Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

Julien Querré

Équivalences de fermeture dans un demi-groupe résidutif

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, nº 1 (1961-1962), exp. nº 3, p. 1-31

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_1_A3_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
15e année, 1961/62, n° 3

27 novembre et 4 décembre 1961

ÉQUIVALENCES DE FERMETURE DANS UN DEMI-GROUPE RÉSIDUTIF

par Julien QUERRÉ

Les résultats que je me propose de présenter font partie d'un projet de thèse dont le point de départ est la notion d'équivalence de fermeture. L'équivalence de fermeture paraît être un outil assez intéressant pour l'étude de certaines structures algébriques ordonnées.

Pour justifier ce point de vue, j'envisage dans un premier exposé de donner les principales propriétés des équivalences de fermeture et quelques applications. Un second exposé sera entièrement consacré à l'étude des r-systèmes d'idéaux de Lorenzen-Prüfer à l'aide d'équivalences de fermeture.

1. Demi-groupe résidutif.

G étant un demi-groupe, c'est-à-dire un ensemble muni d'une opération interne associative notée multiplicativement, on dit qu'une relation d'ordre $\leqslant$ définie sur G est compatible avec sa structure de demi-groupe si

$$a \leqslant b \implies ax \leqslant bx \quad ,$$

et

$$xa \leqslant xb \ , \quad \forall \ a \ , b \ , x \in G \quad .$$

G muni d'une telle structure d'ordre est dit demi-groupe ordonné.

Le demi-groupe ordonné G est dit résidutif si, pour tout couple a , b d'éléments de G , les deux conditions suivantes sont réalisées :

a. Il existe un élément $x \in G$ tel que $bx \leqslant a$, et l'ensemble des x ayant cette propriété admet un élément maximum noté $a \,.^{\cdot}\, b$ et appelé le résiduel à droite de a par b ;

b. Il existe un élément $y \in G$ tel que $yb \leqslant a$, et l'ensemble des y ayant cette propriété admet un élément maximum noté $a \,^{\cdot}.\, b$ et appelé le résiduel à gauche de a par b .

Un élément $a \in G$ sera dit <u>équirésiduel</u> si $a \mathbin{.^{\bullet}} x = a \mathbin{^{\bullet}.} x$, $\forall\ x \in G$, on écrira $a : x$. En particulier si tous les éléments de G sont équirésiduels, G est commutatif.

L'ensemble des parties d'un demi-groupe, ordonné par l'inclusion est un demi-groupe résidutif pour la multiplication des parties.

2. Propriétés de l'opérateur résiduation dans un demi-groupe résidutif.

G étant un demi-groupe résidutif, on obtient sans difficulté les propriétés suivantes :

a. $a \leq b$ entraîne $\left|\begin{array}{l} a \mathbin{.^{\bullet}} x \leq b \mathbin{.^{\bullet}} x \\ x \mathbin{.^{\bullet}} b \leq x \mathbin{.^{\bullet}} a \end{array}\right.$ et $\begin{array}{l} a \mathbin{^{\bullet}.} x \leq b \mathbin{^{\bullet}.} x \\ x \mathbin{^{\bullet}.} b \leq x \mathbin{^{\bullet}.} a \end{array}$,

b.

$$\left\{\begin{array}{l} x(a \mathbin{.^{\bullet}} x) \leq a \\ (a \mathbin{^{\bullet}.} x)\, x \leq a \end{array}\right. \quad \text{égalité si} \quad \begin{array}{l} a = x\alpha \\ a = \alpha x \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a \leq xa \mathbin{.^{\bullet}} x \\ a \leq ax \mathbin{^{\bullet}.} x \end{array}\right. \quad \text{égalité si} \quad \begin{array}{l} a = \alpha \mathbin{.^{\bullet}} x \\ a = \alpha \mathbin{^{\bullet}.} x \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a \leq x \mathbin{^{\bullet}.} (x \mathbin{.^{\bullet}} a) \\ a \leq x \mathbin{.^{\bullet}} (x \mathbin{^{\bullet}.} a) \end{array}\right. \quad \text{égalité si} \quad \begin{array}{l} a = x \mathbin{^{\bullet}.} \alpha \\ a = x \mathbin{.^{\bullet}} \alpha \end{array} ,$$

c.

$$\left\{\begin{array}{l} (a \mathbin{.^{\bullet}} b) \mathbin{^{\bullet}.} c = (a \mathbin{^{\bullet}.} c) \mathbin{.^{\bullet}} b \\ (a \mathbin{.^{\bullet}} b) \mathbin{.^{\bullet}} c = a \mathbin{.^{\bullet}} bc \\ (a \mathbin{^{\bullet}.} b) \mathbin{^{\bullet}.} c = a \mathbin{^{\bullet}.} cb \end{array}\right. .$$

3. Équivalences fondamentales.

Trois types d'équivalences étudiés par I. MOLINARO [13] jouent un rôle essentiel dans l'étude des demi-groupes résidutifs.

<u>Équivalences du type</u> A . - A_x à droite et ${}_xA$ à gauche définies par :

$$a \equiv b\ (A_x) \quad \text{si} \quad x \mathbin{.^{\bullet}} a = x \mathbin{.^{\bullet}} b$$
$$a \equiv b\ ({}_xA) \quad \text{si} \quad x \mathbin{^{\bullet}.} a = x \mathbin{^{\bullet}.} b \quad .$$

Ces équivalences ont les propriétés suivantes : les classes sont convexes, A_x et ${}_xA$ sont régulières pour l'union (si elle existe), A_x par exemple est régulière à droite, pour la multiplication. Quel que soit h l'élément

$$\bar{h} = x \mathbin{^\bullet\!.} (x \mathbin{.^\bullet} h)$$

est équivalent à h mod A_x, et maximum dans la classe H contenant h.

Pour que $A_x = A_y$, il faut et il suffit que tout résiduel à gauche de x soit résiduel à gauche de y et inversement.

<u>Équivalences du type</u> B. – B_x à droite et ${}_xB$ à gauche, définies par :

$$a \equiv b\ (B_x) \quad \text{si} \quad a \mathbin{.^\bullet} x = b \mathbin{.^\bullet} x$$

$$a \equiv b\ ({}_xB) \quad \text{si} \quad a \mathbin{^\bullet\!.} x = b \mathbin{^\bullet\!.} x \quad .$$

Les classes mod B_x ou ${}_xB$ sont convexes. Si G est réticulé, B_x et ${}_xB$ sont régulières par rapport à l'intersection ; B_x par exemple est régulière à droite pour la résiduation à gauche.

Quel que soit l'élément h de G, $\bar{h} = x(h \mathbin{.^\bullet} x)$ appartient à la classe H contenant h, et, est élément minimum de cette classe. Pour que $B_x = B_y$, il faut et il suffit que tout multiple à droite de x soit multiple à droite de y et inversement.

<u>Équivalences du type</u> F. – F_x à droite et ${}_xF$ à gauche, définies par :

$$a \equiv b\ (F_x) \quad \text{si} \quad xa = xb$$

$$a \equiv b\ ({}_xF) \quad \text{si} \quad ax = bx \quad .$$

Les classes mod F_x ou ${}_x F$ sont convexes ; F_x et ${}_xF$ sont régulières pour l'union si elle existe. F_x par exemple est régulière à droite pour la multiplication. Quel que soit h, l'élément $\bar{h} = xh \mathbin{.^\bullet} h$ appartient à la classe H contenant h et est élément maximum. Pour que $F_x = F_y$, il faut et il suffit que tout résiduel à droite par x soit résiduel à droite par y et inversement.

Pour interpréter les analogies remarquables existant entre ces trois types d'équivalence, introduisons les applications dans G [6]

$$a \xrightarrow{\alpha_x} \bar{a} = x \;{}^{\bullet}{}_{\bullet}\; (x \;{}_{\bullet}{}^{\bullet}\; a) \qquad a \xrightarrow{{}_x\alpha} \bar{a} = x \;{}_{\bullet}{}^{\bullet}\; (x \;{}^{\bullet}{}_{\bullet}\; a)$$

$$a \xrightarrow{\beta_x} \bar{a} = x(a \;{}_{\bullet}{}^{\bullet}\; x) \qquad a \xrightarrow{{}_x\beta} \bar{a} = (a \;{}^{\bullet}{}_{\bullet}\; x)\; x$$

$$a \xrightarrow{\gamma_x} \bar{a} = xa \;{}_{\bullet}{}^{\bullet}\; x \qquad a \xrightarrow{{}_x\gamma} \bar{a} = ax \;{}^{\bullet}{}_{\bullet}\; x \quad .$$

Les applications α_x , ${}_x\alpha$, γ_x , ${}_x\gamma$ sont des fermetures, c'est-à-dire des applications

croissante : $a \leqslant \bar{a}$, idempotente : $\bar{\bar{a}} = \bar{a}$, isotone : $a \leqslant b$ entraîne $\bar{a} \leqslant \bar{b}$.

