Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Antonio Almeida Costa

Sur la théorie générale des demi-anneaux, I

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, nº 2 (1960-1961), exp. nº 24, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_2_A9_0>

SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DES DEMI-ANNEAUX, I.

par Antonio ALMEIDA COSTA

DÉFINITION. IDÉAUX. IDÉAL NUCLÉAIRE. DEMI-ANNEAUX RÉGULIERS. IDEAUX RÉGULIERS. p-SYSTÈMES ET IDÉAUX DEMI-PREMIERS. RADICAL DE BAER.

1. Définition.

On introduit dans un ensemble $\mathfrak{C} = \{a , b , c , \ldots , t , x , y , \ldots\}$ une structure de demi-anneau, si l'on donne deux opérations binaires :

1° Une somme associative $(+)$;

2° Un produit associatif $(.)$. En outre les distributivités gauche et droite sont valables :

$$a(b + c) = ab + ac \; ; \quad (b + c)\, a = ba + ca \quad .$$

Le demi-anneau sera désigné par $\mathfrak{S}$. On peut dire d'une autre façon que $\mathfrak{S} = (\mathfrak{C}/+.)$ est un système algébrique qui est un demi-groupe additif et un demi-groupe multiplicatif dans lequel les distributivités sont valables.

EXEMPLES.

1° L'ensemble des nombres naturels.

2° L'ensemble des nombres cardinaux inférieurs ou égals à un nombre cardinal infini α .

3° L'ensemble des idéaux à droite d'un anneau associatif.

4° L'ensemble des endomorphismes d'un demi-groupe multiplicatif commutatif.

5° Les ensembles finis dont voici les tableaux :

+	0	I	A
0	0	I	A
I	0	I	A
A	0	I	A ;

$\circ$	0	I	A
0	0	I	A
I	I	A	0
A	A	0	I ;

+	0	I	A	B
0	0	I	A	B
I	0	I	A	B
A	0	I	A	B
B	0	I	A	B ;

$\circ$	0	I	A	B
0	0	0	A	A
I	0	I	A	B
A	0	A	A	0
B	0	B	A	I .

6° D'une façon générale, si g est un groupe multiplicatif, on définit une structure de demi-anneau en introduisant une somme comme celle-ci : $a + b = b$, pour a et b arbitraires. Le produit est le même que dans le groupe.

Une partie d'un demi-anneau est dite un <u>sous-demi-anneau</u>, si elle est un demi-anneau.

EXEMPLES.

1° Les nombres pairs dans l'ensemble des nombres naturels.

2° Le sous-ensemble des idéaux bilatères dans l'ensemble des idéaux à droite d'un anneau associatif.

3° Le sous-ensemble des nombres cardinaux $\leqq \alpha'$ dans l'ensemble des cardinaux $\leqslant \alpha$, α et α' étant supposés infinis.

4° Le sous-demi-anneau engendré par

$$\{a_1, \ldots, a_s, \ldots, b_1, \ldots, b_t, \ldots, c_1, \ldots, c_v, \ldots\} ,$$

qui est l'ensemble des éléments de G de la forme

$$\sum a_{i_1} \ldots a_{i_p} \ldots b_{j_1} \ldots b_{j_q} \ldots c_{k_1} \ldots c_{k_2} ,$$

où la somme est finie et le nombre de facteurs de chaque terme est aussi fini.

2. Idéaux.

Un idéal à droite de $\mathfrak{S}$ est un sous-ensemble satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Si $a, b \in \mathfrak{r}$, alors $a + b \in \mathfrak{r}$;

2° Si $a \in \mathfrak{r}$ et $s \in \mathfrak{S}$, alors $as \in \mathfrak{r}$. Un idéal à gauche est défini de façon correspondante. Un idéal (ou idéal bilatère) est idéal à droite et à gauche.

EXEMPLES.

1° Les nombres pairs dans le demi-anneau des nombres naturels.

2° Les sous-idéaux d'un idéal $\mathcal{L}_0$ d'un anneau associatif forment un idéal du demi-anneau des idéaux du même anneau.

3° Les sous-idéaux à droite d'un idéal à droite R_0 d'un anneau associatif forment un idéal à droite du demi-anneau des idéaux à droite de l'anneau.

4° L'ensemble des idéaux d'un anneau associatif forme un idéal à gauche du demi-anneau des idéaux à gauche de l'anneau.

5° L'idéal vide.

6° L'idéal à droite engendré par a est l'ensemble $(a)_d = \{\sum (na + ar)\}$, où la somme est supposée finie, n est un nombre naturel et $r \in \mathfrak{S}$. Si la somme est commutative, il suffit d'écrire $(a)_d = \{na + ar\}$.

7° L'idéal engendré par a est l'ensemble $(a) = \{\sum (na + ar + sa + paq)\}$, où n et r ont la signification ci-dessus et $s, p, q \in \mathfrak{S}$. Si la somme est commutative, on a simplement $(a) = \{na + ar + sa + \sum paq\}$.

Opérations sur les idéaux. - La somme d'une famille $\{\mathfrak{r}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ d'idéaux à droite est l'ensemble d'éléments de la forme $\sum r_i$, où la somme est finie et $r_i \in \mathfrak{r}_{\alpha_i}$. Cette somme est commutative ; donc, en particulier, on a

$$(\mathfrak{r}_1 , \mathfrak{r}_2) = (\mathfrak{r}_2 , \mathfrak{r}_1) .$$

La somme est aussi associative, car on a

$$((\mathfrak{r}_1 , \mathfrak{r}_2) , \mathfrak{r}_3) = (\mathfrak{r}_1 , (\mathfrak{r}_2 , \mathfrak{r}_3)) .$$

D'une façon générale, si $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ sont deux ensembles d'éléments du demi-anneau $\mathfrak{S}$, le symbole $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_1$ représente l'ensemble des éléments de la forme $\sum c_1 c_2$, où la somme est finie. Les relations suivantes ont lieu :

$$(r_1 , r_2)\, r_3 = (r_1 r_3 , r_2 r_3) , \qquad r_3(r_1 , r_2) = (r_3 r_1 , r_3 r_2) \quad .$$

Donc : l'ensemble des idéaux à droite d'un demi-anneau est un demi-anneau dont la somme est commutative. On exclut l'idéal vide.

