatif, on a un exemple important d'anneau noethérien : c'est l'anneau $K[X_1 , \dots , X_n]$ des polynômes à n variables permutables. Le théorème de la base finie a été démontré, en 1890, par D. HILBERT [4].

4° Dans le cas non commutatif, on a comme exemple important d'anneau noethérien, l'algèbre enveloppante $\Lambda(L)$ d'une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif K . Cet anneau s'obtient de la façon suivante :

On considère l'anneau Λ des polynômes à n variables X_i $(i = 1 , 2 , \dots , n)$ non permutables, à coefficients dans un corps commutatif K . On impose la relation

$$X_i \, X_j - X_j \, X_i = L_{i,j}(X)$$

où $L_{i,j}(X)$ est une forme linéaire donnée

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{k} \, X_k \qquad (i < j) \qquad .$$

$\Lambda(L)$ est l'anneau quotient obtenu.

Si les formes $L_{i,j}(X)$ sont toutes nulles, $\Lambda(L)$ est un anneau commutatif, sinon $\Lambda(L)$ est un anneau non commutatif noethérien à gauche et à droite ; la méthode originale de Hilbert peut être utilisée pour démontrer que $\Lambda(L)$ est un anneau d'intégrité, noethérien à gauche et à droite.

5° Tout anneau quotient d'un anneau noethérien à gauche, tout produit fini d'anneaux noethériens à gauche, sont des anneaux noethériens à gauche.

Pour les modules, on a la définition suivante.

DÉFINITION 1.2. - Un A-module à gauche M est dit noethérien, s'il vérifie la condition de chaîne ascendante pour les sous-modules.

Un exemple assez général de A-module à gauche noethérien, est fourni par la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 1.1. - Un A-module à gauche M, unitaire, de type fini sur un anneau A noethérien à gauche, est noethérien.

On raisonne par récurrence sur le nombre p des générateurs $(x_1 , x_2 , \ldots , x_p)$ de M.

1° $p = 1$. - Alors $M = Ax_1$; soit M_n un sous-module de M. Considérons l'idéal à gauche :

$$I_n = M_n \cdot\!\cdot\, x_1 = \{a \in A \,;\ \ ax_1 \in M_n\} \quad .$$

On a : $I_n x_1 = M_n$.

Considérons une suite strictement croissante de sous-modules M_n, on a

$$M_n \subset M_{n+1} \implies I_n \subset I_{n+1} \quad .$$

La suite d'idéaux à gauche I_n est donc finie ; il en est de même de la suite de sous-modules M_n.

2° Supposons la propriété vraie pour $p - 1$. - Soit $M = Ax_1 + Ax_2 + \ldots + Ax_p$.

M_n étant un sous-module de M, on considère l'idéal à gauche I_n, constitué par les a_1 tels qu'il existe

$$a_2 , a_3 , \ldots , a_n \in A \quad \text{avec} \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \in M_n \quad .$$

Si on considère une suite croissante de sous-modules M_n, les idéaux à gauche I_n forment une suite croissante, donc stationnaire à partir d'un certain rang m.

On a

$$k \geqslant m \implies I_k = I_m \quad .$$

Supposons $k \geqslant n$, et soit $x \in M_k$,

$$x = a_1 x_1 + \dots + a_p x_p \in M_k \quad ,$$

d'où

$$a_1 \in I_k \implies a_1 \in I_n \implies \exists \; b_2 , b_3 , \dots , b_p \in \Lambda$$

avec

$$y = a_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_p x_p \in M_n \quad .$$

On a : $M_n \subseteq M_k$, d'où

$$x - y \in M_k \cap (\Lambda x_2 + \dots + \Lambda x_p)$$

et

$$M_k = M_n + M_k \cap (\Lambda x_2 + \dots + \Lambda x_p) \qquad \forall \; k \geqslant n \quad .$$

Une suite strictement croissante de sous-modules de M définit donc une suite strictement croissante de sous-modules de $\Lambda x_2 + \dots + \Lambda x_p$; une telle suite est finie, d'après l'hypothèse d'induction, la propriété en résulte pour p.

Pour un demi-groupe, on a la définition :

DÉFINITION 1.3. - Un demi-groupe D est dit noethérien à gauche (resp. à droite, bilatère), s'il vérifie la condition de chaîne ascendante pour les idéaux à gauche (resp. à droite, bilatères).

Si le demi-groupe D est noethérien à gauche et à droite, il est dit noethérien.