Les applications β_x , ${}_x\beta$ sont des antifermetures c'est-à-dire des applications

décroissante $\bar{a} \leqslant a$, idempotente, isotone .

On vérifie sans difficulté que α_x et ${}_x\alpha$ sont les applications associées aux équivalences A_x et ${}_xA$ c'est-à-dire

$$a \equiv b \ (A_x) \iff \alpha_x(a) = \alpha_x(b)$$

de même

$$a \equiv b \ (B_x) \iff \beta_x(a) = \beta_x(b)$$

$$a \equiv b \ (F_x) \iff \gamma_x(a) = \gamma_x(b) \quad .$$

Remarque. - L'équivalence d'Artin définie dans un gerbier avec élément unité et résidutif ([7], p. 240) est une équivalence du type A .

4. Équivalences de fermeture.

Les résultats précédents suggèrent d'introduire et d'étudier les équivalences de fermeture et d'antifermeture les plus générales.

Soit donc G un ensemble muni de la relation d'ordre $\leqslant$ et φ une fermeture au sens de MOORE donc une application $a \xrightarrow{\varphi} \bar{a}$ de G en lui-même, croissante, idempotente et isotone. Un élément f sera dit fermé pour φ , s'il coïncide avec son image $\bar{f}$.

Convenons de noter H_φ l'équivalence de fermeture définie par

$$a \equiv b \ (H_\varphi) \iff \overline{a} = \overline{b} \quad .$$

Ces équivalences ont les propriétés immédiates suivantes ; les classes sont convexes, $\overline{h}$ est équivalent à h mod H_φ et est l'élément maximum de la classe H contenant h. Enfin les équivalences H_φ sont fortement régulières supérieurement (FRS) ([7], p. 178).

Bien entendu si $\overline{G}_\varphi$ est l'ensemble des fermés, φ est une surjection de G dans $\overline{G}_\varphi$ et comme on peut identifier chaque classe modulo H_φ à son élément maximum, $\overline{G}_\varphi$ est isomorphe à G/H_φ, φ étant l'application canonique de G sur G/H_φ.

Par exemple en utilisant les règles de calcul de 2.

$$\overline{G}_{\alpha_x} = \{x \,\dot{\cdot}\, a \ , \ \forall \ a\} \ , \quad \overline{G}_{{}_x\alpha} = \{x \,\dot{\cdot}\, a \ , \ \forall \ a\}$$
$$\overline{G}_{\gamma_x} = \{a \,\dot{\cdot}\, x \ , \ \forall \ a\} \ , \quad \overline{G}_{{}_x\gamma} = \{a \,\dot{\cdot}\, x \ , \ \forall \ a\} \quad .$$

On conçoit de même la possibilité de définir une <u>équivalence d'antifermeture</u> associée à l'application d'antifermeture ψ et notée H_ψ $a \xrightarrow{\varphi} \overline{a}$.

Les classes sont encore convexes, h est équivalent à h modulo H_ψ et est l'élément minimum de la classe H contenant h.

On a

$$\overline{G}_{\beta_x} = \{xa \ , \ \forall \ a\} \quad \text{et} \quad \overline{G}_{{}_x\beta} = \{ax \ , \ \forall \ a\} \quad .$$

Donnons un exemple simple d'équivalence de fermeture n'appartenant pas aux types A et F. Si R est un anneau commutatif et J l'ensemble des idéaux, à tout idéal I correspond un sur-idéal noté $\sqrt{I}$, appelé radical de I, et défini par la propriété caractéristique suivante : $\sqrt{I}$ est l'intersection de tous les idéaux premiers qui contiennent I.

Dans J l'application $I \xrightarrow{\varphi} \sqrt{I}$ est une application de fermeture. On peut donc introduire l'équivalence $I \equiv J \ (H_\varphi) \iff \sqrt{I} = \sqrt{J}$. Les éléments fermés dans φ c'est-à-dire les idéaux égaux à leurs radicaux, sont les idéaux semi-premiers. Donc dans chaque classe mod H_φ, il existe un idéal semi-premier et un seul, élément maximum de la classe et radical de tous les éléments de la classe.

Si l'ensemble des fermetures est ordonné par la relation $\varphi \leq \varphi'$

$$\varphi(x) \leqslant \varphi'(x) \quad \forall \quad x \in G \quad .$$

On a

$$\varphi \leqslant \varphi' \quad \text{entraîne} \quad H_\varphi \subseteq H_{\varphi'} \quad .$$

L'équivalence H_φ est dite plus fine que l'équivalence $H_{\varphi'}$.

5. Opérations dans l'ensemble des fermés.

Soient G une algèbre muni d'une ou plusieurs opérations isotones par rapport à la relation d'ordre $\leqslant$, φ une fermeture, H_φ l'équivalence de fermeture associée et $\overline{G}_\varphi$ l'ensemble des fermés.

A toute opération $\perp$ définie dans G , associons une φ-opération notée $\overline{\perp}$ dans $\overline{G}_\varphi$ définie par

$$\overline{a} \mathbin{\overline{\perp}} \overline{b} = \overline{\overline{a} \perp \overline{b}} \quad .$$

Retenons les résultats suivants dans le cas où G est un treillis.

THÉORÈME 5.1. - La φ-intersection coïncide avec l'intersection et la φ-union est définie par $\overline{a} \mathbin{\overline{\cup}} \overline{b} = \overline{a \cup b}$. De plus $\overline{G}_\varphi$ est un treillis pour les opérations $\overline{\cap}$ et $\overline{\cup}$.

L'interprétation donnée par LESIEUR [10] du théorème de Glivenko entre dans le cadre des résultats précédents.

Soit Ω un treillis distributif complet vérifiant la loi de $\cap$-distributivité générale,

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} x_\alpha\right) \cap y = \bigcup_{\alpha \in A} (x_\alpha \cap y) \quad .$$

$\bigcup_{\alpha \in A} x_\alpha$ est le plus petit majorant du sous-ensemble $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Un tel treillis s'appelle un treillis distributif pseudo complémenté (BIRKHOF [3] p. 147). Si l'on se donne en effet un élément quelconque a , il existe un élément maximum a^* parmi les éléments x qui vérifient la relation $a \cap x = 0$. Cet élément a^* s'appelle le pseudo complémenté de a . Les hypothèses faites sur Ω permettent de le considérer commu un demi-groupe résidutif entier commutatif, en prenant pour multiplication l'opération intersection. L'élément a^* est alors le résiduel $0 : a$.

Considérons alors la fermeture α_0 et notons $\vee$ et $\wedge$ la φ-union et la φ-intersection dans $\overline{\Omega}_{\alpha_0}$

$$\overline{a} \vee \overline{b} = \overline{\overline{a} \cup \overline{b}} \quad \text{et} \quad \overline{a} \wedge \overline{b} = \overline{a} \cap \overline{b} \quad .$$

$\overline{\Omega}_{\alpha_0}$ est l'ensemble des pseudo-compléments. D'après le théorème 5.1 c'est un treillis distributif de Boole avec élément nul et universel et on sait que Ω est homomorphe à $\overline{\Omega}_{\alpha_0}$ c'est le résultat énoncé par Glivenko.

Reprenons l'exemple du paragraphe 4.

$$I \equiv J \ , \quad (H_\varphi) \iff \sqrt{I} = \sqrt{J} \quad .$$

Compte tenu des propriétés des radicaux [17] on montre que H_φ est régulière pour l'intersection, l'addition, la multiplication. De plus les classes modulo H_φ sont idempotentes.

Le théorème 5.1 montre le résultat classique suivant : l'ensemble des idéaux semi-premiers est un treillis homomorphe au treillis des idéaux.

6. Équivalences de fermeture régulières [15].

Tous les théorèmes qui vont être énoncés, admettent des théorèmes "symétriques" par échange convenable de "à droite" et "à gauche" et de "fermeture" et antifermeture".

THÉORÈME 6.1. - G étant groupoïde, dont l'opération notée multiplicativement est isotone, l'équivalence de fermeture (H_φ) est régulière à droite pour l'opération, si et seulement si $\overline{a}b \leq \overline{ab}$ pour $\forall$ a , et $b \in G$.