3. Idéal nucléaire.

Les symboles $\mathfrak{I}_d$, $\mathfrak{I}_e$, $\mathfrak{I}$ représenteront, respectivement, l'intersection de tous les idéaux à droite non vides de $\mathfrak{S}$, de tous les idéaux à gauche non vides et de tous les idéaux, également non vides. Si $\mathfrak{I}$ est l'idéal vide, $\mathfrak{I}_d$ et $\mathfrak{I}_e$ seront vides aussi. La réciproque n'est pas valable, en général. Pourtant, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Si $\mathfrak{I}_d$ (ou $\mathfrak{I}_e$) n'est pas vide, alors $\mathfrak{I}_d = \mathfrak{I}$. Prenons $t \in \mathfrak{S}$ arbitraire. On a $t\mathfrak{I}_d \supseteq \mathfrak{I}_d$, car $t\mathfrak{I}_d$ n'est pas vide. Désignons par $\mathfrak{I}_d^!$ l'ensemble des éléments contenus dans $\mathfrak{I}_d$ de telle sorte que, si $s \in \mathfrak{I}_d^!$, alors $ts \in \mathfrak{I}_d$. Cet ensemble est un idéal à droite non vide de $\mathfrak{S}$ contenu dans $\mathfrak{I}_d$. On aura $\mathfrak{I}_d^! = \mathfrak{I}_d$, donc $t\mathfrak{I}_d = \mathfrak{I}_d$. Il en résulte $\mathfrak{S}\mathfrak{I}_d = \mathfrak{I}_d$. Comme le premier membre de cette dernière égalité est un idéal de $\mathfrak{S}$, on voit que $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{I}_d$. Comme d'autre part $\mathfrak{I}_d \subseteq \mathfrak{I}$, on a $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_d$.

L'idéal $\mathfrak{I}$ reçoit le nom d'idéal nucléaire [7]. Un idéal α est aussi un demi-anneau. Par rapport à son idéal nucléaire $\mathfrak{I}(\alpha)$, on peut dire :

THÉORÈME 2. - L'idéal nucléaire $\mathfrak{I}(\alpha)$ est égal à $\mathfrak{I}$, si $\alpha \neq \Phi$. Soit α' un idéal non vide de $\mathfrak{S}$. Alors $\alpha' \cap \alpha$ est un idéal non vide de α, et on a

$$\bigcap\, (\alpha' \cap \alpha) = \alpha \cap \left(\bigcap \alpha' \right) = \alpha \cap \mathfrak{I} = \mathfrak{I} \quad ,$$

d'où

$$\mathfrak{I}(\alpha) \subseteq \mathfrak{I} \quad .$$

D'ailleurs si $\bar{\alpha}$ est un idéal non vide de α, on peut écrire $\alpha\bar{\alpha}\alpha \subseteq \bar{\alpha}$. Le premier membre de cette inclusion est un idéal non vide de $\mathfrak{S}$. Ainsi $\bigcap \bar{\alpha} \supseteq \mathfrak{I}$, c'est-à-dire, $\mathfrak{I}(\alpha) \supseteq \mathfrak{I}$. Donc :

$$\mathfrak{I}(\alpha) = \mathfrak{I} \quad .$$

EXEMPLES.

1° Dans le demi-anneau des nombres naturels, on a $\mathfrak{I} = \Phi$. Et, si on considère l'idéal (k), engendré par un nombre naturel k, il en est de même de $\mathfrak{I}((k)) = \Phi$.

2° Dans le deuxième exemple du n° 1, 5°, on voit que $\mathfrak{I}_e = \Phi$, $\mathfrak{I}_d = \mathfrak{I} = \{0, \Lambda\}$, [3].

3° On dit que $\mathfrak{S}$ a un élément zéro (et on le désigne par o) s'il existe un élément o tel que

$$a + o = o + a = a, \quad a.o = o.a = 0 \quad .$$

Dans un tel cas, on a

$$\mathfrak{I} = \{0\} = \mathfrak{I}_d = \mathfrak{I}_e \quad .$$

Le demi-anneau des idéaux d'un anneau associatif a un élément zéro. Le demi-anneau des nombres cardinaux $\leqq \alpha$ (α infini) a aussi un zéro : c'est le nombre cardinal vide.

4. <u>Demi-anneaux réguliers.</u> - $\mathfrak{S}$ est dit <u>régulier</u>, si pour tout $a \in \mathfrak{S}$, il existe $x \in \mathfrak{S}$ tel que $axa = a$. On a [4] :

THÉORÈME 1. - <u>Il faut et il suffit, pour que $\mathfrak{S}$ soit régulier, que $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{e}$ étant respectivement des idéaux à droite et à gauche arbitraires, on ait la relation</u> $\mathfrak{r}\mathfrak{e} = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{e}$.

La condition est <u>nécessaire</u> : Si $\mathfrak{S}$ est régulier, prenons $a \in \mathfrak{r} \cap \mathfrak{e}$. Alors, en supposant $axa = a$, comme $ax \in \mathfrak{r}$, $a \in \mathfrak{r}$, on voit que $axa \in \mathfrak{r}\mathfrak{e}$. Il en résulte $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{r}\mathfrak{e}$. L'inclusion réciproque est triviale.