Exemple. - Dans l'ensemble N des entiers naturels, on pose $ab = \max(a , b)$. On obtient un demi-groupe noethérien.

2. Anneaux, modules, et demi-groupes artiniens.

DÉFINITION 2.1. - Un anneau Λ est dit artinien à gauche (resp. à droite, bilatère) s'il vérifie la condition de chaîne descendante pour les idéaux à gauche (resp. à droite, bilatères).

Un anneau artinien à gauche et à droite est dit artinien.

L'expression d'anneau artinien a été donnée en raison des travaux de E. ARTIN (cf. [1]) publiés en 1927. La condition de chaîne descendante exprime que toute suite strictement décroissante d'idéaux est nécessairement finie. Elle équivaut à la condition minimale : tout ensemble d'idéaux possède un idéal minimal dans cet ensemble. Elle équivaut également à la condition : toute intersection infinie d'idéaux est égale à une intersection finie.

Exemple. - L'anneau M_n des matrices carrées d'ordre n, sur un corps K, est un anneau artinien ; c'est également un anneau noethérien. En effet, M_n est un espace vectoriel E à gauche sur K de dimension finie n^2. Un idéal à gauche de M_n est, en particulier, un sous-espace de E ; et les sous-espaces de E vérifient les conditions de chaîne ascendante et de chaîne descendante. De plus, M_n est un anneau premier, dans lequel le seul idéal bilatère propre est l'idéal nul.

Ceci résulte de la propriété suivante :

$$\text{Si } a \neq 0 , \ \exists \ x_i , y_i \text{ tels que } 1 = \sum_{i=1}^{n} x_i a y_i$$

(cf. B. L. VAN DER WAERDEN [8]).

En résumé, on a :

PROPRIÉTÉ 2.1. - L'anneau M_n des matrices carrées d'ordre n, sur un corps quelconque K, est un anneau artinien premier, unitaire.

DÉFINITION 2.2. - Un A-module à gauche est dit artinien, s'il vérifie la condition de chaîne descendante, pour les sous-modules.

Un exemple de A-module à gauche, artinien, est fourni par la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 2.2. - Un A-module à gauche, unitaire, de type fini, sur un anneau artinien à gauche est artinien.

La démonstration est analogue à celle de la propriété 1.1 dans le cas noethérien.

DÉFINITION 2.3. - Un demi-groupe D est dit artinien à gauche (resp. à droite, bilatère) s'il vérifie la condition de chaîne descendante pour les idéaux à gauche (à droite, bilatères).

Un demi-groupe est dit artinien, s'il est artinien à gauche et à droite.

Exemple. - Dans l'ensemble D des entiers naturels, complétés par ∞ , on pose :

$$ab = \min(a , b) \quad ,$$

on obtient un demi-groupe artinien avec élément unité, et non noethérien.

Le demi-groupe obtenu en posant

$$ab = \max(a , b)$$

est noethérien, mais n'est pas artinien.

3. Structure d'un anneau premier, unitaire, artinien à gauche.

On a donné dans la deuxième partie (propriété 2.1), un exemple d'anneau premier, unitaire, artinien : l'anneau M_n des matrices carrées d'ordre n sur un corps K (ou encore l'anneau $\mathcal{L}_K(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie sur K).

Nous allons montrer que réciproquement, tout anneau premier, unitaire, artinien à gauche, peut être obtenu de cette façon.

THÉORÈME. - Pour qu'un anneau A soit premier, unitaire, artinien à gauche, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n , sur un corps K .

On doit donc montrer que tout anneau premier, unitaire, artinien à gauche, est isomorphe à l'anneau $\mathcal{L}_K(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E , de dimension finie, sur un corps K .

Soit A un anneau premier, unitaire, artinien à gauche, et soit M un idéal minimal de A . Considéré comme A-module à gauche, M est un A-module simple. D'après le lemme de Schur, l'anneau $\mathcal{L}_A(M)$ des endomorphismes de M est donc un corps K .

$\forall\ \alpha \in K$ et $\forall\ x \in M$, posons $\alpha(x) = x\alpha$. M devient alors un espace vectoriel à droite E , sur le corps K .

Si $a \in A$, l'homothétie $f_a : x \to ax$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E sur K . Nous allons montrer que l'application $a \to f_a$ est un isomorphisme de A sur $\mathcal{L}_K(E)$. C'est évidemment un homomorphisme.

1° $a \to f_a$ <u>est une surjection</u>.