La condition est nécessaire. - En effet si (H_φ) est régulière à droite pour l'opération,

$$a \equiv \overline{a} \ (H_\varphi) \quad \text{entraîne} \quad ab \equiv \overline{a}b \ (H_\varphi)$$

d'où

$$\overline{a}b \leq \overline{ab} \quad .$$

La condition est suffisante. - En effet

$$a \equiv a' \ (H_\varphi) \quad \text{entraîne} \quad \overline{a} = \overline{a'}$$

puis

$$\overline{a}b = \overline{a'}b \qquad ,$$

mais, selon la condition,

$$ab \leqslant \overline{a}b \leqslant \overline{ab}$$

implique, d'après la convexité des classes,

$$ab \equiv \overline{a}b \equiv \overline{a'}b \equiv \overline{ab} \ (H_\varphi) \qquad .$$

De même

$$a'b \leqslant \overline{a'}b = \overline{a}b \leqslant \overline{a'b} \quad \text{entraîne} \quad a'b \equiv \overline{a'}b \equiv \overline{ab} \equiv \overline{a'b} \ (H_\varphi) \qquad ,$$

d'où finalement

$$ab \equiv a'b \ (H_\varphi) \qquad .$$

<u>Remarques.</u>

a. Si l'opération est anti-isotone la condition de régularité à droite est

$$ab \leqslant \overline{\overline{a}b} \qquad .$$

Si l'opération est isotone, la condition de régularité à droite est pour une équivalence d'antifermeture

$$\overline{ab} \leqslant \overline{a}b \qquad .$$

b. La condition $\overline{a}b \leqslant \overline{ab}$ de régularité à droite de l'équivalence H_φ pour la multiplication a déjà été rencontrée indépendamment des équivalences H_φ par de nombreux auteurs. Elle a été mise en évidence dans l'arithmétique des domaines d'intégrité et des groupes ordonnés par les travaux de PRÜFER [14], KRULL [9] et, LORENZEN [11], Plus récemment K. G. AUBERT [2] a adopté cette condition comme un axiome de base d'une théorie des idéaux qui dépasse sensiblement le cadre arithmétique jusqu'ici envisagé.

THÉORÈME 6.2. - G <u>étant un groupoïde résidutif à droite, l'équivalence de fermeture (H_φ) est régulière à gauche pour la multiplication si et seulement si l'ensemble $\overline{G}_\varphi$ des éléments fermés est permis à droite pour la résiduation.</u>

Etablissons l'équivalence des conditions

$$a\overline{b} \leq \overline{ab}$$

et

$$\overline{a} \mathbin{\cdot\!\!^{\bullet}} b \in \overline{G}_\varphi \quad .$$

Tout d'abord si (H_φ) est régulière à gauche pour la multiplication, $c = \overline{a} \mathbin{\cdot\!\!^{\bullet}} b$ est un élément fermé. En effet on a

$$b\overline{c} \leq \overline{bc} \leq \overline{a}$$

car

$$bc = b(\overline{a} \mathbin{\cdot\!\!^{\bullet}} b) \leq \overline{a}$$

et

$$\overline{\overline{a}} = \overline{a} \quad \text{d'où} \quad \overline{c} \leq \overline{a} \mathbin{\cdot\!\!^{\bullet}} b = c \quad .$$

Mais d'après la croissance de φ,

$$c \leq \overline{c}$$

d'où

$$c = \overline{c} \quad .$$

Réciproquement

$$b \leq ab \mathbin{\cdot\!\!^{\bullet}} a \leq \overline{ab} \mathbin{\cdot\!\!^{\bullet}} a \quad ,$$

d'où, d'après les propriétés des résiduels,

$$\overline{b} \leq ab \mathbin{\cdot\!\!^{\bullet}} a \quad ,$$

ce dernier étant fermé ; d'où

$$a\overline{b} \leq \overline{ab} \quad .$$

THÉORÈME 6.3. – <u>G étant un groupoïde résidutif et H_φ une équivalence de fermeture régulière à droite pour la multiplication on a</u> $H_\varphi \subseteq \cap A_\omega \quad \omega \in \overline{G}_\varphi$.

$\omega \in \overline{G}_\varphi$ et soit $a \equiv b(H_\varphi)$, on a d'après la régularité à droite pour la multiplication

$$a(\omega \mathbin{.\!^\bullet} b) \equiv b(\omega \mathbin{.\!^\bullet} b) \quad .$$

Mais

$$b(\omega \mathbin{.\!^\bullet} b) \leq \omega \quad .$$

Donc la classe de $b(\omega \mathbin{.\!^\bullet} b)$ coupe la section commençante de ω , donc y est contenue tout entière

$$a(\omega \mathbin{.\!^\bullet} b) \leq \omega \text{ entraîne } \omega \mathbin{.\!^\bullet} b \leq \omega \mathbin{.\!^\bullet} a \quad .$$

On montrerait de même que

$$\omega \mathbin{.\!^\bullet} a \leq \omega \mathbin{.\!^\bullet} b$$

d'où

$$a \equiv b \ (H_\varphi) \text{ entraîne } a \equiv b \ (A_\omega) \ \forall \ \omega \in \overline{G}_\varphi \quad .$$

Appliquons ces résultats aux équivalences fondamentales du type A et F . Si G est réticulé A_x , ${}_xA$, F_x et ${}_xF$ sont régulières pour l'union ; A_x et F_x sont régulières à droite pour la multiplication et ${}_xA$ et ${}_xF$ sont régulières à gauche.

Enfin le théorème 6.3 permet d'établir :

$${}_xF \subseteq \cap_{\mu \mathbin{.\!^\bullet} x}A \qquad F_x \subseteq \cap A_{\mu \mathbin{.\!^\bullet} x} \qquad \forall \ \mu \in G$$

$$A_x \subseteq \cap A_{x \mathbin{.\!^\bullet} \mu} \qquad {}_xA \subseteq \cap_{x \mathbin{.\!^\bullet} \mu}A \qquad \forall \ \mu \in G \quad .$$

7. Équivalences de fermeture simplifiables [16].

THÉORÈME 7.1. — G étant un demi-groupe, résidutif à droite, l'équivalence de fermeture H_φ est simplifiable à gauche pour la multiplication si et seulement si l'on a

$$a \equiv \overline{xa} \cdot^\circ x \ (H_\varphi) \quad \forall \ a \quad \text{et} \quad x \in G \quad .$$

En effet

$$xa \equiv xb \ (H_\varphi) \quad \text{entraîne} \quad \overline{xa} = \overline{xb} = \overline{u} \quad ;$$

et d'après l'hypothèse, on a

$$a \equiv \overline{u} \cdot^\circ x \ (H_\varphi) \quad \text{et} \quad b \equiv \overline{u} \cdot^\circ x \ (H_\varphi)$$

d'où

$$a \equiv b \ (H_\varphi) \quad .$$

Réciproquement

$$xa \leq xa \quad \text{implique} \quad a \leq xa \cdot^\circ x \leq \overline{xa} \cdot^\circ x$$

d'où

$$xa \leq x(\overline{xa} \cdot^\circ x) \leq \overline{xa} \quad .$$

Donc, d'après la convexité des classes,

$$\text{modulo } (H_\varphi) \quad xa \equiv x(\overline{xa} \cdot^\circ x) \ (H_\varphi)$$

et comme H_φ est simplifiable on a

$$a \equiv \overline{xa} \cdot^\circ x \ (H_\varphi) \quad .$$

THÉORÈME 7.2. — G étant un demi-groupe résidutif à droite la condition $\overline{a} = \overline{xa} \cdot^\circ x$, quels que soient a et x appartenant à G est nécessaire et suffisante pour que l'équivalence H_φ soit à la fois régulière et simplifiable à gauche pour la multiplication.

Si H_φ est simplifiable à gauche pour la multiplication, d'après le théorème 1, cela implique

$$a \equiv \overline{xa} \mathbin{.^{\bullet}} x \; (H_\varphi) \quad .$$

Si de plus H_φ est régulière à gauche pour la multiplication, $\overline{xa} \mathbin{.^{\bullet}} x$ est un élément fermé. (Théorème 6.2) donc

$$\overline{a} = \overline{xa} \mathbin{.^{\bullet}} x \quad .$$

Réciproquement

$$\overline{a} = \overline{xa} \mathbin{.^{\bullet}} x \quad \text{entraîne} \quad x\overline{a} = x(\overline{xa} \mathbin{.^{\bullet}} x) \leq \overline{xa}$$

donc H_φ est régulière à gauche pour la multiplication (Théorème 6.1) et $\overline{xa} \mathbin{.^{\bullet}} x$ fermé dans l'application φ ; enfin

$$a \equiv \overline{xa} \mathbin{.^{\bullet}} x \; (H_\varphi)$$

c'est-à-dire que l'équivalence (H_φ) est simplifiable à gauche pour la multiplication d'après le théorème 7.1.

