Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Paul Dubreil

Sous-groupes d'un demi-groupe. Demi-groupe des endomorphismes d'un groupe

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, nº 2 (1960-1961), exp. nº 1, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_2_A1_0>

SOUS-GROUPES D'UN DEMI-GROUPE. DEMI-GROUPE DES ENDOMORPHISMES D'UN GROUPE

par Paul DUBREIL

1. Introduction.

Dès 1941, A. H. CLIFFORD [3] a étudié les demi-groupes qui sont réunions de groupes et les a caractérisés comme demi-groupes admettant des inverses relatifs : pour tout élément a d'un tel demi-groupe D, il existe un élément e, appelé élément unité relatif de a, et un élément a', inverse relatif de a par rapport à e, vérifiant

$$ea = ae = a \quad ,$$
$$a'a = aa' = e \quad .$$

Peu après, en 1943, Štefan SCHWARZ [8] a étudié les sous-groupes d'un demi-groupe fini. Les principales propriétés (existence mise à part) s'étendent facilement au cas d'un demi-groupe quelconque. La considération des radicaux des sous-groupes (maximaux) d'un demi-groupe nous permettra d'obtenir des résultats plus complets.

Certains demi-groupes sont particulièrement riches en sous-groupes ; parmi ceux qui ne sont pas nécessairement finis se trouvent le demi-groupe des applications d'un ensemble en lui-même et le demi-groupe des endomorphismes d'un groupe, ou des endomorphismes permis d'un groupe admettant un domaine d'opérateurs. Dans chacun de ces deux cas, la loi interne du demi-groupe est, naturellement, la composition $\circ$ des applications ou des endomorphismes :

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] \quad .$$

Comme il est bien connu, l'ensemble des endomorphismes d'un groupe abélien (additif), muni en outre de la loi $+$ définie par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

est un anneau. Le cas d'un groupe quelconque G a été traité, en 1933, par H. FITTING, [4]. L'anneau d'endomorphismes du cas commutatif devient un domaine ("Bereich") dans lequel deux éléments ne sont pas toujours addibles ; on peut cependant introduire et étudier des idéaux, en un sens convenablement élargi (voir par exemple [2], § 8, n° 11, exercices 19 et 20, p. 138-139, où les domaines de Fitting prennent le nom plus heureux d'annéloïdes). FITTING met d'abord en évidence certains endomorphismes remarquables : les endomorphismes centraux (c'est-à-dire donnant une image contenue dans le centre du groupe) et les endomorphismes normaux (c'est-à-dire permutables avec tout automorphisme intérieur). Puis, en supposant que le treillis des sous-groupes invariants et permis du groupe considéré G vérifie les deux conditions de chaînes ascendante et descendante, FITTING développe une théorie qui s'inspire des systèmes hyper-complexes, donc s'oriente vers les décompositions directes de l'annéloïde des endomorphismes en somme d'idéaux et vers les représentations matricielles.

Il m'a semblé intéressant d'adopter la ligne de CLIFFORD et de SCHWARZ pour étudier, en tant que demi-groupe multiplicatif, l'ensemble Η (*) des endomorphismes d'un groupe G . Les résultats concernent donc les sous-groupes et d'abord, bien sûr, les idempotents de ce demi-groupe Η . Les idempotents sont associés bijectivement à certains endomorphismes mis en évidence par R. BAER [1] : les endomorphismes de décomposition ("splitting endomorphisms", voir aussi [10]) et cela, aussi bien dans le cas plus général où G est une boucle ("loop"). Les décompositions auxquelles ces endomorphismes conduisent, sont plus générales que les décompositions directes, mais coïncident avec elles si G est abélien.

Nous étudierons successivement :

- les sous-groupes d'un demi-groupe quelconque et leurs radicaux ;
- la classification des endomorphismes ;
- les sous-groupes maximaux du demi-groupe Η des endomorphismes d'un groupe G .