La condition est <u>suffisante</u> : Si $\mathfrak{r}\mathfrak{e} = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{e}$, soit $a \in \mathfrak{S}$. On a

$$(a)_d \cap \mathfrak{S} = (a)_d = (a)_d \mathfrak{S} = a\mathfrak{S} , \quad \mathfrak{S} \cap (a)_e = \mathfrak{S}a .$$

L'élément a appartient à $a\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}a$. Alors

$$a \in a\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}a = a\mathfrak{S}^2 a , \quad \text{donc} \quad a = axa , \quad \text{pour un certain} \quad x \in \mathfrak{S} .$$

La caractérisation des demi-anneaux réguliers peut être faite moyennant une condition plus faible. Ainsi :

THÉORÈME 2. - <u>Pour que</u> $\mathfrak{S}$ <u>soit régulier, il faut et il suffit que, pour chaque</u> $x \in \mathfrak{S}$, <u>on ait</u>

$$(x)_d \cap (x)_e = (x)_d (x)_e .$$

Nous avons déjà vu que la condition est nécessaire. Pour voir qu'elle est suffisante, nous allons reconnaître l'inclusion suivante :

$$\mathfrak{r} \cap \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{r}\mathfrak{e} .$$

Si on prend

$$x \in \mathfrak{r} \cap \mathfrak{e} ,$$

on a

$$(x)_d \cap (x)_e = (x)_d (x)_e \subseteq \mathfrak{r}\mathfrak{e} .$$

Alors

$$x \in \mathfrak{r}\mathfrak{e} .$$

5. <u>Idéaux réguliers</u>.

Nous commençons par une remarque. Si $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont deux demi-groupes additifs contenus dans $\mathfrak{S}$, le symbole $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ représente l'ensemble des éléments de la forme $\sum (m_1^{(i)} + m_2^{(i)})$, où la somme est finie et $m_1^{(i)} \in \mathfrak{M}_1$, $m_2^{(i)} \in \mathfrak{M}_2$. Si $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont deux idéaux à droite, on voit que $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 = (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)$. Celà posé, on dit que l'idéal non vide $\mathfrak{a}$ est <u>régulier</u>, lorsque les conditions $\mathfrak{r} \supseteq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{e} \supseteq \mathfrak{a}$ entraînent $\mathfrak{a} + \mathfrak{r}\mathfrak{e} = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{e}$, ou, plus simplement, entraînent

$$\mathfrak{r} \cap \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{r}\mathfrak{e} \quad .$$

On a le critère suivant de régularité [8] :

THÉORÈME 1. - <u>L'idéal</u> $\mathfrak{a} \neq \Phi$ <u>est régulier, si et seulement si, pour chaque</u> $x \in \mathfrak{S}$, <u>on a</u> $\mathfrak{a} + (x)_d (x)_e = \mathfrak{a} + (x)_d \cap (x)_e$. La condition est <u>nécessaire</u> : On a en effet, en supposant $\mathfrak{a}$ régulier

$$\mathfrak{a} + (x)_d \cap (x)_e \subseteq (\mathfrak{a}, (x)_d) \cap (\mathfrak{a}, (x)_e) \subseteq \mathfrak{a} + (\mathfrak{a}, (x)_d)(\mathfrak{a}, (x)_e)$$

$$= \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}(x)_e + (x)_d\,\mathfrak{a} + (x)_d (x)_e = \mathfrak{a} + (x)_d (x)_e \subseteq \mathfrak{a} + (x)_d \cap (x)_e \quad .$$

La condition est <u>suffisante</u> : Prenons $\mathfrak{r} \supseteq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{e} \supseteq \mathfrak{a}$. Si $x \in \mathfrak{r} \cap \mathfrak{e}$, nous montrons qu'on a aussi $x \in \mathfrak{a} + \mathfrak{r}\mathfrak{e}$. En effet

$$x \in (x)_d \cap (x)_e \subseteq \mathfrak{a} + (x)_d \cap (x)_e = \mathfrak{a} + (x)_d (x)_e \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{r}\mathfrak{e} \quad .$$

REMARQUES.

1° L'idéal $\mathfrak{S}$ est toujours régulier.

2° Si $\mathfrak{a}$ est régulier, $\mathfrak{x} \supseteq \mathfrak{a}$ est aussi régulier.

3° Si on sait que $\mathfrak{a}$ est régulier et que $\mathfrak{r}\mathfrak{e} \supseteq \mathfrak{a}$, on peut affirmer que $\mathfrak{r}\mathfrak{e} = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{e}$.

A l'égard des relations entre demi-anneaux réguliers et idéaux réguliers, nous donnerons l'énoncé suivant :

THÉORÈME 2. - <u>Si on a</u> $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_d = \mathfrak{J}_e \neq \Phi$, <u>il faut et il suffit, pour que</u> $\mathfrak{S}$ <u>soit régulier, que l'idéal nucléaire</u> $\mathfrak{J}$ <u>soit régulier</u>. La condition est <u>nécessaire</u> : Si $\mathfrak{S}$ est régulier, on voit $\mathfrak{J} + \mathfrak{r}\mathfrak{e} = \mathfrak{J} + \mathfrak{r} \cap \mathfrak{e} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{e}$, ce qui montre que $\mathfrak{J}$ est régulier.

La condition est suffisante. Puisqu'on a $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_d \subsetneq \mathfrak{r}$, $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_e \subsetneq \mathfrak{r}$, quels que soient $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{e}$, il s'en suit $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}^2 \subsetneq \mathfrak{r}\mathfrak{e}$, donc, conformément à la remarque 3°, $\mathfrak{r}\mathfrak{e} = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{e}$.

COROLLAIRE. - En supposant $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_d = \mathfrak{I}_e \neq \Phi$, il faut et il suffit, pour que $\mathfrak{S}$ soit régulier, que tout idéal $\alpha \neq \Phi$ soit régulier.

6. Nilpuissance.

Un élément $a \in \mathfrak{S}$ est dit nilpotent ou nilélément, s'il existe une puissance a^σ tel que $a^\sigma \in \mathfrak{I}$. Cette définition permet de refaire la théorie du radical classique, celle du radical de Köthe ainsi que celle du radical de Levitzki. On doit cependant remarquer que pour les deux dernières théories on devra supposer que $\mathfrak{S}$ a une somme commutative.

