Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Robert Croisot

Coeur d'un module, II

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, n° 2 (1960-1961), exp. n° 17, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_2_A2_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
14e année, 1960/61, n° 17

10 avril 1961

COEUR D'UN MODULE, II.

par Robert CROISOT

Cet exposé constitue la suite de celui que L. LESIEUR a fait, sous le même titre, à ce Séminaire au début de l'année scolaire (Cf. L. LESIEUR [7]). La plupart des résultats contenus dans les deux exposés ont été résumés dans une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Cf. L. LESIEUR et R. CROISOT [9]), note qui sera développée dans un mémoire en cours de publication.

Mon but est de préciser les propriétés du coeur d'un module satisfaisant seulement à la condition (1) rappelée plus loin, et notamment celles d'une famille de sous-modules du coeur, les sous-modules que nous appellerons sous-modules fermés.

J'utiliserai ces propriétés pour préciser, dans le cas du coeur, la structure de l'ensemble ordonné des sous-modules compléments, problème examiné par A. W. GOLDIE dans le cas d'un module quelconque satisfaisant à (1) (Cf. [4]), et je donnerai une application aux anneaux dont l'idéal singulier est nul.

Dans tout ce qui suit, on considère un anneau A unitaire, mais non nécessairement commutatif, et un A-module à gauche M unitaire. Le module M est supposé vérifier la condition suivante :

(1) Toute somme directe de sous-modules de M est finie.

C'est ce que A. W. GOLDIE appelle un module de dimension finie.

La condition (1) est en particulier vérifiée pour les modules irréductibles (ceux dans lesquels le sous-module nul est $\cap$-irréductible) que A. W. GOLDIE appelle modules uniformes.

1. L'ensemble ordonné des sous-modules compléments de M.

La condition (1) entraîne que chaque sous-module de M contient un sous-module irréductible, et elle est équivalente à la condition suivante :

(1') L'enveloppe injective E de M est somme directe d'un nombre fini d'injectifs indécomposables.

On a plus précisément :

PROPRIÉTÉ 1.1. - Le nombre maximum de composants d'une somme directe de sous-modules de M est égal au nombre de composants d'une représentation de l'enveloppe injective E de M comme somme directe d'injectifs indécomposables.

C'est ce nombre n que A. W. GOLDIE appelle dimension de M, et qu'il note $\dim M$.

On a, pour tout sous-module N de M, $\dim N \leq \dim M$; la relation $\dim M = 1$ équivaut au fait que M soit irréductible, et la condition $\dim N = \dim M$ pour un sous-module N de M signifie que N a une intersection non nulle avec tout sous-module non nul de M, c'est-à-dire que M est extension essentielle de N. On voit facilement que, pour deux sous-modules N_1 et N_2 de M dont l'intersection est nulle, on a

$$\dim(N_1 + N_2) = \dim N_1 + \dim N_2 \quad .$$

DÉFINITION 1.1. - Soit N un sous-module de M, et soit K un sous-module de M pour lequel $K \cap N = 0$, K étant maximal pour cette propriété. K sera appelé un sous-module complément relatif de N, et on appellera sous-module complément un sous-module K, pour lequel il existe un sous-module N dont K soit complément relatif.

Pour tout N, le théorème de Zorn affirme l'existence d'au moins un complément relatif.

Les sous-modules compléments de M ne sont pas autre chose que les sous-modules qui n'ont pas d'extension essentielle propre dans M. En effet, si K est complément relatif de N, et si P est extension essentielle de K dans M, on a $P \cap N = 0$, d'où $K = P$. Réciproquement, soit K un sous-module de M sans extension essentielle propre dans M. Soit N un sous-module de M complément relatif de K. Si K n'était pas complément relatif de N, il existerait $P \supset K$ avec $P \cap N = 0$; mais P serait extension essentielle de K car $0 \neq U \subsetneq P$ et $U \cap K = 0$ entraîneraient $K \cap (U + N) = 0$ (car la somme $K + U + N$ serait directe) contrairement au fait que N est complément relatif de K.

PROPRIÉTÉ 1.2. - Soient M un module de dimension n, N un sous-module de M et K un complément relatif de N. On a $\dim N + \dim K = n$, et il existe un sous-module complément P tel que $P \supseteq N$ et $\dim P = \dim N$.