COROLLAIRE 7.1. - Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équivalence de fermeture A_θ soit régulière pour la multiplication et simplifiable à gauche pour la multiplication est qu'on ait

$$A_\theta = A_\theta \mathbin{.^{\bullet}} x \quad \forall \; x \in G \quad .$$

COROLLAIRE 7.2. - Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équivalence de fermeture F_θ soit régulière pour la multiplication et simplifiable à gauche pour la multiplication est qu'on ait

$$F_\theta = F_{\theta_x} \quad \forall \; x \in G \quad .$$

THÉORÈME 7.3. - Si l'équivalence de fermeture H_φ est simplifiable à gauche pour la multiplication, H_φ est moins fine que toute équivalence F_x.

Selon une formule classique de la résiduation

$$xa = x(xa \mathbin{.^{\bullet}} x)$$

et a fortiori

$$xa \equiv x(a \cdot\!\cdot\; x)\ (H\varphi) \quad .$$

Si H_φ est simplifiable à gauche pour la multiplication on a

$$a \equiv xa \cdot\!\cdot\; x\ (H_\varphi)$$

d'où

$$\bar{a} = \overline{xa \cdot\!\cdot\; x} \quad .$$

D'où

$$\varphi = \varphi\gamma_x$$

et

$$\gamma_x \leqslant \varphi$$

et d'après une remarque de 4.

$$F_x \subseteq H_\varphi \quad .$$

8. Demi-groupe $\mathfrak{a}$-nomal.

L'ensemble quotient G/H_φ peut-il être un groupe ? Ce problème est, on va le voir, lié aux recherches de I. MOLINARO sur l'$\mathfrak{a}$-nomalité. Cet auteur a en effet développé l'étude de certains demi-groupes résidutifs abéliens qu'il a appelé demi-groupes $\mathfrak{a}$-nomaux et caractérisés par l'existence d'éléments particuliers. S'il existe dans un demi-groupe résidutif abélien G une équivalence A_θ telle que

$$A_\theta = A_{\theta:\mu} \quad \forall\ \mu \in G \quad ,$$

G est dit $\mathfrak{a}$-nomal et l'équivalence A_θ est dite $\mathfrak{a}$-nomale. On montre qu'elle est unique et quelle contient toute équivalence du type A, de plus G/A_θ est un groupe.

On peut étendre ces résultats au cas d'un demi-groupe résidutif quelconque en adoptant un point de vue différent, directement lié au problèmé posé (G/H_φ est un groupe ?).

G étant un demi-groupe résidutif quelconque un élément θ sera dit α-nomal si G/A_θ est un groupe et si θ est maximum dans sa classe modulo A_θ . Un demi-grupe contenant un élément α-nomal sera dit α-nomal.

Remarquons que l'extension proposée ici s'inscrit donc dans la ligne de ce que G. MAURY appelle la "caractérisation A " de la condition "intégralement clos" d'une structure algébrique. Mais son intérêt est double les résultats pourront s'appliquer à des structures non commutatives et à des structures sans élément neutre [12].

G étant un demi-groupe résidutif quelconque, si les ensembles

$$\{x \mathbin{.\!^{\bullet}} x \,,\ \forall\ x \in G\} \quad \text{et} \quad \{x \mathbin{^{\bullet}\!.} x \,,\ \forall\ x \in G\}$$

ont un élément maximum commun, nous conviendrons de l'appeler élément bimaximum de G . Cet élément quand il existe possède des propriétés remarquables ; en particulier, il est équirésiduel c'est-à-dire

$$\varepsilon \mathbin{.\!^{\bullet}} x = \varepsilon \mathbin{^{\bullet}\!.} x \quad \forall\ x \qquad ,$$

ce qui va nous permettre d'obtenir le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME 8.1. - L'élément bimaximum s'il existe est α-nomal.

Notons ε cet élément bimaximum.

Premier point.

$$A_{\varepsilon : x} = A_\varepsilon \qquad .$$

On a

$$(\varepsilon : x) \mathbin{^{\bullet}\!.} (\varepsilon : x) \leq \varepsilon \qquad .$$

Mais

$$(\varepsilon \mathbin{^{\bullet}\!.} x) \mathbin{^{\bullet}\!.} (\varepsilon \mathbin{^{\bullet}\!.} x) = \varepsilon \mathbin{^{\bullet}\!.} (\varepsilon \mathbin{^{\bullet}\!.} x)\, x \geq \varepsilon : \varepsilon = \varepsilon \qquad .$$

Donc

$$\varepsilon = (\varepsilon : x) \mathbin{^{\bullet}\!.} (\varepsilon : x)$$

et ε, résiduel à gauche de $\varepsilon : x$, est fermé dans $\alpha_{\varepsilon:x}$, c'est-à-dire élément maximum dans sa classe modulo $A_{\varepsilon\cdot .x}$ et $A_{\varepsilon\cdot .x} \subseteq A_\varepsilon$. Mais on sait que

$$A_\varepsilon \subseteq A_{\varepsilon:x}$$

d'où l'égalité.

<u>Deuxième point.</u> - A_ε est simplifiable pour la multiplication.

ε étant équirésiduel, on a

$$_\varepsilon A = A_\varepsilon = A_{\varepsilon:x} = {}_{\varepsilon:x}A \qquad ;$$

ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que A_ε soit régulier pour la multiplication et simplifiable pour la multiplication.

<u>Troisième point.</u> - La classe de ε est classe unité de G/A_ε.

$$\varepsilon = \varepsilon \mathbin{.\cdot} \varepsilon \quad \text{entraîne} \quad \varepsilon \mathbin{.\cdot} \mu = \varepsilon \mathbin{.\cdot} \varepsilon\mu$$

d'où

$$\mu \equiv \varepsilon\mu \equiv \mu\varepsilon \ (A_\varepsilon) \qquad .$$

<u>Quatrième point.</u> - Toute classe est inversible.

$$\varepsilon : \varepsilon = (\varepsilon : \mu) \mathbin{.\cdot} (\varepsilon : \mu) = \varepsilon : \mu(\varepsilon : \mu)$$

ce qui entraîne

$$\varepsilon \equiv \mu(\varepsilon : \mu) \equiv (\varepsilon : \mu)\ \mu \ (A_\varepsilon) \qquad .$$

<u>Cinquième point.</u> - ε est maximum dans sa classe modulo A_ε.

En effet

$$\varepsilon : \varepsilon = \varepsilon$$

donc résiduel à gauche de lui-même donc maximum dans sa classe modulo A_ε.

Finalement G/A_ε est un groupe et ε est élément $\mathfrak{A}$-nomal.

Les conditions obtenues pour les équivalences de fermeture simplifiables montre que s'il existe en autres, une équivalence de fermeture simplifiable à gauche pour la multiplication le demi-groupe est $\mathfrak{a}$-nomal.

THÉORÈME 8.2. – Un demi-groupe est $\mathfrak{a}$-nomal si et seulement s'il existe un élément bimaximum.

Nous pouvons donc déjà affirmer que si G/H_φ est un groupe, G est $\mathfrak{a}$-nomal. Mais il y a mieux, on peut en effet obtenir le résultat suivant :

THÉORÈME 8.3. – Si H_φ est régulière pour la multiplication, telle que G/H_φ soit un groupe, $H_\varphi = A_\varepsilon$ où ε est le bimaximum de G.

Ce résultat implique l'unicité de l'équivalence A_x tel que G/A_x soit un groupe. On convient de la noter $\mathfrak{a} = A_\varepsilon$ et de l'appeler équivalence $\mathfrak{a}$-nomale.

On montre en particulier que $A_\theta = \mathfrak{a}$ si et seulement si

$$A_\theta = A_{\theta^\bullet . \mu} = A_{\theta . ^\bullet \mu} \; , \quad \forall \quad \mu \in G \quad .$$

Retenons aussi qu'un demi-groupe résidutif G est $\mathfrak{a}$-nomal si, pour $x \in G$, il existe $m \in G$ et $\varepsilon \in G$ tel que $mx^n \leqslant \varepsilon$ entraîne $x \leqslant \varepsilon$, $\forall$ n entier.