Nous reprendrons seulement quelques points de la théorie de Levitzki [5]. Un idéal à droite (ou à gauche ou bilatère) est dit localement nilpotent, si un nombre fini quelconque d'éléments de l'idéal engendre un sous-demi-anneau nilpotent (c'est-à-dire : le produit d'un nombre déterminé d'éléments du sous-demi-anneau appartient toujours à $\mathfrak{I}$). On a ce

LEMME. - En supposant que $r_1 , r_2 , \dots , r_m$ est un système minimal d'éléments qui engendrent un demi-anneau non nilpotent, aucun des r_i ne peut appartenir à $\mathfrak{I}$. En effet, si r_1 , par exemple, appartient à $\mathfrak{I}$, le système $r_2 , \dots , r_m$ engendre un sous-demi-anneau non nilpotent, car, s'il y avait un σ pour lequel tout produit $\prod r_i$, avec σ éléments, et avec tous les i_j choisis dans $2 , \dots , m$ appartiendrait à $\mathfrak{I}$, le sous-demi-anneau engendré par les éléments $r_1 , r_2 , \dots , r_m$ serait tel qu'un produit de σ éléments appartiendrait à $\mathfrak{I}$. Maintenant on peut démontrer la proposition qui va suivre.

THÉORÈME 1. - Dans un demi-anneau commutatif pour la somme, la somme de deux idéaux à droite localement nilpotents, $\mathfrak{r}_1$ et $\mathfrak{r}_2$, est un idéal à droite localement nilpotent $\mathfrak{r}$. Supposons que le théorème n'est pas vrai. Alors il y aura dans $\mathfrak{r}$ un ensemble fini d'éléments $r_1 , \dots , r_m$ qui engendrent un sous-demi-anneau $\mathfrak{S}_1$ jouissant de la propriété suivante : un entier N , arbitrairement grand, étant donné, il y a toujours un produit $\prod r_{i_j} \notin \mathfrak{I}$, $(i_j = 1 , 2 , \dots , N)$, en choisissant convenablement les i_j parmi les nombres $1 , 2 , \dots , m$. Si on pose

$r_k = r_k^{(1)} + r_k^{(2)}$, où $r_k^{(1)} \in \mathfrak{r}_1$, $r_k^{(2)} \in \mathfrak{r}_2$, $(k = 1, 2, \dots, m)$, on voit que le sous-demi-anneau $\mathfrak{S}_2$, engendré par les élément $r_k^{(1)}, r_k^{(2)}$ n'est pas nilpotent, car on a $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2$. En supposant que $\{t_1, \dots, t_q\}$ est un ensemble pris dans les $r_k^{(i)}$, $(i = 1, 2)$, avec la propriété d'être minimal, parmi ceux qui engendrent des sous-demi-anneaux non nilpotents on désignera par $\mathfrak{I}_1$ le sous-demi-anneau engendré par les t_i , $(i = 1, 2, \dots, q)$. Dans les t_i on ne peut pas avoir seulement des éléments $r_k^{(1)}$ ou des éléments $r_k^{(2)}$, car les uns et les autres engendrent des sous-demi-anneaux nilpotents. On aura $q \geqq 2$. Les éléments $t_2, \dots, t_q$ engendrent un sous-demi-anneau nilpotent Z_2 ; on supposera $Z_2^{\beta} \subseteq \mathfrak{I}$. On a vu dans le lemme que $t_1 \notin \mathfrak{I}$; d'autre part, t_1 est nilpotent, ce qui permet d'écrire $t_1^{\alpha} \in \mathfrak{I}$, $\alpha > 1$. Les éléments

$$t_1^{\sigma} \cdot \prod t_{i_\sigma} , \quad \begin{cases} 0 < \sigma < \alpha ; \\ i_0 = 2, 3, \dots, q ; \\ \text{nombre de facteurs dans } \prod \leqslant \beta - 1 \end{cases} ,$$

sont en nombre fini et seront désignés avec $v_1, \dots, v_s$. Comme t_1 , en particulier, appartient à un des idéaux $\mathfrak{r}_1$ ou $\mathfrak{r}_2$, tous les éléments v_j , $(j = 1, 2, \dots, s)$, appartiennent à un tel idéal. Le sous-demi-anneau engendré par les v_j est nilpotent. D'autre part nous allons montrer que le même sous-demi-anneau est non nilpotent. De cette contradiction on conclut le théorème. Si un entier N' arbitrairement grand est donné, il est possible de trouver un produit avec facteurs v_j en nombre supérieur à N' qui n'appartient pas à $\mathfrak{I}$. Prenons $N > N'(\alpha + \beta) + \beta$ et posons $P = t_{i_1} \dots t_{i_N} \notin \mathfrak{I}$. Dans P , il ne peut pas y avoir plus de β facteurs consécutifs tous différents de t_1 ; alors P aura la forme suivante : $P = \dots (t_1^{\sigma_1} \dots)(t_1^{\sigma_2} \dots) \dots$, où les éléments de chaque parenthèse sont nécessairement des éléments v_j . Le nombre X de tels v_j satisfait à la relation

$$X\alpha + X(\beta - 1) + (\beta - 1) \geqq N > N'(\alpha + \beta) + \beta ,$$

d'où résulte

$$X(\alpha + \beta) + \beta > N'(\alpha + \beta) + \beta \quad ,$$

soit

$$X > N' \quad .$$

La démonstration précédente est due à LEVITZKI. La théorie du radical se poursuit dès lors comme pour les anneaux.

7. Idéaux premiers et m-systèmes.

La définition d'un idéal premier est donnée comme dans la théorie des anneaux. Il en est de même pour les m-systèmes [6]. M est dit un m-système d'éléments de $\mathfrak{S}$, si, en prenant a , $b \in \mathfrak{S}$, il existe $x \in \mathfrak{S}$ tel que $axb \in M$. Nous ne développerons pas les relations entre idéaux premiers et m-systèmes, car nous le ferons pour les idéaux semi-premiers et p-systèmes, en employant des raisonnements analogues [1].