En effet, M est extension essentielle de $N + K$, car si on a, pour un sous-module Q de M, $(N + K) \cap Q = 0$, on en déduit $N \cap (K + Q) = 0$, d'où $Q \subseteq K$, par maximalité de K , et $Q = 0$. Par suite, $\dim N + \dim K = \dim(N + K) = n$.

Soit alors P un complément relatif de K qui contienne N (théorème de Zorn). On a $\dim P + \dim K = n = \dim N + \dim K$, d'où $\dim P = \dim N$.

DÉFINITION 1.2. - On appelle sous-module <u>fondamental</u> de M un sous-module irréductible qui est en même temps un sous-module complément.

Il en existe d'après la propriété 1.2.

On peut rattacher la condition (1) à une condition de chaîne portant sur les sous-modules compléments. On démontre en effet la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 1.3. - <u>Pour un A-module M unitaire, la condition (1) équivaut à la condition de chaîne ascendante sur les sous-modules compléments.</u>

M étant de dimension finie, on a plus précisément la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 1.4. <u>Si n est la dimension de M , une chaîne de sous-modules compléments a au plus n termes.</u>

Il suffit d'établir que, pour deux compléments K et K' , les relations $\dim K = \dim K'$ et $K \supseteq K'$ entraînent $K = K'$.

En effet, K est extension essentielle de K' , et K' est sans extension essentielle propre dans M , d'où $K = K'$.

En particulier, il existe des sous-modules compléments <u>maximaux</u>, et on voit qu'ils sont de dimension $n - 1$ et que ce sont des <u>sous-modules $\cap$-irréductibles minimaux</u> ; il existe aussi des sous-modules compléments <u>minimaux</u>, notamment les <u>sous-modules fondamentaux</u>.

THÉORÈME 1.1. - <u>Soit n la dimension de M . Tout sous-module complément K est intersection d'un nombre fini de compléments maximaux. Chaque représentation de K comme telle intersection sans élément superflu a un nombre de termes égal à</u> $n - \dim K$.

Soit N un sous-module dont K soit complément relatif. La dimension ℓ de N est $n - \dim K$. Par suite, N contient une somme directe de ℓ sous-modules irréductibles $U_1 , U_2 , \dots , U_\ell$.

Posons

$$V_i = K + \sum_{j \neq i} U_j \qquad \text{pour } i = 1 , 2 , \dots , \ell \quad .$$

Soit W_i un complément relatif de U_i qui contienne V_i. On a $\dim W_i = n - 1$ et, par suite, W_i est un complément maximal.

On a donc

$$W_1 \cap (U_1 + U_2 + \dots + U_\ell) = (W_1 \cap U_1) + (U_2 + \dots + U_\ell) = U_2 + \dots + U_\ell \quad ,$$

d'après la modularité du treillis des sous-modules de M, puis

$$(W_2 \cap W_1) \cap (U_1 + U_2 + \dots + U_\ell)$$
$$= W_2 \cap (U_2 + \dots + U_\ell) = (W_2 \cap U_2) + (U_3 + \dots + U_\ell) = U_3 + \dots + U_\ell .$$

et ainsi de suite, d'où finalement

$$(W_\ell \cap \dots \cap W_1) \cap (U_1 + \dots + U_\ell) = 0 \quad .$$

Il en résulte :

$$(W_1 \cap \dots \cap W_\ell) \cap N = 0$$

car N est extension essentielle de $U_1 + \dots + U_\ell$.

Mais $K \subseteq W_1 \cap \dots \cap W_\ell$, d'où $K = W_1 \cap \dots \cap W_\ell$ d'après la maximalité de K pour la propriété de $K \cap N = 0$.

De plus, si K est écrit comme intersection finie de compléments maximaux sans élément superflu, ceux-ci étant $\cap$-irréductibles, une propriété classique des treillis modulaires montre que le nombre de termes d'une telle représentation est fixe, donc égal à $\ell = n - \dim K$.

Une question se pose alors d'une façon naturelle, celle de la réciproque du théorème 1.1 : une intersection finie de compléments maximaux est-elle nécessairement un complément ? Cette question a été posée par A. W. GOLDIE. En fait, la réponse est négative dans le cas général comme le montre l'exemple d'un Z-module $Z \times Z/(2)$ (où Z est l'anneau des entiers et $Z/(2)$ le corps des classes résiduelles d'entiers modulo 2) qui est de dimension 2 et dans lequel les sous-modules engendrés par les éléments $(1 , 0)$ et $(1 , 1)$ sont compléments relatifs du sous-module $0 \times Z/(2)$ sans que leur intersection soit un sous-module complément.