Exemple de demi-groupe $\mathfrak{a}$-nomal. – Étant donné un système d'axes rectangulaires Ox et Oy, notons (x , y) le point d'abscisse x et d'ordonnée y. Soit G l'ensemble contenant les points

$$\begin{cases} a_{ip} = (i , p) & i \leqslant -1 \, , \; i \text{ et } p \text{ entiers} \\ b_{-1,k} = (-1 , k - \frac{1}{2}) & k \text{ entier} \end{cases} \quad .$$

Introduisons dans G la relation d'ordre

$$(i , p) \leqslant (j , q) \iff \begin{cases} i \leqslant j \\ p \leqslant q \end{cases} \quad ,$$

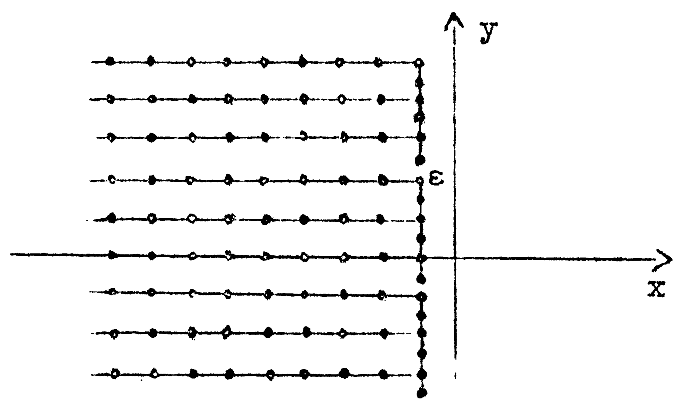
et la multiplication

$$\begin{cases} a_{ip} \cdot a_{jq} = a_{\min(i,j),\lambda n+q} & n \text{ entier positif fixé et } \lambda \text{ tel que } \lambda n \leqslant p < (\lambda+1)n \\ b_{-1,k} \cdot x = a_{-1,k} \cdot x \\ x \cdot b_{-1,k} = x \cdot a_{-1,k} & . \end{cases}$$

G est alors un demi-groupe résidutif $\mathfrak{A}$-nomal d'élément bimaximum

$$\varepsilon = a_{-1,n-1} \quad .$$

On peut représenter graphiquement la partition de l'équivalence $\mathfrak{A}$-nomale ; pour $n = 3$, on a par exemple



9. Théorèmes de décomposition dans un gerbier $\mathfrak{A}$-nomal.

La théorie classique d'Artin-Prüfer déjà généralisé par M.-L. DUBREIL-JACOTIN et P. DUBREIL est susceptible de s'étendre, moyennant des définitions convenables, aux gerbiers $\mathfrak{A}$-nomaux les plus généraux.

Notons G un demi-groupe $\mathfrak{A}$-nomal d'élément bimaximum ε . Un élément de G sera dit quasi-entier s'il est inférieur à ε . On notera G^* l'ensemble des quasi-entiers.

Un élément $p \in G^*$ sera dit premier si

$$\begin{cases} p \cdot\!\!\cdot\, p = p \,\cdot\!\!\cdot\, p = \varepsilon \\ ab \leqslant p \implies \text{soit } a \leqslant p \text{ soit } b \leqslant p \quad . \end{cases}$$

Un élément $q \in G^*$ sera dit primaire à gauche si

$$\begin{cases} q \cdot^{\circ} q = q \,^{\circ}\!\cdot q = \varepsilon \\ ab \leq q \;,\; b^n \nleq q \;,\; \forall \; n \text{ entier} \implies a \leq q \end{cases} .$$

E désignera la classe unité de G/A_ε.

Une classe $P \subseteq E$ de G/A_ε sera dite première si la relation $A.B \subseteq P$ entraîne soit $A \subseteq P$, soit $B \subseteq P$. Toute classe première est d'ailleurs maximale ([7], p. 221, th. 4).

THÉORÈME 9.1. - Toute classe première P distincte de la classe unité E a pour élément maximum un élément premier p. Tout élément premier p non équivalent à ε mod A_ε est maximum dans sa classe P ; P est alors une classe première ; De plus p est maximal mod A_ε c'est-à-dire

$$p < x \leq \varepsilon \text{ entraîne } x \equiv \varepsilon \; (A_\varepsilon) \quad .$$

Si G est demi-réticulé, G/A_ε est un groupe réticulé. Si G^*/A_ε satisfait à la condition de chaîne ascendante G^* est dit noethérien mod A_ε et dans ces conditions G/A_ε est alors commutatif et ses éléments sont représentables d'une manière unique en produits finis de puissances d'éléments premiers ([7], p. 230). D'où la généralisation suivante du théorème de décomposition d'Artin-Prüfer :

THÉORÈME 9.2. - Si G est un gerbier α-nomal et si son sous-gerbier quasi entier G^* est noethérien modulo A_ε tout élément de G^* non équivalent à ε est d'une seule façon, équivalent modulo A_ε au produit d'un nombre fini de puissances d'éléments premiers $(\not\equiv \varepsilon)$ et à l'intersection d'un nombre fini d'éléments primaires $(\not\equiv \varepsilon)$.

Un demi-groupe G résidutif sera dit vérifier la condition Φ si les conditions suivantes sont vérifiées :

a. Il existe $\varepsilon \in G$ équirésiduel tel que $\varepsilon : \varepsilon = \varepsilon$.

b. D/A_ε est un demi-groupe avec élément unité E classe de ε.

Un élément $p \in G$ sera dit complet s'il est maximum dans sa classe tel que $p \cdot^{\circ} p = p \,^{\circ}\!\cdot p = \varepsilon$.

THÉORÈME 9.3. - G vérifiant la condition Φ A_ε est l'équivalence $\mathcal{A}$-nomale si tout élément est décomposable modulo A_ε en produit d'éléments complets.

10. Demi-groupes $\mathcal{A}$-nomaux particuliers.

I. MOLINARO a introduit des demi-groupes résidutifs abéliens $\mathcal{A}$-nomaux de plus en plus particuliers [13]. Le cas non commutatif permet des résultats analogues et il est possible de donner des exemples de chaque type de demi-groupe.

Une équivalence B_x $({}_xB)$ sera dite $\mathcal{B}$-nomale à droite (à gauche) si l'on a

$$B_x = B_{\mu x} \quad \forall \ \mu \in G \ ({}_xB = {}_{x\mu}B) \quad .$$

Une équivalence B_x ou ${}_xB$ sera dite $\mathcal{B}$-nomale si

$$B_x = {}_xB = B_{\mu x} = {}_{x\mu}B \quad \forall \ \mu \in G \quad .$$

Une équivalence F_x $({}_xF)$ sera dite $\mathcal{F}$-nomale à droite (à gauche) si l'on a

$$F_x = F_{x\mu} \quad \forall \ \mu \in G \ ({}_xF = {}_{\mu x}F) \quad .$$

Une équivalence F_x ou ${}_xF$ sera dite $\mathcal{F}$-nomale si l'on a

$${}_xF = F_x = F_{x\mu} = {}_{\mu x}F \quad \forall \ \mu \in G \quad .$$

THÉORÈME 10.1. - L'équivalence B_x est $\mathcal{B}$-nomale à droite si et seulement si elle est régulière à droite pour la résiduation et simplifiable à droite pour la résiduation à droite.

L'équivalence ${}_xB$ est $\mathcal{B}$-nomale à gauche si et seulement si elle est régulière à droite pour la résiduation et simplifiable à droite pour la résiduation à gauche.

L'équivalence F_x est $\mathcal{F}$-nomale à droite si et seulement si elle est régulière pour la multiplication et simplifiable à gauche pour la multiplication.

L'équivalence ${}_xF$ est $\mathcal{F}$-nomale à gauche si et seulement si elle est régulière pour la multiplication et simplifiable à droite pour la multiplication.

D'où dans le cas abélien.

COROLLAIRE. - Une équivalence du type A est $\mathcal{A}$-nomale si et seulement si elle est simplifiable pour la multiplication.

Une équivalence du type F est $\mathcal{F}$-nomale si et seulement si elle est simplifiable pour la multiplication.

Une équivalence du type B est $\mathcal{B}$-nomale si et seulement si elle est simplifiable à droite pour la résiduation.

On établit dans chaque cas l'unicité des équivalences introduites. Ces équivalences permettent donc de caractériser des demi-groupes. Par exemple un demi-groupe sera dit $\mathcal{B}$-nomal si l'une des équivalences du type B est $\mathcal{B}$-nomale.