8. Idéaux semi-premiers.

On dit que $\mathfrak{x}$ est semi-premier, si pour chaque idéal α tel que $\alpha^2 \subseteq \mathfrak{x}$, on a $\alpha \subseteq \mathfrak{x}$. Nous démontrerons les deux propositions qui vont suivre.

THÉORÈME 1. - En supposant $\mathfrak{x}$ semi-premier, il faut et il suffit, pour que $a \in \mathfrak{x}$, qu'on ait $\mathfrak{S}a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{x}$. On voit tout de suite que la condition est nécessaire Réciproquement, supposons $\mathfrak{x}$ semi-premier et en outre $\mathfrak{S}a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{x}$. Alors, on aura

$$(a)^3 \subseteq \mathfrak{S}a\mathfrak{S} \quad ,$$

donc

$$(a)^4 = (a)^3\,(a) \subseteq \mathfrak{S}a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{x} \quad ,$$

soit $(a)^2 \subseteq \mathfrak{x}$, $(a) \subseteq \mathfrak{x}$, $a \in \mathfrak{x}$.

THÉORÈME 2. - Pour que $\mathfrak{x}$ soit un idéal semi-premier, il faut et il suffit que $a\mathfrak{S}a \subseteq \mathfrak{x}$ entraîne $a \in \mathfrak{x}$. La condition est nécessaire : Si $\mathfrak{x}$ est demi-premier, de $a\mathfrak{S}a \subseteq \mathfrak{x}$ on tire $\mathfrak{S}a\mathfrak{S}.\mathfrak{S}a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{x}$, donc $\mathfrak{S}a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{x}$. Le théorème antérieur donne $a \in \mathfrak{x}$.

La condition est <u>suffisante</u> : Si $a\mathfrak{S}a \subseteq \mathfrak{x}$ entraîne $a \in \mathfrak{x}$, alors $\alpha^2 \subseteq \mathfrak{x}$ entraine $\alpha \subseteq \mathfrak{x}$. En effet, l'hypothèse $\alpha \nsubseteq \mathfrak{x}$, en prennant $a \in \alpha$, $a \notin \mathfrak{x}$, donnerait $a\mathfrak{S}a = (a\mathfrak{S})\, a \subseteq \alpha^2 \subseteq \mathfrak{x}$. Alors, on aurait $a \in \mathfrak{x}$. Il y a une contradiction.

REMARQUE. - De la définition d'un idéal semi-premier résulte aussi la caractérisation suivante : Pour que $\mathfrak{x}$ soit semi-premier, il faut et il suffit que $\mathfrak{x}$ soit l'ensemble réunion de tous les idéaux b_α pour lesquels $b_\alpha^\sigma \subseteq \mathfrak{x}$.

9. p-<u>systèmes</u>. -

Un p-système d'éléments est un ensemble P avec la propriété que voici : Si $c \in P$, il existe $x \in \mathfrak{S}$ tel que $cxc \in P$. L'ensemble vide est aussi un p-système. Cette définition et le théorème 2 du numéro précédent donnent immédiatement : Pour que l'idéal $\mathfrak{x}$ soit semi-premier, il faut et il suffit que l'ensemble complémentaire de $\mathfrak{x}$, en $\mathfrak{S}$, que nous désignerons par $C(\mathfrak{x})$, soit un p-système.

D'une toute autre importance pour les raisonnements ultérieurs sont les deux propositions que nous démontrerons dans ce numéro.

THÉORÈME 1. - <u>Si P_0 est un p-système et α_0 un idéal qui n'a aucun élément dans P_0 , alors tout idéal maximal η , parmi les idéaux qui contiennent α_0 et n'ont aucun élément dans P_0 , est semi-premier.</u> Les idéaux qui contiennent α_0 et n'ont aucun élément dans P_0 forment un système inductif. Si, parmi eux, η est maximal, supposons $\alpha^2 \subseteq \eta$ et $\alpha \nsubseteq \eta$. Nous allons arriver à une contradiction. Si $\alpha \nsubseteq \eta$, alors $\eta \subset (\alpha , \eta)$ et ce dernier idéal aura des éléments dans P_0 . En supposant

$$p = \sum (a_i + y_i) \in P_0 \quad ,$$

avec $a_i \in \alpha$, $y_i \in \eta$, et en supposant de plus $pxp \in P_0$, on voit que

$$\begin{aligned} pxp &= \sum_i (a_i + y_i).x.\sum_j (a_j + y_j) = \sum_i (a_i\, x + y_i\, x).\sum_j (a_j + x_j) \\ &= \sum_i (a_i\, x) \sum_j (a_j + y_j) + \sum_i (y_i\, x) \sum_j (a_j + y_i) \\ &= \sum_i \Big(\sum_j a_i\, xa_j \Big) + \sum_i \Big(\sum_j a_i\, xy_j \Big) + \sum_i \Big(\sum_j y_i\, xa_j \Big) + \sum_i \Big(\sum_j y_i\, xy_j \Big) \end{aligned}$$

se compose de termes appartenant à $\mathfrak{y}$ sauf éventuellement $\sum_i (\sum_j a_i x a_j)$. Ce dernier terme appartient à $\mathfrak{a}^2 \subseteq \mathfrak{y}$. De cette sorte $pxp \in P_0$, $pxp \in \mathfrak{y}$ contrairement au fait que P_0 et $\mathfrak{y}$ ont une intersection vide.

En vue des applications, nous donnerons maintenant la notion <u>d'idéal semi-premier minimal appartenant à un idéal</u> $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{x}$ sera un tel idéal, si on a $\mathfrak{x} \supseteq \mathfrak{a}$ et s'il n'existe pas un idéal demi-premier $\mathfrak{x}_1$ pour lequel on ait $\mathfrak{x} \supset \mathfrak{x}_1 \supseteq \mathfrak{a}$. L'existence de tels idéaux demi-premiers est assurée par ce

THÉORÈME 2. - <u>Pour que</u> $\mathfrak{x}$ <u>soit un idéal semi-premier minimal appartenant à</u> $\mathfrak{a}$, <u>il faut et il suffit que</u> $\mathfrak{x}$ <u>soit un ensemble d'éléments de</u> $\mathfrak{G}$, <u>dont le complémentaire est un</u> p-<u>système</u> $C(\mathfrak{x})$, <u>maximal parmi les</u> p-<u>systèmes qui n'ont aucun élément dans</u> $\mathfrak{a}$.