Nous verrons plus loin (§ 3) que, si l'on se limite au coeur $C(M)$ du module M, la réciproque du théorème 1.1 est valable. Elle l'est par suite dans les modules qui coïncident avec leur coeur.

Une autre question, posée par A. W. GOLDIE, est de savoir si tous les compléments minimaux sont des sous-modules fondamentaux. Ce problème reste ouvert. Plus généralement, les chaînes maximales de sous-modules compléments de M ont-elles pour longueur la dimension de M ?

2. Le coeur de M.

Rappelons d'abord la définition et les propriétés de l'anneau associé à M : on considère l'enveloppe injective E de M qui est somme directe de n sous-modules injectifs indécomposables. Soit p le nombre de types distincts de ces sous-modules, soit $\{\Pi_i\}_{1 \leq i \leq p}$ l'ensemble de ces types, et soit k_i $(i = 1, 2, \dots, p)$ le nombre de sous-modules de type Π_i. On représente par $\mathcal{B}$ l'anneau des endomorphismes de E, par $\mathfrak{J}$ l'idéal de $\mathcal{B}$ constitué par les endomorphismes β tels que $\operatorname{Ker} \beta$ soit essentiel dans E ([1]). C'est l'anneau quotient $\mathcal{B}/\mathfrak{J}$, que l'on notera S, qu'on appelle anneau associé à M. Le théorème suivant résume les propriétés de S ([2]).

THÉORÈME 2.1. - L'anneau S est semi-simple. Pour qu'il soit simple, il faut et il suffit que $p = 1$, c'est-à-dire que M soit isotypique. Pour que S soit un corps K, il faut et il suffit que $n = 1$, c'est-à-dire que M soit irréductible. Dans le cas général, S est le produit de p anneaux simples, chacun d'eux étant isomorphe à l'anneau $M_{k_i}(K_i)$ des matrices carrées d'ordre k_i à coefficients dans K_i, où K_i désigne le corps associé à une composante irréductible de E de type ${}_i$.

DÉFINITION 2.1. - On appelle coeur du module injectif E, et l'on désigne par $C(E)$ le sous-module intersection de ceux des noyaux $\operatorname{Ker} \beta$ des endomorphismes de E qui sont essentiels dans E :

$$C(E) = \bigcap_{\beta \in \mathfrak{J}} \operatorname{Ker} \mathcal{B} .$$

Il existe une relation intéressante entre $C(E)$, l'ensemble $C^*(E)$ des éléments non nuls x de E tels que l'annulateur $0^{\cdot}.\, x$ de x dans A soit maximal et l'ensemble $C'(E)$ des éléments non nuls x de E tels que Ax soit un module irréductible. Cette relation permet de préciser quels sont les éléments de $C(E)$.

([1]) On montre que $\mathfrak{J}$ n'est autre que le radical de Jacobson de $\mathcal{B}$.

([2]) Sans aucune hypothèse sur M, S est un anneau régulier au sens régulier de Von NEUMANN (Cf. P. GABRIEL [2]).

PROPRIÉTÉ 2.1. - On a $C^*(E) = C(E) \cap C'(E)$.

En effet, on a $C^*(E) \subseteq C(E)$. Soit $x \neq 0$ tel que $0 \cdot. x$ soit maximal, et soit β un endomorphisme de E tel que $\operatorname{Ker} \beta$ soit essentiel dans E . Si on avait $x \notin \operatorname{Ker} \beta$, c'est-à-dire $x\beta \neq 0$, il existerait $a \in A$ tel que $ax \neq 0$ et $ax \in \operatorname{Ker} \beta$, soit $ax\beta = 0$, d'où $0 \cdot. x \subset 0 \cdot. x\beta$, ce qui contredit la maximalité de $0 \cdot. x$.

D'autre part, on a $C^*(E) \subseteq C'(E)$. Soit $x \in C^*(E)$. Si Ax n'était pas irréductible, il existerait $a , b \in A$ avec $ax \neq 0$, $bx \neq 0$ et $Aax \cap Abx = 0$. L'homomorphisme de $Aax \oplus Abx$ dans Aax défini par $rax + r'bx \to rax$ pourrait être prolongé à un endomorphisme β de E . On aurait alors $ax\beta = ax \neq 0$ et $bx\beta = 0$, d'où $x\beta \neq 0$ et $0 \cdot. x \subset 0 \cdot. x\beta$ ce qui contredit la maximalité de $0 \cdot. x$.