Retenons le résultat suivant :

THÉORÈME 10.2. - Dans un demi-groupe $\mathcal{F}$-nomal, l'équivalence $\mathcal{F}$-nomale est égale à l'équivalence $\mathcal{C}$-nomale si et seulement si le demi-groupe est $\mathcal{B}$-nomal.

On peut maintenant imposer à ces demi-groupes nomaux des conditions de plus en plus fortes. Ainsi un demi-groupe $\mathcal{A}$-nomal sera dit $\mathcal{A}$-nomalement fermé à droite si l'équivalence $\mathcal{A}$-nomale est régulière à droite pour la résiduation à droite.

Un demi-groupe $\mathcal{A}$-nomal sera dit $\mathcal{A}$-anomalement fermé s'il l'est à droite et à gauche. En particulier si un demi-groupe $\mathcal{A}$-nomalement fermé est réticulé, l'équivalence $\mathcal{A}$-nomale est régulière par rapport à l'intersection.

11. Gerbiers $\mathcal{A}$-nomaux dans quelques structures algébriques.

1° Groupes homomorphes à un demi-groupe. - Considérons l'homomorphisme $D \sim \overline{D}$ appliquant un demi-groupe D sur un autre demi-groupe $\overline{D}$, et l'équivalence d'homomorphisme $\mathcal{R}$, définie dans D par :

$$a \equiv b \ (\mathcal{R}) \text{ si } \overline{a} = \overline{b} \text{ dans } \overline{D} \quad .$$

P. DUBREIL a caractérisé les équivalences $(\mathcal{R})$ tel que $\overline{D} = \overline{G}$, $\overline{G}$ étant un groupe, c'est-à-dire les équivalences fournissant tous les groupes homomorphes à D [5].

Ces résultats sont obtenus à l'aide d'une résiduation "mixte" d'un complexe de D par un élément de D. La nature même de la question suggère une interprétation de ces résultats dans le cadre de l'$\mathcal{A}$-nomalité. Cette interprétation est possible grâce à un transfert des propriétés dans l'ensemble des parties du demi-groupe.

Un complexe X d'un demi-groupe D sera dit minoré suivant le complexe Y s'il existe un $\alpha \in D$ tel que $\alpha x \in Y$ pour tout $x \in X$. On conviendra de noter B_Y l'ensemble des complexes minorés suivant le complexe Y. En particulier toute partie minorée d'un groupe préordonné est minorée suivant le sous-demi-groupe des entiers. On notera aussi que

$$X \subseteq Y \mathbin{.\!^{\bullet}} \alpha \quad .$$

Un complexe K d'un demi-groupe D est dit réflectif si $xy \in K$ entraîne $yx \in K$ pour tout x et $y \in D$. Il est unitaire si $k \in K$ et xk et $ky \in K$, x et $y \in K$.

THÉORÈME 11.1. – L'ensemble $\mathcal{B}_K$ des parties, d'un demi-groupe D, minorées suivant un demi-groupe réflectif $K \subsetneq D$ est un sous-demi-groupe résidutif de l'ensemble des parties de D.

En particulier si K est unitaire $\mathcal{B}_K$ est $\mathcal{A}$-nomal.

Résiduation et multiplication sont prises au sens classique dans l'ensemble des parties de D. Soient X et $Y \in \mathcal{B}_K$ avec $\alpha x \in K$ et $\beta y \in K$ pour $\forall\ x \in X$ et $\forall\ y \in Y$. Comme K est un demi-groupe réflectif $\beta\alpha xy \in K$ et $XY \in \mathcal{B}_K$. Si $z \in X \mathbin{.\!^{\bullet}} Y$ on a $yz \in X$ pour $\forall\ y \in Y$ et $\alpha yz \in K$ donc pour un y fixé tel que $\alpha y = \gamma$, $\gamma z \in K$ et $X \mathbin{.\!^{\bullet}} Y \in \mathcal{B}_K$. De même $X \mathbin{^{\bullet}\!.} Y \in \mathcal{B}_K$.

Si K est unitaire, soit $m \in D$ tel que $mX \subsetneq X$. Il existe x' et x appartenant à X tel que $mx = x'$ et donc

$$\alpha mx = \alpha x' \in K$$

d'où, K étant réflectif, $mx\alpha \in K$; enfin comme $x\alpha \in K$, avec K unitaire, $m \in K$ et

$$X \mathbin{.\!^{\bullet}} X \subsetneq K \quad \forall \quad X \in \mathcal{B}_K \quad ;$$

K est donc élément bimaximum et $\mathcal{B}_K$ est un demi-groupe $\mathcal{A}$-nomal.

Soient U un sous-demi-groupe normal et unitaire d'un demi-groupe D, $\mathcal{A}$ l'équivalence $\mathcal{A}$-nomale dans $\mathcal{B}_U$ et $\mathcal{R} = \mathcal{R}_U = {}_U\mathcal{R}$ l'équivalence principale attachée à U!.

THÉORÈME 11.2. - <u>Les ensembles-quotients</u> $\mathcal{B}_U/\mathcal{A}$ <u>et</u> $D/\mathcal{R}$ <u>sont isomorphes.</u>

a. Toute classe modulo $\mathcal{R}$ appartient à $\mathcal{B}_U$ $a \equiv b\ (\mathcal{R})$ entraîne $a^* a \equiv a^* b\ (\mathcal{R})$ avec $a^* a \in U$ et $U \mathbin{.\!\cdot} a^* a = U \mathbin{.\!\cdot} a^* b$. Or si

$$m \in U \mathbin{.\!\cdot} a^* a \quad ,$$

$$a^* am \in U$$

et, comme U est unitaire, $m \in U$, donc,

$$U \mathbin{.\!\cdot} a^* b \subset U \quad \text{et} \quad a^* b \in U$$

pour $\forall$ b appartenant à A classe de a, qui est donc minorée suivant U.

b. Toute classe modulo $\mathcal{R}$ est fermée dans l'application de fermeture associée à $\mathcal{A}$. Si

$$x \in U \mathbin{\cdot\!.} (U \mathbin{.\!\cdot} A)\ A \in D/\mathcal{R}$$

et

$$y \in U \mathbin{.\!\cdot} A$$

on a

$$Ay \subset U$$

et si $a \in A$,

$$ay \quad \text{et} \quad xy \in U$$

d'où

$$y \in U \mathbin{.\!\cdot} a \quad \text{et} \quad U \mathbin{.\!\cdot} x \quad .$$

Mais U étant fort

$$U \mathbin{.\!\cdot} a = U \mathbin{.\!\cdot} x \quad \text{et} \quad x \in A$$

donc

$$A \subseteq U \mathbin{\cdot\!.} (U \mathbin{.\!\cdot} A) \subseteq A$$

d'où l'égalité.

c. Tout élément de $\mathcal{B}_U$ maximum dans sa classe modulo $\mathcal{A}$, est une classe modulo $\mathcal{R}$. Soit $X \in \mathcal{B}_U$ tel que

$$X = U \mathbin{{}^{\bullet}\!\!\cdot} (U \mathbin{\cdot\!\!{}^{\bullet}} X)$$

et a et $b \in X$. Si

$$z \in U \mathbin{\cdot\!\!{}^{\bullet}} X \quad ,$$

az et $bz \in U$ et comme U est fort

$$U \mathbin{\cdot\!\!{}^{\bullet}} a = U \mathbin{\cdot\!\!{}^{\bullet}} b$$

d'où

$$a \equiv b \ (\mathcal{R}) \quad .$$

Donc X est contenu dans une classe $\overline{X}$ modulo $\mathcal{R}$.

Soit maintenant $x \in X$ et $y \in \overline{X}$ on a

$$U \mathbin{\cdot\!\!{}^{\bullet}} x = U \mathbin{\cdot\!\!{}^{\bullet}} y \quad .$$

Or si

$$z \in U \mathbin{\cdot\!\!{}^{\bullet}} X \quad ,$$

$$xz \in U$$

ce qui implique $yz \in U$ donc

$$y \in U \mathbin{{}^{\bullet}\!\!\cdot} (U \mathbin{\cdot\!\!{}^{\bullet}} X) \quad .$$

Finalement

$$\overline{X} = X \quad \text{et} \quad D/\mathcal{R} = \overline{\mathcal{B}}_U \quad ,$$

ensemble des fermés c'est-à-dire des résiduels de U .

En particulier un <u>complexe normal est le résiduel d'un sous-demi-groupe normal et unitaire</u>.