La condition est <u>nécessaire</u>, Soit $\mathfrak{x}$ un idéal semi-premier minimal appartenant à $\mathfrak{a}$. Le complémentaire $C(\mathfrak{x})$ est un p-système. Il ne peut y avoir un p-système P tel que $P \supset C(\mathfrak{x})$ et qui n'ait aucun élément dans $\mathfrak{a}$. Si le contraire était vrai, en prenant $\mathfrak{y} \supseteq \mathfrak{a}$ sans élément dans P, on aurait $P \subseteq C(\mathfrak{y})$ et $C(\mathfrak{y}) \supset C(\mathfrak{x})$, ce qui donnerait $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{y} \subset \mathfrak{x}$, soit une contradiction.

La condition est <u>suffisante</u> : Soit $\mathfrak{x}$ un ensemble tel que $C(\mathfrak{x})$ est p-système maximal sans élément dans $\mathfrak{a}$, et considérons un idéal maximal $\mathfrak{y} \supseteq \mathfrak{a}$ qui n'a aucun élément dans $C(\mathfrak{x})$. On aura $C(\mathfrak{x}) \subseteq C(\mathfrak{y})$. Mais $\mathfrak{y}$ est demi-premier, et $C(\mathfrak{y})$ est un p-système. Alors $C(\mathfrak{x}) = C(\mathfrak{y})$ et $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$. Ainsi l'ensemble $\mathfrak{x}$ est un idéal semi-premier qui contient $\mathfrak{a}$. Il ne peut pas y avoir $\mathfrak{y}_1$ tel que $\mathfrak{y} \supset \mathfrak{y}_1 \supseteq \mathfrak{a}$, avec $\mathfrak{y}_1$ semi-premier, à cause de la propriété de maximum de $C(\mathfrak{y}) = C(\mathfrak{x})$.

Cela posé, soit $\mathfrak{a}$ un idéal quelconque. Il y a toujours des idéaux semi-premiers contenant $\mathfrak{a}$, par exemple $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{a}$. Les complémentaires de ces idéaux semi-premiers sont des p-systèmes qui n'ont aucun élément dans $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{x} \supseteq \mathfrak{a}$ est un idéal semi-premier et $P_1 \supseteq C(\mathfrak{x})$ un p-système, maximal parmi les p-systèmes qui n'ont aucun élément dans $\mathfrak{a}$, on aura $C(P_1) = \mathfrak{x}_1 \subseteq \mathfrak{x}$, et $\mathfrak{x}_1$ sera alors un idéal semi-premier minimal appartenant à $\mathfrak{a}$ pour lequel $\mathfrak{x} \supseteq \mathfrak{x}_1 \supseteq \mathfrak{a}$. L'existence d'idéaux semi-premiers minimaux appartenant à $\mathfrak{a}$, dont nous avions déjà parlé, se trouve ainsi justifiée.

REMARQUE. - En fait, comme l'intersection d'idéaux semi-premiers est encore un idéal semi-premier, on pourra dire : Il y a un seul idéal semi-premier minimal appartenant à α , ou encore : Il n'y a qu'un p-système maximal, parmi les p-systèmes qui n'ont aucun élément dans l'idéal donné.

10. Relation entre m-systèmes et p-systèmes.

Un m-système est un p-système. La réciproque n'est pas vraie. Pourtant on a :

THÉORÈME 1. - Pour qu'un ensemble P soit un p-système, il faut et il suffit que P soit réunion de m-systèmes.

La condition est nécessaire : Nous partons de P , supposé p-système, et prenons $y_0 \in P$. Pour un certain $s_0 \in \mathfrak{S}$, on a $y_0 s_0 y_0 = y_1 \in P$; puis pour un certain $s_1 \in \mathfrak{S}$, on aussi $y_1 s_1 y_1 = y_2 \in P$, et on peut poursuivre. La suite $\{y_0 , y_1 , y_2 , \dots\}$ est un m-système, car : $y_0 s_0 y_0 = y_1$; $y_1 s_1 y_1 = y_2$; $y_0 s_0 y_0 s_1 y_1 = y_2$; $y_2 s_2 y_2 = y_3$; $y_1 s_1 y_1 s_2 y_2 = y_3$, etc. On construit de la sorte, en partant d'un élément arbitraire d'un p-système, un m-système qui est contenu dans celui-là. P est réunion de m-systèmes.

La condition est suffisante : On reconnait, de façon triviale, que la réunion de m-systèmes est p-système.

Soit maintenant l'ensemble $\mathfrak{M} = \{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de tous les m-systèmes contenus dans un certain ensemble $B \subseteq \mathfrak{S}$. Pour la relation d'inclusion, il s'agit d'un ensemble inductif. Donc, il y a des m-systèmes maximaux contenus dans B . On peut dire, même, que tout m-système, comme M_α , est contenu dans un m-système maximal. Si, en particulier, B est un p-système, on peut écrire $B = \bigcup M_\alpha = \bigcup M'_\sigma$, $(\sigma \in C)$, où les M'_σ sont des m-systèmes maximaux qui contiennent les M_α . Il en résulte :

THÉORÈME 2. - Pour que l'ensemble $\mathfrak{x} \subseteq \mathfrak{S}$ soit idéal semi-premier, il faut et il suffit que $\mathfrak{x}$ soit l'intersection de tous les idéaux premiers qui le contiennent.