Finalement, on a $C(E) \cap C'(E) \subseteq C \; (E)$. Soit $x \in C(E) \cap C'(E)$. Si $0 \cdot. x$ n'était pas maximal, il existerait $y \neq 0$ avec $0 \cdot. x \subset 0 \cdot. y$, d'où $a \in A$ avec $ax \neq 0$ et $ay = 0$. Mais $E(Ax)$ est indécomposable et facteur direct dans E ; E peut donc s'écrire $E = E(Ax) \oplus F$. L'homomorphisme de $Ax \oplus F$ dans E défini par $rx + f \to ry$ peut être prolongé à un endomorphisme β de E . On a alors $F \subseteq \operatorname{Ker} \beta$ et $ax \in \operatorname{Ker} \beta$; donc $\operatorname{Ker} \beta$ est essentiel dans E , et $x \in \operatorname{Ker} \beta$, ce qui entraîne $x\beta = 0$, c'est-à-dire $y = 0$, d'où une contradiction.

Soit $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$ une représentation de E comme somme directe d'injectifs indécomposables. On peut écrire tout $x \in E$ sous la forme

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

avec $x_i \in E_i$ $(i = 1 , 2 , \dots , n)$.

THÉORÈME 2.2. - <u>Pour que</u> $x \in C(E)$, <u>il faut et il suffit que l'on ait, pour tout</u> i , $x_i = 0$ <u>ou</u> $x_i \in C^*(E)$.

La condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Supposons $x \in C(E)$ et $x_i \neq 0$. Puisqu'on a $x_i \in C'(E)$, il suffit d'établir $x_i \in C(E)$. Supposons, par exemple, $i = 1$. Si on avait $x_1 \notin C(E)$, il existerait β avec $x_1 \beta \neq 0$ et $\operatorname{Ker} \beta$ essentiel. Soit l'endomorphisme de $Ax_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$ dans E défini par $ax_1 + e_2 + \dots + e_n \to ax_1\beta$. Prolongeons-le à un endomorphisme β' de E . $\operatorname{Ker} \beta'$ est essentiel, car il coupe E_1 ($\operatorname{Ker} \beta$ étant essentiel coupe Ax_1), $E_2 , \dots , E_n$. On a donc $x\beta' = 0$, d'où $x_1 \beta' = 0$. Mais on a $x_1 \beta = x_1 \beta'$ ce qui contredit l'hypothèse faite.

COROLLAIRE. - Pour que $C(E)$ soit non nul, il faut et il suffit que $C^*(E)$ soit non vide.

Pour que $C(E)$ soit essentiel dans E, il faut et il suffit que, pour tout i, il existe $x_i \in E_i$ avec $x_i \in C^*(E)$.

Pour que $C(E) = E$, il faut et il suffit que, pour tout i et pour tout $x_i \in E_i$ tel que $x_i \neq 0$, on ait $x_i \in C^*(E)$.

Par exemple, si A est noethérien à gauche, on a $C(E) \neq 0$. Si le sous-module singulier $J(M)$ de M ([3]) est nul, on a $C(E) = E$.

Désignons par $\overline{\varphi} \in S$ la classe modulo $\mathcal{J}$ de $\varphi \in \mathcal{B}$, et posons, pour tout $x \in C(E)$, $x\overline{\varphi} = x\varphi$. L'élément $x\varphi$ appartient à $C(E)$ et ne dépend que de $\overline{\varphi}$. On démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 2.3. - $C(E)$ est un S-module à droite semi-simple ; si A est commutatif, ce S-module est monogène. Si M est isotypique, $C(E)$ est un espace vectoriel sur K ; si A est commutatif, cet espace est de dimension finie, de dimension 1 si M est en particulier irréductible.

Par contre, on peut donner des exemples où M est irréductible sur un anneau non commutatif et où $C(E)$ est de dimension supérieure à 1 et même de dimension infinie.

Le coeur de M se définit à partir du coeur de E.

DÉFINITION 2.2. - On appelle coeur du module M, et l'on désigne par $C(M)$ le sous-module $C(E) \cap M$.

Le théorème suivant étend au cas général le théorème 3.3 de L. LESIEUR [7] énoncé dans le cas où M est isotypique.

THÉORÈME 2.4. - I étant un sous-module de M, pour que l'enveloppe injective $E(M/I)$ soit somme directe d'un nombre fini d'injectifs indécomposables qui soient tous de l'un des types Π_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$, il faut et il suffit que l'on ait

$$I = M \cap \operatorname{Ker} \beta_1 \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} \beta_q$$

où les β_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ sont des endomorphismes de E.