Démontrons d'abord le lemme de densité qui s'énonce :

LEMME de densité. - <u>Soient</u> $x_1, x_2, \ldots, x_n$ <u>des éléments de</u> E, <u>linéairement indépendants sur</u> K, <u>et soient</u> $y_1, \ldots, y_n$ <u>des éléments quelconques de</u> E. <u>Il existe</u> $a \in A$ <u>tel que</u> :

$$ax_i = y_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \quad .$$

La démonstration de ce lemme utilise la relation suivante :

$$(1) \qquad 0 \mathbin{.^\circ} \left(\bigcap_{i=1}^{n} 0 \mathbin{^\circ.} x_i\right) = x_1 K + x_2 K + \ldots + x_n K$$

dans laquelle $0 \mathbin{^\circ.} x_i$ représente l'annulateur de x_i dans A et $0 \mathbin{.^\circ} S$ représente l'annulateur de $S \subseteq A$ dans E.

On établit cette relation (1) en raisonnant par récurrence sur n.

<u>$n = 1$</u>. - On a

$$x_1 K \subseteq 0 \mathbin{.^\circ} (0 \mathbin{^\circ.} x_1) \quad ,$$

car

$$ax_1 = 0 \implies ax_1 \alpha = 0 , \ \forall \ \alpha \in K \quad ,$$

d'où

$$x_1 \alpha \in 0 \mathbin{.^\circ} (0 \mathbin{^\circ.} x_1) \quad .$$

On a

$$0 \mathbin{.^\circ} (0 \mathbin{^\circ.} x_1) \subseteq x_1 K \quad .$$

Soit $y \in 0 \mathbin{.^\circ} (0 \mathbin{^\circ.} x_1)$,

$$ax_1 = 0 \implies ay = 0 \quad .$$

Ceci permet la définition de l'application α : $ax_1 \to ay$ qui est un automorphisme de M ; en effet, $Ax_1 = M$. $\forall\ a \in A$, on a donc $ax_1\,\alpha = ay$, et, si a est l'unité de A,

$$x_1\,\alpha = y \qquad y \in x_1 K \quad .$$

<u>La relation (1) est supposée vraie pour</u> $n-1$.

On a

$$x_1 K + x_2 K + \dots + x_n K \subseteq 0 \mathbin{.^{\bullet}} \left(\bigcap_{i=1}^{n} 0 \mathbin{^{\bullet}.} x_i\right) \quad ;$$

en effet,

$$ax_i = 0 \implies ax_i\,\alpha_i = 0 \qquad i = 1\,,\,2\,,\,\dots\,,\,n \quad .$$

Inversement, montrons que

$$0 \mathbin{.^{\bullet}} \left(\bigcap_{i=1}^{n} 0 \mathbin{^{\bullet}.} x_i\right) \subseteq x_1 K + \dots + x_n K \quad .$$

Soit $y \in 0 \mathbin{.^{\bullet}} \left(\bigcap_{i=1}^{n} 0 \mathbin{^{\bullet}.} x_i\right)$, alors

$$ax_1 = ax_2 = \dots = ax_n = 0 \implies ay = 0 \quad .$$

On considère $I_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} (0 \mathbin{^{\bullet}.} x_i)$; pour tous les $a \in I_n$, c'est-à-dire vérifiant $ax_1 = ax_2 = \dots = ax_{n-1} = 0$, on peut définir l'application α : $ax_n \to ay$. α est un automorphisme de M ; en effet, on a $I_n x_n = M$, sinon, on aurait $I_n x_n = 0$ et $ax_n = 0$, $\forall\ a \in I_n$, ce qui entraînerait $x_n \in 0 \mathbin{.^{\bullet}} I_n = x_1 K + \dots + x_{n-1} K$ (d'après l'hypothèse d'induction). Ceci est contraire à l'hypothèse " $x_1, x_2, \dots, x_n$ linéairement indépendants sur K ". On a donc $\forall\ a \in I_n$,

$$ax_n\,\alpha = ay \implies a(y - x_n\,\alpha) = 0$$

$$\implies y - x_n\,\alpha \in 0 \mathbin{.^{\bullet}} I_n \implies y \in x_1 K + \dots + x_n K \quad .$$

La relation (1) est ainsi démontrée.

Le lemme de densité en résulte ; $\forall\ i$, on peut choisir a_i tel que

$$a_i x_i \neq 0 \qquad a_i x_j = 0 \qquad i \neq j \quad .$$

De plus, comme $Aa_i x_i = M$, on peut choisir, $\forall\ i$, un élément b_i tel que $b_i a_i x_i = y_i$.