La condition est nécessaire : Si $\mathfrak{x}$ est idéal semi-premier, $C(\mathfrak{x})$ est p-système. On a $C(\mathfrak{x}) = \bigcup M'_\sigma$, où les M'_σ sont tous les m-systèmes maximaux contenus dans $C(\mathfrak{x})$. On a aussi $\mathfrak{x} = \bigcap C(M'_\sigma)$; et comme $C(M'_\sigma)$ est un ensemble d'éléments dont le complémentaire est un m-système maximal, parmi les m-systèmes qui n'ont aucun élément dans $\mathfrak{x}$, il s'en suit que $C(M'_\sigma) = \mathfrak{p}'_\sigma$ est un idéal premier minimal appartenant à $\mathfrak{x}$. Donc $\mathfrak{x} = \bigcap \mathfrak{p}'_\sigma$, où $\mathfrak{p}'_\sigma$ parcourt tous les idéaux premiers minimaux dans les conditions indiquées. On peut dire aussi que $p^{!}_{\mathfrak{S}}$ parcourt tous les idéaux premiers contenant $\mathfrak{x}$, car chacun de ces idéaux contient un idéal premier minimal appartenant à $\mathfrak{x}$.

La condition est <u>suffisante</u> : Si $\mathfrak{x}$ est l'intersection de tous les idéaux premiers qui contiennent $\mathfrak{x}$, il s'agit d'un idéal semi-premier.

11. <u>Idéaux fortement irréductibles, idéaux réguliers et idéaux semi-premiers</u>.

On sait qu'un idéal premier est demi-premier ; alors on peut se demander un critère pour qu'un idéal semi-premier soit premier. On dit que un idéal $\mathfrak{h}$ est <u>fortement irréductible</u>, si l'inclusion $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{h}$ entraîne $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$ ou $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{h}$. La proposition suivante est valable.

THÉORÈME 1. - <u>Pour qu'un idéal semi-premier soit premier, il faut et il suffit qu'il soit fortement irréductible</u>. La condition est <u>nécessaire</u> : Si $\mathfrak{x}$ est demi-premier et premier, de $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{x}$ on déduit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{x}$, donc $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{x}$ ou $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{x}$.

La condition est <u>suffisante</u> : Si $\mathfrak{x}$ est semi-premier et fortement irréductible, alors de $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{x}$ on déduit $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})^2 \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{x}$, donc $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{x}$, d'où $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{x}$ ou $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{x}$.

THÉORÈME 2. - <u>Un idéal régulier est semi-premier</u>. Cela est conséquence du lemme suivant :

LEMME. - <u>Si</u> $\mathfrak{a}$ <u>est un idéal régulier, l'inclusion</u> $\mathfrak{r}\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}$ <u>entraîne</u> $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}$. En effet, on a $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{e} \subseteq (\mathfrak{r}, \mathfrak{a}) \cap (\mathfrak{a}, \mathfrak{e}) = \mathfrak{a} + (\mathfrak{r}, \mathfrak{a}).(\mathfrak{a}, \mathfrak{e}) = \mathfrak{a}$.

On revient maintenant au théorème. Si $\mathfrak{h}$ est régulier, de $\mathfrak{a}^2 \subseteq \mathfrak{h}$ on conclut $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$, ce qui caractérise $\mathfrak{h}$ comme semi-premier.

THÉORÈME 3. - <u>En supposant</u> $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_d = \mathfrak{I}_e \neq \Phi$, <u>un demi-anneau régulier est un demi-anneau semi-premier</u>. Un demi-anneau est dit <u>semi-premier</u>, si son idéal nucléaire est semi-premier. En supposant $\mathfrak{S}$ régulier et $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_d = \mathfrak{I}_e \neq \Phi$, on sait que $\mathfrak{I}$ est un idéal régulier. Alors le théorème 2 montre que $\mathfrak{S}$ est semi-premier.

12. <u>Les radicaux supérieur et inférieur de Baer</u>.

La théorie des radicaux de BAER [2] peut être développée dans le cas des demi-anneaux.

On désigne par *idéal radical* un nilidéal semi-premier. Si on a $\mathfrak{I} = \Phi$, il n'y a pas d'autre idéal radical que $\mathfrak{I}$ lui-même. Si $\mathfrak{I} \neq \Phi$, il peut arriver que $\mathfrak{I}$ soit semi-premier ; alors $\mathfrak{I}$ est un nilidéal radical non vide. Mais, en supposant $\mathfrak{I} \neq \Phi$ non semi-premier, l'existence d'idéal radical non vide est assurée par la proposition suivante, s'il s'agit d'un demi-anneau commutatif pour la somme :

THÉORÈME 1. - *Dans le cas commutatif pour la somme, si* P_0 *est un* p-*système et* $\mathfrak{a}_0$ *est un nilidéal sans élément contenu dans* P_0, *alors tout le nilidéal maximal* $\mathfrak{m}_0$, *parmi les nilidéaux qui contiennent* $\mathfrak{a}_0$ *et n'ont aucun élément dans* P_0, *est un idéal radical.* La démonstration peut se faire par un procédé analogue à celui dont on a fait usage dans le n° 9, théorème 1.

COROLLAIRE. - *Dans un demi-anneau commutatif pour la somme, il y a toujours des idéaux radicaux maximaux qui contiennent un nilidéal* $\mathfrak{a}_0 \neq \Phi$.

En effet (toujours en supposant la somme commutative), il y a un seul idéal radical maximal contenant un nilidéal donné, lequel est d'ailleurs indépendant du nilidéal en question. Il s'agit de l'ensemble réunion de tous les nilidéaux. On écrira $\mathfrak{m}_0 = B_s$ et on désignera B_s par *radical supérieur de Baer*.