([3]) $J(M)$ est l'ensemble des $x \in M$ tels que $0 : x$ soit un idéal à gauche de A, essentiel dans A (Cf. R. E. JOHNSON et E. T. WONG [6]).

On en déduit immédiatement :

THÉORÈME 2.5. - $C(M)$ est l'intersection de tous les sous-modules N de M essentiels dans M et tels que l'enveloppe injective de M/N soit somme directe d'un nombre fini d'injectifs indécomposables qui soient tous de l'un des types Π_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Ce théorème est naturellement valable aussi quand on remplace M par E.

3. Les sous-modules fermés de $C(M)$. Application au problème du paragraphe 1.

Définissons et étudions d'abord les sous-modules fermés de $C(E)$, E étant toujours l'enveloppe injective de M.

Pour tout sous-ensemble non vide X de $C(E)$, désignons par $0 .^{\cdot} X$ l'ensemble des éléments de S qui annulent X ; pour tout sous-ensemble non vide T de S, désignons par $0 ^{\cdot}. T$ l'ensemble des éléments de $C(E)$ annulés par tout élément de T. Les applications $X \to 0 .^{\cdot} X$ et $T \to 0 ^{\cdot}. T$ définissent une correspondance de Galois (4). Les sous-ensembles fermés du A-module $C(E)$ sont des sous-modules que nous appelons sous-modules fermés, et les sous-ensembles fermés de S sont des idéaux à droite de S que nous appelons idéaux à droite fermés.

Démontrons le théorème fondamental suivant :

THÉORÈME 3.1. - Les idéaux à droite fermés sont tous les idéaux à droite de S contenant $S_0 = 0 .^{\cdot} C(E)$. Ils forment un treillis modulaire complémenté de longueur finie inférieure ou égale à n et il en est de même de l'ensemble des sous-modules fermés de $C(E)$, les deux treillis étant duaux l'un de l'autre. Pour que ces treillis soient de longueur n, il faut et il suffit que $S_0 = 0$, c'est-à-dire que $C(E)$ soit essentiel dans E.

Soit I un idéal à droite de S contenant S_0. En posant $F = 0 ^{\cdot}. I$, il faut établir $I = 0 .^{\cdot} F$, L'anneau S étant S semi-simple, I est la somme de S_0 et d'un nombre fini d'idéaux à droite principaux $\bar{\beta}_1 S, \ldots, \bar{\beta}_n S$. Etablissons la propriété par récurrence sur n.

1° $n = 1$, d'où $I = S_0 + \bar{\beta}_1 S$.

$0 .^{\cdot} F$ se compose des éléments $\bar{\gamma}$ de S tels que $x\bar{\beta}_1 = 0$, $x \in C(E)$ entraîne $x\bar{\gamma} = 0$, ce qui se traduit par

$$x\beta_1 = 0 , \quad x \in C(E) \text{ entraîne } x\gamma = 0 \quad .$$

---

(4) Cf. P. DUBREIL [1], p. 119.

L'application $x\beta_1 \to x\gamma$ est donc un homomorphisme de $C(E)\beta_1$ sur $C(E)\gamma$ que l'on peut étendre à un endomorphisme δ de E. On a alors, pour tout $x \in C(E)$, $x(\gamma - \beta_1 \delta) = 0$ et, par suite, $x(\bar{\gamma} - \bar{\beta}_1 \bar{\delta}) = 0$ ce qui implique $\bar{\gamma} - \bar{\beta}_1 \bar{\delta} \quad S_0$ et $\bar{\gamma} \in I$.

2° <u>$n = p + 1$, en supposant la propriété établie pour $n = p$</u>.

$0 .^{\cdot} F$ se compose des éléments $\bar{\gamma}$ de S tels que $x\beta_1 = 0$, $x\beta_2 = 0$, ..., $x\beta_p = 0$, $x \in C(E)$ entraîne $x\gamma = 0$. Soit F' le sous-module

$$0 .^{\cdot} (S_0 + \bar{\beta}_1 S + \dots + \bar{\beta}_p S)$$

de $C(E)$. L'application $x\beta_{p+1} \to x\gamma$ est un homomorphisme de $F'\beta_{p+1}$ sur $F'\gamma$. On peut l'étendre à un endomorphisme δ de E. On a alors, pour tout $x \in F'$, $x(\gamma - \beta_{p+1} \delta) = 0$ et, par suite, $x(\bar{\gamma} - \bar{\beta}_{p+1} \bar{\delta}) = 0$ ce qui implique, d'après l'hypothèse de récurrence, $\bar{\gamma} - \bar{\beta}_{p+1} \bar{\delta} \in S_0 + \bar{\beta}_1 S + \dots + \bar{\beta}_p S$ et, par conséquent $\bar{\gamma} \in I$.