2° Ordres réguliers maximaux. - ASANO [1] a étudié les anneaux et les demi-groupes qui sont des ordres maximaux. MAURY a montré [12] l'intérêt qu'il y a à introduire les demi-groupes $\mathfrak{a}$-nomaux dans la théorie d'Asano. Les résultats généraux, obtenus pour les gerbiers $\mathfrak{a}$-nomaux, permettent de compléter quelques points de l'étude de MAURY.

Soient $\mathcal{O}$ un demi-groupe, M le demi-groupe des éléments de $\mathcal{O}$ simplifiables des deux cotés. Un demi-groupe S est dit demi-groupe quotient à gauche de $\mathcal{O}$ selon M' si

$\mathcal{O} \subseteq S$, $M' \subseteq M$

$s \in S$

à $\forall\ \alpha \in M'$, $\exists\ \alpha^{-1} \in S$ tel que $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$

à $\forall\ x \in S$, $\exists\ \alpha \in M'$ tel que $\alpha x \in \mathcal{O}$.

Un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de S est appelé un ordre de S si

$\mathcal{O}$ forme un sous-demi-groupe avec élément unité.

S est un demi-groupe quotient de $\mathcal{O}$ par $S^* \cap \mathcal{O}$, S^* désignant l'ensemble de tous les éléments de S ayant un inverse.

Un élément de S ayant un inverse sera dit régulier.

Soit $\mathcal{O}$ un ordre de S , un sous-ensemble A de S est appelé un $\mathcal{O}$-ensemble à gauche (à droite) si l'on a $\mathcal{O}A \subseteq A$ ($A\mathcal{O} \subseteq A$) .

Un $\mathcal{O}$-ensemble à gauche (à droite) A est appelé un $\mathcal{O}$-idéal à gauche (à droite) de S , si A contient un élément régulier de S et s'il existe un élément régulier λ tel que

$$A\lambda \subseteq \mathcal{O}\ (\lambda A \subseteq \mathcal{O}) \quad .$$

Un ordre $\mathcal{O}$ de S est dit maximal si pour tout $\mathcal{O}$-idéal bilatère A on a

$$\mathcal{O} = A \mathbin{.^{\bullet}} A = A \mathbin{^{\bullet}.} A \quad .$$

Un ordre $\mathcal{O}$ de S est dit régulier, quand pour chaque élément x de S , il existe des éléments réguliers α et β de $\mathcal{O}$ tels que $x\mathcal{O}\alpha \subseteq \mathcal{O}$ et $\beta\mathcal{O}x \subseteq \mathcal{O}$.

THÉORÈME 11.3. - *Les $\mathcal{O}$-ensembles à gauche forment un demi-groupe résidutif à gauche.*

Les $\mathcal{O}$-ensembles bilatères forment un demi-groupe résidutif.

L'ensemble des $\mathcal{O}$-idéaux bilatères d'un ordre régulier $\mathcal{O}$ de S est un gerbier résidutif.

On a aussi la caractérisation suivante d'un ordre régulier maximal :

THÉORÈME 11.4. - *Pour que $\mathcal{O}$, ordre régulier, soit ordre maximal, il faut et il suffit qu'il soit élément bimaximum du gerbier résidutif des $\mathcal{O}$-idéaux bilatères.*

Ce gerbier est alors $\mathfrak{a}$-intégralement fermé, c'est-à-dire que $\mathcal{O}$ est élément neutre et

$$A \cdot\!\!. A = A .\!\!\cdot A = \mathcal{O}$$

pour tout $\mathcal{O}$-idéal bilatère A. On retrouve un résultat d'ASANO à savoir que :

L'équivalence $\mathfrak{a}$-nomale est régulière pour l'intersection, puisque cela est vrai pour un demi-groupe $\mathfrak{a}$-nomalement fermé donc a fortiori pour un demi-groupe $\mathfrak{a}$-intégralement fermé.

Soient $\mathcal{O}$ un ordre maximal régulier, G le gerbier des $\mathcal{O}$-idéaux bilatères, G^* celui des $\mathcal{O}$-idéaux bilatères entiers et $\mathcal{R}$ l'auivalence $\mathfrak{a}$-nomale.

Conformément à 9, un élément P de G^* sera dit premier si

$$AB \subseteq P \text{ entraîne soit } A \subseteq P \text{ soit } B \subseteq P .$$

Les théorèmes 9.1 et 9.2 peuvent s'énoncer ici :

THÉORÈME 11.5. - *Tout $\mathcal{O}$-idéal premier P, d'un ordre maximal régulier $\mathcal{O}$ non équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}$ est maximum dans sa classe $\overline{P}$ et cette classe ~~est~~ première dans $G/\mathcal{R}$. Toute classe première $\overline{P}$ de $G/\mathcal{R}$ différente de $\mathcal{O}$ classe de $\mathcal{O}$ a pour élément maximum un $\mathcal{O}$-idéal premier $P \not\equiv \mathcal{O}(\mathcal{R})$. De plus P est maximal mod $\mathcal{R}$ c'est-à-dire*

$$P \subset X \subseteq \mathcal{O} \text{ entraîne } X \equiv \mathcal{O} \ (\mathcal{R}) \quad .$$

THÉORÈME 11.6. - Si G^* est noethérien mod $\mathcal{R}$, tout $\mathcal{O}$-idéal bilatère entier, non équivalent à $\mathcal{O}$ est d'une seule façon équivalent mod $\mathcal{R}$ au produit d'un nombre fini de puissances de $\mathcal{O}$-idéaux premiers $(\not\equiv \mathcal{O}\ (\mathcal{R}))$.

3° Demi-groupe intégralement clos abélien. - Soient D un demi-groupe abélien avec unité, D' un demi-groupe contenant D. Appelons idéal fractionnaire de D dans D', tout sous-ensemble non vide A' de D' tel qu'il existe

$$\mu \in D \text{ entraînant } \mu A' \subseteq D \quad .$$

On montre sans difficulté que l'ensemble (Ω) des idéaux fractionnaires d'un demi-groupe D est un sous-demi-groupe résidutif de l'ensemble des parties de D'.

Convenons qu'un élément $x \in D'$ sera dit entier sur D s'il existe $\lambda \in D$ tel que $x^p \lambda \in D$ $\forall$ p entier naturel. D est dit intégralement clos si tout élément de D' entier sur D appartient à D.

THÉORÈME 11.7. - Un demi-groupe D abélien avec unité est intégralement clos dans un demi-groupe D' si et seulement si, l'ensemble des idéaux fractionnaires de D dans D' est $\mathcal{A}$-nomal, d'élément bimaximum D.

Notons (Ω) l'ensemble des idéaux fractionnaires et soit x un entier sur D ; considérons

$$X = (x , x^2 , x^3 \dots) \quad .$$

Il existe λ tel que $\lambda x^p \in D$ donc $\lambda X \subseteq D$ et $X \in (\Omega)$; comme $xX \subseteq X$ et que (Ω) est $\mathcal{A}$-nomal d'élément bimaximum D, $x \in D$.

Réciproquement si D est intégralement clos $D \in (\Omega)$ tel que, $D = D^2$. Soit M un idéal fractionnaire idempotent et $m \in M = M^2$ donc m^2 et, plus généralement, toute puissance de m appartient à M. Il résulte que m est entier et $m \in D$ donc $M \subseteq D$. Elément idempotent maximum dans (Ω), D est élément bimaximum et Ω est $\mathcal{A}$-nomal.

4° Anneau complètement entier fermé dans un anneau de fractions à droite ou à gauche. - Si $A \xrightarrow{\varphi} B$ est un homomorphisme d'anneaux avec élément unité et S un système multiplicativement stable de A, on sait que (B , φ) est dit anneau de fractions à gauche de A pour S si

a. Ker φ est formé d'annulateurs à droite de S. C'est-à-dire si

$$\varphi(a) = 0 \quad \exists \quad s \in S$$

tel que $sa = 0$.

b. L'image par φ de $\forall \; s \in S$ est inversible dans B (à gauche et à droite).

c. $\forall \; b \in B$ est de la forme

$$b = [\varphi(s)]^{-1} \varphi(a) \quad a \in A \;, \quad s \in S \quad .$$

Notons pour simplifier

$$\varphi(a) = a'$$

et

$$(B \;, \varphi) = A_S \quad .$$

Supposons que $C = A - S$ soit multiplicativement permis

$$(c \in C \;, \; \begin{matrix} ac \\ ca \end{matrix} \in C \quad \forall \quad a \in A) \quad .$$

Soit C_S l'ensemble des éléments de A_S représentables par une fraction de la forme $(c' \;, s')$ où $c \in C$ et $s \in S$. Puisque, C est multiplicativement permis, toute autre fraction représentant un tel élément a aussi son numérateur image d'un élément de C.