2. Sous-groupes d'un demi-groupe D ; radicaux et fuseaux.

Le demi-groupe D est noté multiplicativement. Si D contient un sous-groupe Σ , l'élément-unité e de Σ est un idempotent de D : $e^2 = e$; et inversement, si e est, dans D , un idempotent, {e} est un sous-groupe, d'ordre 1 . L'existence d'éléments idempotents est donc une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de sous-groupes.

(*) Dans ce texte, les majuscules grecques Α , Η , Μ , Ρ ,...(alpha, êta, mu, rô, ...) ne doivent pas être confondues avec les capitales latines analogues.

Soit Φ_e la famille des sous-groupes Σ, ... de D ayant pour élément-unité l'idempotent e. Le sous-demi-groupe $\Gamma_e = \bigvee_{\Sigma \in \Phi_e} \Sigma$, borne supérieure de Φ_e dans le treillis complet des sous-demi-groupes de D, est visiblement un sous-groupe, et c'est, par construction, le plus grand sous-groupe de D admettant e comme élément neutre.

De plus, Γ_e est maximal dans la famille de tous les sous-groupes de D, puisque, si un sous-groupe contient Γ_e, l'élément idempotent e est nécessairement son élément-unité.

Supposons que deux sous-groupes Σ', Σ'' de D, ayant respectivement pour élément-unité l'idempotent e' et l'idempotent e'', aient une intersection non vide, et soit $x \in \Sigma' \cap \Sigma''$. Les égalités

$$e'x = x, \qquad x'x = e' \qquad (x' \in \Sigma'),$$

$$xe'' = x, \qquad xx'' = e'' \qquad (x'' \in \Sigma''),$$

entraînent

$$e'e'' = e'xx'' = xx'' = e''$$

$$= x'xe'' = x'x = e',$$

donc Σ' et Σ'' ont même élément unité : $e' = e'' = e$.

Mais alors, Σ' et Σ'' sont tous deux contenus dans le plus grand sous-groupe Γ_e ayant e comme élément-unité et les inverses x', x'' de x dans Γ', Γ'' coïncident.

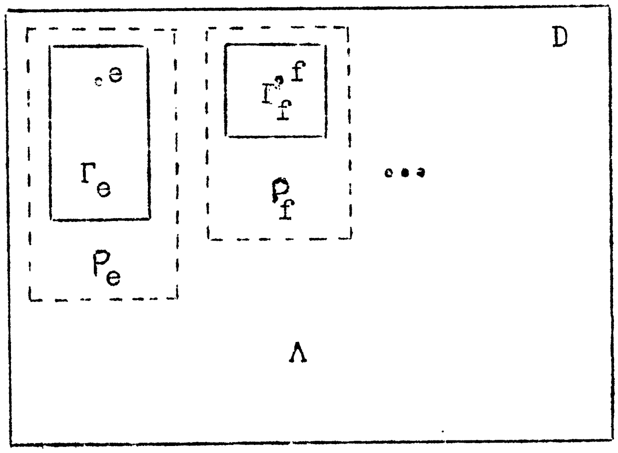
Ce qui précède entraîne aussitôt que les sous-groupes maximaux Γ_e, Γ_f, ... associés bijectivement aux idempotents e, f, ... de D, sont deux à deux disjoints.

A chacun de ces sous-groupes Γ_e, associons son radical $R(\Gamma_e) = P_e$, (ensemble des éléments de D dont une puissance appartient à Γ_e). Nous avons $\Gamma_e \subseteq P_e$ et il est immédiat que ces radicaux P_e, P_f, ... sont, eux aussi, deux à deux disjoints.