Les propriétés du treillis des idéaux à droite d'un anneau semi-simple entraînent alors que les idéaux à droite fermés de S constituent un treillis modulaire complémenté de longueur inférieure ou égale à n. Les propriétés de correspondances de Galois montrent que les sous-modules fermés de $C(E)$ constituent un treillis dual du précédent.

Si $C(E)$ est essentiel dans E, on a $S_0 = 0$, car $C(E)\beta = 0$ implique que $\operatorname{Ker} \beta$ est essentiel dans E, d'où $\bar{\beta} = 0$. Les treillis précédents sont alors de longueur n. Si $C(E)$ n'est pas essentiel dans E, il existe au moins une composante irréductible E_i de E qui n'a pas d'élément non nul dans $C(E)$; l'endomorphisme β de E qui conserve chaque élément de E_i, et qui annule toutes les autres composantes irréductibles de E, a un noyau non essentiel et il annule $C(E)$; on a donc $S_0 \neq 0$. Les treillis précédents sont alors de longueur inférieure à n (5).

On peut définir de manière analogue les sous-modules fermés de $C(M)$. Ce sont d'ailleurs les traces sur $C(M)$ des sous-modules fermés de $C(E)$. On les étudie comme les sous-modules fermés de $C(E)$. En remarquant que $C(M)$ est essentiel dans $C(E)$ et que $S_0 = 0 .^{\cdot} C(E)$ est aussi égal à $0 .^{\cdot} C(M)$, on aboutit au théorème suivant :

THÉORÈME 3.2. - <u>L'ensemble des sous-modules fermés de</u> $C(M)$ <u>forme un treillis isomorphe au treillis des sous-modules fermés de</u> $C(E)$.

---

(5) D'une manière générale, cette longueur est égale à la dimension de $C(E)$.

Pour tout sous-module X de $C(M)$, on désignera par $\overline{X}$ le sous-module fermé $0 \cdot . (0 . \cdot X)$ de $C(M)$, et on l'appellera <u>fermeture</u> de X.

THÉORÈME 3.3. - <u>On a</u> $\overline{X} = C(M) \cap E(X)$ <u>où</u> $E(X)$ <u>désigne une extension essentielle maximale quelconque de</u> X <u>dans</u> E. <u>Les éléments</u> x <u>de</u> $C(M)$ <u>appartenant à</u> $\overline{X}$ <u>sont caractérisés par la propriété suivante</u> :

$$x' \in Ax \text{ avec } x' \neq 0 \Longrightarrow Ax' \cap X \neq 0 \quad .$$

En effet, soit X un sous-module non nul de $C(M)$. On peut écrire E sous la forme $E = E(X) \oplus F$. Soient $x \in C(M) \cap E(X)$ et un endomorphisme β de E tel que $X\beta = 0$. Ker β contenant X coupe toutes les composantes de $E(X)$. Soit β' un endomorphisme de E défini par $u\beta' = u\beta$ pour $u \in E(X)$ et $u\beta' = 0$ pour $u \in F$. Ker β' est essentiel dans E, d'où $x\beta' = 0$ puisque $x \in C(M)$. Par suite $x\beta = 0$ puisque $x \in E(X)$, et $x \in \overline{X}$. Au contraire, soit $x \in C(M)$ avec $x \notin E(X)$. On a $x = x_1 + f$ avec $x_1 \in E(X)$, $f \in F$ et $f \neq 0$. Soit β un endomorphisme de E défini par $u\beta = 0$ pour $u\beta\ E(X)$, $u = u$ pour $u \in F$. On a alors $x\beta = f \neq 0$ et Ker $\beta \supseteq X$, par suite, $x \notin \overline{X}$.