Appelons <u>idéal fractionnaire de</u> A <u>dans</u> A_S tout sous-ensemble non vide α de A_S qui

1° est un A-module bilatère

$$x_1 \;, x_2 \in \alpha \qquad x_1 - x_2 \in \alpha$$

$$x \in \alpha \;\; \lambda \in A \implies \begin{matrix} x\lambda \\ \lambda x \end{matrix} \in \alpha \quad ;$$

2°

$$\exists \; \begin{matrix} \mu \\ \nu \end{matrix} \in S \quad \text{tel que} \quad \begin{matrix} \mu\alpha \subseteq A \\ \alpha\nu \subseteq A \end{matrix} \quad .$$

Un idéal fractionnaire sera dit régulier s'il contient au moins un élément n'appartenant pas à C_S on montre sans difficulté que : L'ensemble $\mathcal{G}$ des idéaux fractionnaires réguliers est un demi-groupe résidué.

Convenons de dire que l'anneau A est complètement entier fermé dans A_S l'ensemble $\mathcal{G}$ des idéaux fractionnaires réguliers est $\mathfrak{A}$-nomal.

Comme A est un élément de $\mathcal{G}$ et que $A = A : A$, A est le seul élément bimaximum possible. En particulier on a encore comme dans le cas commutatif :

S'il existe $\pi \in \mathcal{G}$ tel que $\pi\alpha^n \subseteq A$ $\forall$ n entier

$$\forall \quad \alpha \in \mathcal{G} \quad \text{entraîne} \quad \alpha \subseteq A \quad ,$$

$\mathcal{G}$ est complètement entier fermé. (Propriété d'un demi-groupe $\mathfrak{A}$-nomal), mais la réciproque est fausse.

La généralisation du théorème d'Artin-Prüfer pour les demi-groupes $\mathfrak{A}$-nomaux s'énoncera ici :

Si l'anneau A est complètement entier fermé dans son anneau de fractions à droite A_S et si l'ensemble des idéaux entiers réguliers de A dans A_S est noethérien modulo l'équivalence $\mathfrak{A}$-nomale, tout idéal entier régulier non équivalent à A est d'une seule façon modulo l'équivalence $\mathfrak{A}$-nomale, équivalent au produit d'un nombre fini de puissances d'idéaux premiers réguliers ($\notin$ A).

Ces résultats permettent d'étendre à un anneau non commutatif, la théorie de la S-normalité [8].

On dira que l'anneau A est S-normal si tout idéal entier régulier est congru (modulo $\mathfrak{A}_\varepsilon$ $\varepsilon = A$) à un produit d'idéaux entiers réguliers $p_i^!$.

$\mathcal{G}$ vérifie la condition Φ (en posant $\varepsilon = A$), or si $\alpha \in \mathcal{G}$ tel que

$$\mu\alpha \subseteq A \quad (A\mu)\ \alpha \subseteq A \quad \text{et} \quad (A\mu)\ \alpha \equiv \prod p_i^! \quad (\mathfrak{A}_\varepsilon)$$

mais $A\mu$ est un idéal entier régulier

$$A\mu \equiv \prod q_i^! \quad (\mathfrak{A}_\varepsilon)$$

d'où

$$\alpha \equiv \prod p_i^! \prod q_i^{!\,-1} \quad (\mathfrak{A}_\varepsilon)$$

donc tout élément de $\mathcal{T}$ est décomposable modulo Λ_ε en produit d'éléments complets, $\mathcal{T}$ est donc un demi-groupe $\mathfrak{a}$-nomal donc :

<u>Si</u> A <u>est</u> S-<u>normal</u>, $\mathcal{T}$ <u>est</u> $\mathfrak{a}$-<u>nomal</u>.

5° <u>Ensembles majeurs d'un groupe ordonné</u> [4] (chap. VI, exemples 30 à 37, p. 28.31). – Le cadre normal de cet exemple est celui des r-systèmes d'idéaux. Faisons ici une étude directe. Soit G un groupe ordonné ; pour toute partie A de G, on note m(A) l'ensemble des minorants et M(A) l'ensemble des majorants. Pour toute partie minorée non vide A de G M(m(A)) est notée $\langle A \rangle$.

On montre que l'application $A \xrightarrow{\varphi} \langle A \rangle$ est une application de fermeture dans l'ensemble $\mathcal{B}_G$ des parties minorées.

Tout ensemble M(B), où B est une partie majorée et non vide de G, est appelé un ensemble majeur dans G, donc, si A est minorée, $\langle A \rangle$ est le plus petit ensemble majeur contenant A. On pourra montrer que $\mathcal{B}_G$ est résidué et que l'ensemble $\mathfrak{M}(G)$ des ensembles majeurs est l'ensemble des fermés dans φ. On a aussi

$$\langle A + B \rangle = \langle \langle A \rangle + B \rangle \quad ,$$

c'est-à-dire

$$\langle A \rangle + B \subset \langle A + B \rangle \quad .$$

Il en résulte la régularité pour l'addition de l'équivalence

$$A \equiv B \; (\mathcal{K}_\varphi) \iff \langle A \rangle = \langle B \rangle \quad .$$

$G_+ = \langle 0 \rangle$, ensemble des éléments positifs, est élément neutre pour la φ-addition

$$(A \, , B) \to \langle A + B \rangle \quad .$$

$\mathcal{K}_\varphi$ est l'équivalence $\mathfrak{a}$-nomale, c'est-à-dire $\mathfrak{M}(G)$ est un groupe pour la φ-addition si et seulement si

$$A : A \subseteq G_+$$

ou encore

$$x + A \subset A \implies x \in G_+ \quad .$$

On sait que $\mathfrak{M}(G)$ est un groupe ordonné si et seulement si G est archimédien (les seuls éléments $x \in G$, tels que l'ensemble des nx, n entier > 0, soit minoré, sont les éléments positifs de G) d'où une caractérisation des groupes archimédiens.

THÉORÈME 11.8. - Un groupe ordonné G est archimédien si et seulement si l'ensemble de ses parties minorées est un demi-groupe $\mathfrak{a}$-nomal.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ASANO (Z.) and MURATA (K.). - Arithmetical ideal theory in semigroups, J. Inst. Polytech. Osaka, Series A, t. 4, 1953, p. 9-33.

[2] AUBERT (Karl Egil). - Contribution à la théorie des idéaux et à la théorie des valuations (Thèse Sc. math. Paris. 1957), multigraphié.

[3] BIRKOFF (Garrett). - Lattice theory. - New-York, American mathematical Society, 1948 (American mathematical Society, Colloqium Publications, 25).

[4] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, Chap. VI-VII. - Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind., 1179 ; Éléments de Mathématique, 14).

[5] DUBREIL (Paul). - Algèbre, Tome 1, 2e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

[6] DUBREIL (P.) et CROISOT (R.). - Propriétés générales de la résiduation en liaison avec les correspondances de Galois, Collectanea Mathematica, Barcelona, t. 7, 1954, p. 193-203.

[7] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

[8] GUÉRINDON (Jean). - Propriétés d'irréductibilité dans les modules, théorie multiplicative, S-normalité, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 459-522 (Thèse Sc. math. Paris. 1957).

[9] KRULL (Wolfgang). - Idealtheorie. - Berlin, J. Springer, 1953 (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, 4).

[10] LESIEUR (Léonce). - Les treillis en topologie, Séminaire Châtelet-Dubreil : Algèbre et Théorie des nombres, t. 7, 1953/54, n° 3, 11 pages.

[11] LORENZEN (Paul). - Über halbgeordnete Gruppen, Math. Z., t. 52, 1949, p. 483-526.

[12] MAURY (Guy). - La condition "intégralement clos", dans quelques structures algébriques (Thèse Sc. math. Paris. 1960), multigraphié.

[13] MOLINARO (Italico). - Demi-groupes résidutifs (Thèse Sc. math. Paris. 1956), multigraphié.

[14] PRÜFER (Heinz). - Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpen, J. reine und angew. Math., t. 168, 1952, p. 1-36.

[15] QUERRÉ (Julien). - Équivalence de fermeture dans un demi-groupe, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 252, 1961, p. 49-51.

[16] QUERRÉ (Julien). - Équivalence de fermeture simplifiable, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 252, 1961, p. 974-976.

[17] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). - Commutative algebra, Tome 1. - Princeton, Toronto, London, Van Nostrand, 1958 (The University Series in higher Mathematics).