En posant

$$a = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i \quad ,$$

on a alors $y_i = ax_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

D'où le lemme de densité.

E <u>est de dimension finie sur</u> K. En effet, la relation (1) montre qu'à la suite strictement croissante de sous-espaces, $x_1 K + x_2 K + \ldots + x_n K$, correspond la suite strictement décroissante d'idéaux à gauche $\bigcap_{i=1}^{n} 0 \,{}^{\bullet}.\, x_i$.

Une telle suite est donc finie, et E est de dimension finie sur K.

E étant de dimension finie sur K, il résulte du lemme de densité que tout endomorphisme de E est une homothétie et, par conséquent, que

$$a \to f_a \quad \text{est une surjection} \qquad .$$

2° $a \to f_a$ <u>est une bijection.</u>

Soit $ax = bx$, $\forall\ x \in E$, alors $(a - b)\,M = 0$; soit $(a - b)\,AM = 0$ et, A étant premier, ceci entraîne $a = b$.

$a \to f_a$ est un isomorphisme de A sur $\mathcal{L}_K(E)$, et le théorème est établi.

COROLLAIRE 1. - Si A est un anneau unitaire artinien à gauche, et si $\mathfrak{P}$ est un idéal bilatère premier, $\mathfrak{P}$ est un idéal bilatère maximal.

En effet, $A/\mathfrak{P}$ est unitaire, premier, artinien à gauche, donc isomorphe à l'anneau M_n, et l'idéal 0 est un idéal bilatère maximal de $A/\mathfrak{P}$.

COROLLAIRE 2. - Tout anneau premier, unitaire, artinien à gauche, est artinien et noethérien.

DÉFINITION 3.1. - Un anneau premier, unitaire, artinien à gauche est appelé <u>anneau simple</u>.

PROPRIÉTÉ 3.1. – Tout anneau artinien unitaire est un anneau de Jacobson (c'est-à-dire un anneau dans lequel le radical $\mathcal{R}(\mathfrak{J})$ de Baer et McCoy d'un idéal bilatère est égal au radical de Jacobson $\mathcal{R}_J(\mathfrak{J})$). On a déjà $\mathcal{R}(\mathfrak{J}) \subseteq \mathcal{R}_J(\mathfrak{J})$ (cf. exposé n° 13 : I. Radical). D'après le corollaire 1, tout idéal bilatère premier est maximal ; de plus, tout idéal bilatère maximal est primitif, A étant unitaire. $\mathcal{R}(\mathfrak{J})$ est donc une intersection d'idéaux bilatères primitifs, et contient donc $\mathcal{R}_J(\mathfrak{J})$. D'où $\mathcal{R}(\mathfrak{J}) = \mathcal{R}_J(\mathfrak{J})$.

On démontre une propriété plus forte que le corollaire 2 :

Tout anneau unitaire artinien à gauche est noethérien à gauche (cf. L. LESIEUR et R. CROISOT [5]). Ce qui est faux pour les demi-groupes, comme le montre l'exemple du § 2.

La structure d'un anneau premier noethérien à gauche n'est pas aussi simple.

A. W. GOLDIE [3] a montré qu'un anneau premier noethérien à droite et à gauche possède un anneau de quotients à droite et à gauche qui est un anneau M_n premier artinien, unitaire.

L. LESIEUR et R. CROISOT ont montré qu'un anneau premier, noethérien à gauche, possède un anneau de quotients à gauche qui est un anneau M_n.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (Emil). – Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, Abh. math. Sem. Hamburg. Univ., t. 5, 1927, p. 251-260.

[2] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). – Homological algebra. – Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[3] GOLDIE (A. W.). – The structure of prime rings with maximum conditions, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 44, 1958, p. 584-586.

[4] HILBERT (David). – Über die Theorie der algebraischen Formen, Math. Annalen, t. 36, 1890, p. 473-534.

[5] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). – Algèbre noethérienne non commutative. – Paris, Gauthier-Villars (Mémorial des Sciences mathématiques) (à paraître).

[6] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). – Sur les anneaux premiers noethériens à gauche, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 76, 1959, p. 161-183.

[7] NOETHER (Emmy). – Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Annalen, t. 83, 1921, p. 24-66.

[8] VAN DER WAERDEN (B. L.). – Algebra. Teil 1., 4te Auflage und Teil 2., 3te Auflage der "Modernen Algebra". – Berlin, Springer-Verlag, 1955 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 33 und 34).