Pour démontrer la 2e partie du théorème, on remarque d'abord qu'un élément $x \in \overline{X}$ vérifie évidemment la propriété indiquée. On établit ensuite le lemme suivant : E étant sous la forme $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$, pour tout x non nul de $C(E)$, il existe $a \in A$ tel que ax ait une composante non nulle dont l'indice peut être choisi à l'avance parmi ceux des composantes non nulles de x et tel que $ax \in C^*(E)$. Ceci posé, on considère un élément $x \notin \overline{X}$, et qui s'écrit donc sous la forme $x = x_1 + f$ avec $x_1 \in E(X)$, $f \in F$ et $f \neq 0$; on choisit alors $a \in A$ tel que $ax \in C^*(E)$ et $af \neq 0$; en posant $x' = ax$, on voit aisément que l'on a

$$Ax' \cap X = 0 \quad .$$

Du théorème 3.3 résultent les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 3.1. - $\overline{X}$ <u>est extension essentielle maximum de</u> X <u>dans</u> $C(M)$.

PROPRIÉTÉ 3.2. - <u>Les sous-modules fermés de</u> $C(M)$ <u>sont caractérisés par la propriété</u>

$$x \notin X \Longrightarrow \exists\ x' \in Ax \text{ avec } x' \neq 0 \text{ et } Ax' \cap X = 0 \quad .$$

On en déduit alors le théorème suivant qui précise l'étude du paragraphe 1 dans le cas où le module étudié est $C(M)$.

THÉORÈME 3.4. - Les sous-modules fermés de $C(M)$ coïncident avec les sous-modules compléments. Les sous-modules compléments forment donc un treillis modulaire complémenté dont la longueur est égale à la dimension de $C(M)$. En particulier, une intersection de compléments est toujours un complément et les compléments minimaux coïncident avec les sous-modules fondamentaux.

Signalons encore les résultats suivants.

PROPRIÉTÉ 3.3. - Les sous-modules fermés de $C(M)$ sont les sous-modules N tels que l'enveloppe injective de $C(M)/N$ soit somme directe d'un nombre fini d'injectifs indécomposables qui soient tous de l'un des types Π_i.

PROPRIÉTÉ 3.4. - Pour tout sous-module X de $C(M)$, la hauteur de la fermeture $\overline{X}$ de X dans le treillis des sous-modules fermés de $C(M)$ est égale à la dimension du sous-module X.

PROPRIÉTÉ 3.5. - Pour tout $x \in C(M)$, pour que la fermeture $\overline{Ax}$ du sous-module Ax soit de hauteur k dans le treillis des sous-modules fermés de $C(M)$, il faut et il suffit que l'annulateur $0 \cdot x$ de x dans A soit intersection sans élément superflu de k annulateurs maximaux d'éléments de E.

Naturellement, tous ces résultats sont applicables quand on remplace M par E.

4. Un cas particulier.

Supposons que l'anneau A (toujours unitaire) soit tel que son idéal singulier (à gauche) $J(A)$ soit nul, c'est-à-dire que, pour tout élément a non nul de A, l'idéal à gauche $0 \cdot a$, annulateur à gauche de a dans A, ne soit pas essentiel dans A.

Prenons comme module M l'anneau A lui-même considéré comme A-module à gauche. La condition (1) s'écrit ici :

(1ℓ) Toute somme directe d'idéaux à gauche de A est finie.

Exemple de tels anneaux : les anneaux noethériens à gauche dont le radical est nul ; plus généralement, les anneaux sans nul idéal bilatère non nul qui vérifient la condition (1ℓ) et la condition suivante :

($2\ell'$) Les annulateurs à gauche des éléments de A satisfont à la condition maximale.

On a alors, E désignant toujours l'enveloppe injective du A-module à gauche, A, $C(E) = E$ et $C(A) = A$ (6). Les résultats du paragraphe précédent sont

(6) On voit que, pour un anneau A, les conditions $J(A) = 0$, $C(E) = E$, $C(A) = A$ sont en fait équivalentes.

applicables à l'étude des idéaux à gauche fermés de A .

D'autre part, l'idéal $\mathcal{J}$ de l'anneau $\mathcal{B}$ d'endomorphismes de E est nul. Il en résulte que tout endomorphisme de A peut être étendu d'une façon unique à un endomorphisme de E ; or, les endomorphismes de A correspondent biunivoquement aux éléments de A . L'anneau A peut donc être considéré comme un sous-anneau de l'anneau $\mathcal{B} = \mathcal{B}/\mathcal{J} = S$ des endomorphismes de E , qui est semi-simple. De plus, l'anneau S considéré comme A-module à gauche peut être identifié à E : en effet, à chaque élément x de E , on peut faire correspondre l'endomorphisme ξ de E prolongeant l'homomorphisme $a \to ax$ de A dans E et l'application de $x \in E$ sur $\xi \in S$ est injective et surjective, et elle est compatible avec la structure de A-module à gauche de E et S . On a donc le résultat suivant.