L'intersection de tous les idéaux radicaux qui contiennent $\mathfrak{a}_0$ a un sens. Il s'agit d'un idéal $B_i(\mathfrak{a}_0)$, qui est le seul idéal semi-premier minimal appartenant à $\mathfrak{a}_0$. L'idéal $B_i(\mathfrak{I}) = B_i$ s'appelle *radical inférieur de Baer*

Supposons $B_i = \mathfrak{I}$. Alors, si on a $\mathfrak{b}^\sigma \subseteq \mathfrak{I}$ on a aussi $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{I}$. $\mathfrak{I}$ est la réunion de tous les idéaux nilpotents, ce qui entraîne l'égalité $\mathfrak{R} = \mathfrak{I}$, où $\mathfrak{R}$ signifie le radical classique de $\mathfrak{S}$. Réciproquement, si $\mathfrak{R} = \mathfrak{I}$, alors $\mathfrak{I}$ contient tous les idéaux $\mathfrak{b}$ tels que $\mathfrak{b}^\sigma \subseteq \mathfrak{I}$, c'est-à-dire $\mathfrak{I}$ est semi-premier, ce qui entraîne $B_i = \mathfrak{I}$. On peut donc dire : *Dans un demi-anneau, pour qu'on ait* $B_i = \mathfrak{I}$, *il faut et il suffit qu'on ait* $\mathfrak{R} = \mathfrak{I}$. Les idéaux $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{R}$, B_i sont simultanément vides ou non vides.

13. Une théorie du radical B_i.

Le radical $B_i(\mathfrak{a})$, pour le cas $\mathfrak{a} \neq \Phi$, peut être obtenu de la façon suivante. On désigne par *radical d'un idéal* $\mathfrak{b}$ l'ensemble $B(\mathfrak{b})$ de tous les éléments $x \in \mathfrak{S}$ tels que tout p-système qui contient x contient ausi des éléments de $\mathfrak{a}$. On a :

THÉORÈME 1. - Le radical $B(\mathfrak{b})$ est un idéal, précisément l'idéal semi-premier minimal appartenant à $\mathfrak{b}$. De la définition ci-dessus de $B(\mathfrak{b})$, on conclut que $x \in B(\mathfrak{b})$ si et seulement si x n'appartient à aucun p-système n'ayant pas d'élément dans $\mathfrak{b}$. Si P_α est un tel p-système, comme tout P_α est contenu dans le seul p-système maximal P_0 qui n'a aucun élément dans $\mathfrak{b}$, il revient au même d'écrire

$$x \in B(\mathfrak{b}) \quad \text{ou} \quad x \notin P_0 \quad .$$

Alors $B(\mathfrak{b}) = C(P_0)$, et le théorème est démontré.

Puisque tout m-système est un p-système, on en conclut que tout m-système qui contient $x \in B(\mathfrak{b})$ a des éléments dans $\mathfrak{b}$. Réciproquement, si tout m-système qui contient x a des éléments dans $\mathfrak{b}$, il en est de même pour tout p-système, puisqu'un p-système est réunion de m-sytèmes. Ainsi, on pourra dire aussi :

THÉORÈME 2. - Le radical $B(\mathfrak{b})$ est l'ensemble de tous les éléments $x \in \mathfrak{S}$ pour lesquels tout m-système qui contient x a des éléments dans $\mathfrak{b}$.

REMARQUES.

1° $B(\mathfrak{b})$ est encore l'intersection de tous les idéaux premiers minimaux appartenant à $\mathfrak{b}$.

2° Si on a $\mathfrak{b} = \Phi$, la définition de $B(\mathfrak{b})$ montre que $B(\mathfrak{b}) = B(\Phi) = \Phi$.

14. Idéaux complètement premiers et complètement semi-premiers.

On dit que $\mathfrak{q}$ est complètement premier, si la condition $ab \in \mathfrak{q}$ implique $a \in \mathfrak{q}$ ou $b \in \mathfrak{q}$. On dit que $\mathfrak{y}$ est complètement demi-premier, si la condition $a^2 \in \mathfrak{y}$ implique $a \in \mathfrak{y}$.

THÉORÈME 1. - Pour qu'un idéal semi-premier $\mathfrak{y}$ soit complètement semi-premier, il faut et il suffit que la condition $ab \in \mathfrak{y}$ entraîne $ba \in \mathfrak{y}$, [4]. La condition est nécessaire : Si $\mathfrak{y}$ est complètement semi-premier, en supposant $ab \in \mathfrak{y}$, on a aussi $baba \in \mathfrak{y}$, c'est-à-dire $(ba)^2 \in \mathfrak{y}$. Alors, $ba \in \mathfrak{y}$.

La condition est suffisante : Si $\mathfrak{y}$ est semi-premier et si la condition du théorème est valable, prenons $a^2 \in \mathfrak{y}$. On aura $a.a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{y}$, donc $a\mathfrak{S}a \subseteq \mathfrak{y}$. Comme $\mathfrak{y}$ est semi-premier, il en résulte $a \in \mathfrak{y}$.

REMARQUES.

1° Pour les idéaux complètement premiers, on a le même théorème que ci-dessus.

2° Tout idéal complètement premier est premier et tout idéal complètement semi-premier est semi-premier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALMEIDA COSTA (Antonio). - Sur les anneaux demi-premiers, Rev. Fac. C., Lisboa, Série 2, A : Mat., t. 7, 1959, p. 89-104.

[2] BAER (Reinhold). - Radical ideals, Amer. J. of Math., t. 65, 1943, p. 537-568.

[3] BOURNE (Samuel). - On multiplicative idempotents of a potent semiring, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S. A., t. 42, 1956, p. 632-638.

[4] ISEKI (Kiyoshi). - Ideals in semirings, Proc. Japan Acad., t. 34, 1958, p. 29-31.

[5] LEVITZKI (Jacob). - A characteristic condition for semiprimary rings, Duke math. J., t. 11, 1944, p. 367-368.

[6] McCOY (Neal H.). - Prime ideals in general rings, Amer. J. of Math., t. 71, 1949, p. 823-833.

[7] NORONHA CALVÃO (M. L.). - On the theory of residuals, Rev. Fac. C., Lisboa, Série 2, A : Mat., t. 7, 1959, p. 283-300.

[8] NORONHA CALVÃO (M. L.). - Sur les idéaux réguliers d'un semi-anneau, Rev. Fac. C., Lisboa, Série 2, A : Mat., t. 8, 1960, p. 169-173.