THÉORÈME 4.1. - *L'enveloppe injective* E *du* A-*module à gauche* A *est un anneau semi-simple* S . *Les idéaux à gauche fermés de* A *sont les traces sur* A *des sous-modules fermés de* E , *c'est-à-dire des idéaux à gauche de* S .

S contenant A , les annulateurs à gauche des sous-ensembles de A sont des idéaux à gauche fermés. Il en résulte que l'ensemble ordonné des idéaux à gauche annulateurs et l'ensemble ordonné des idéaux à droite annulateurs sont de longueur finie. En particulier, les conditions suivantes sont vérifiées :

(2ℓ) Les annulateurs à gauche des sous-ensembles de A vérifient la condition maximale.

(2r) Les annulateurs à droite des sous-ensembles de A vérifient la condition maximale.

Signalons encore les propriétés suivantes. Soient E l'ensemble des éléments x de A tels que la fermeture de Ax dans $C(A) = A$ soit A ; D' l'ensemble des éléments de A non diviseurs de zéro à droite ; G' l'ensemble des éléments non diviseurs de zéro à gauche.

PROPRIÉTÉ 4.1. - *On a* $E = D' \subset G'$.

PROPRIÉTÉ 4.2. - *Pour tout* $x \in A$, *la hauteur de la fermeture* $\overline{Ax}$ *de* Ax *dans le treillis des idéaux à gauche fermés de* A *et celle de l'annulateur à gauche* $0^{\bullet}. x$ *de* x *(qui est aussi un idéal à gauche fermé) ont pour somme la longueur* n *du treillis.*

Un cas particulier important d'anneaux ayant les propriétés précédentes est constitué par les anneaux premiers satisfaisant aux conditions (1ℓ) et (2ℓ) et, plus généralement, par les anneaux semi-premiers satisfaisant à ces conditions.

La plupart des résultats précédents étaient connus pour ces anneaux (Cf., pour les anneaux premiers, L. LESIEUR et R. CROISOT [8] et, pour les anneaux semi-premiers, A. W. GOLDIE [3]) (7).

On a remarqué ci-dessus que les annulateurs à gaudhe des sous-ensembles de A sont des idéaux à gauche fermés particuliers. Dans le cas des anneaux premiers satisfaisant à (1ℓ) et (2ℓ), il peut y avoir d'autres idéaux à gauche fermés (Cf. un exemple donné dans L. LESIEUR et R. CROISOT [8]). Mais, si un anneau premier vérifie (1ℓ), (2ℓ) ainsi que les conditions symétriques (1r), (2r), les annulateurs à gauche sont les seuls idéaux à gauche fermés (Cf. A. W. GOLDIE [3]). Il serait intéressant de voir s'il en est de même dans un anneau qui vérifie (1ℓ) (1r) et dont l'idéal singulier à gauche et l'idéal singulier à droite sont nuls.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUBREIL (Paul). - Algèbre, Tome 1, 2e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

[2] GABRIEL (Pierre). - La localisation dans les anneaux non commutatifs, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 13, 1959/60, n° 2, 35 p.

[3] GOLDIE (A. W.). - The structure of prims rings under ascending chain conditions, Proc. London math. Soc., t. 8, 1958, p. 589-608.

[4] GOLDIE (A. W.). - Semi-prims rings with maximum condition, Proc. London math. Soc., t. 10, 1960, p. 201-220.

[5] JOHNSON (R. E.). - Structure theory of faithful rings, II : Restricted rings Trans. Amer. math. Soc., t. 84, 1957, p. 523-544.

[6] JOHNSON (R. E.) and WONG (E. T.). - Self injective rings, Canadian math. Bull., t. 2, 1959, p. 167-174.

[7] LESIEUR (Léonce). - Coeur d'un module, I, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 14, 1960/61, n° 1, 11 p.

[8] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Sur les anneaux premiers noethériens à gauche, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 76, 1959, p. 161-183.

[9] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - La notion de coeur dans un module, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 252, 1961, p. 52-54.

(7) On pourra aussi trouver des renseignements sur les anneaux à idéal singulier nul dans P. GABRIEL [2] et R. E. JOHNSON [5].