Désignons par E l'ensemble des idempotents du demi-groupe D et par

$$\Lambda = D - \bigcup_{e \in E} P_e = D - \sum_{e \in E} P_e$$

le complémentaire de la réunion (ou somme) des radicaux des sous-groupes maximaux. La structure de D peut être représentée par le schéma suivant :



Chaque radical P_e est <u>semi-premier</u> (c'est-à-dire $x^n \in P_e$ entraîne $x \in P_e$). La réunion de ces radicaux ayant la même propriété, son complémentaire Λ est semi-stable (c'est-à-dire $a \in \Lambda$ entraîne : $\forall \quad n \in \underset{\sim}{N}$, $a^n \in \Lambda$) : autrement dit, Λ contient, avec un élément a , tout le sous-demi-groupe cyclique (a) engendré par cet élément.

Or, d'après un théorème connu [7], si un demi-groupe a est <u>fini</u>, il contient un idempotent unique et un sous-groupe maximal unique, lui-même cyclique :

$$C_e = \{a^m , \dots , a^{m+h-1}\} = (a^n)$$

(avec $a^{m+h} = a^m$, $m + h$ minimum, $m \leqslant n \leqslant m + h - 1$ et $n \equiv 1 \mod h$). Le radical $R(C_e)$ est évidemment ici le demi-groupe cyclique (a) lui-même.

Pour un élément a de l'ensemble Λ , les circonstances précédentes sont exclues par définition. Tout élément de Λ engendre donc nécessairement un sous-demi-groupe cyclique <u>infini</u>, contenu dans Λ . Par suite :

<u>L'ensemble</u> Λ <u>est vide ou infini, et certainement vide si</u> D <u>est un demi-groupe périodique</u> (en particulier un demi-groupe fini).

On peut affiner la décomposition

$$D = \sum_{e \in E} P_e + \Lambda$$

du demi-groupe D en utilisant la relation d'équivalence $\mathfrak{F}$ définie de la façon suivante [9] :

$a \equiv b(\mathfrak{F})$ s'il existe deux entiers positifs m , n tels que $a^m = b^n$.

Nous donnerons aux classes modulo $\mathfrak{F}$ le nom de <u>fuseaux</u>. Un fuseau contient tout sous-groupe cyclique qu'il rencontre, est à la fois semi-stable et semi-premier et est un complexe minimal pour ces deux propriétés. Le radical P_e d'un sous-groupe maximal Γ_e est saturé modulo $\mathfrak{F}$ (autrement dit, réunion de fuseaux). S'il n'est pas vide, l'ensemble Λ est lui-même réunion de fuseaux.

Cas abélien. - Si le demi-groupe D est abélien, les fuseaux, les radicaux P_e, ... des sous-groupes maximaux Γ_e, ... et l'ensemble E des idempotents sont des sous-demi-groupes de D ; de plus, on a les propriétés multiplicatives simples :

$$\Gamma_{e_1} \times \Gamma_{e_2} \subseteq \Gamma_{e_1 e_2} , \qquad P_{e_1} \times P_{e_2} \subseteq P_{e_1 e_2} \quad .$$

Exemples.

1° Demi-groupe cyclique fini D (voir plus haut) : $E = \{e\}$, $D = P_e$, $\Lambda = \emptyset$.

2° Demi-groupe cyclique infini D : $E = \emptyset$, $D = \Lambda$.

3° Demi-groupe D réunion de groupes, [3] : $D = \sum_{e \in E} \Gamma_e$, $P_e = \Gamma_e \ \forall \ e \in E$, $\Lambda = \emptyset$.

Cas particulier (abélien) : demi-groupe des applications f, g, ... de l'ensemble R des nombres réels en lui-même (fonctions numériques partout définies) avec la multiplication ordinaire :

$$(fg)(x) = f(x) . g(x) \quad .$$

Les idempotents sont les fonctions prenant seulement des valeurs idempotentes, 0 ou 1 ; ce sont donc les "fonctions caractéristiques". Le sous-groupe maximal Γ_e relatif à un idempotent e est l'ensemble des fonctions prenant la valeur 0 exactement sur le même ensemble que e. On a $\Gamma_e = P_e$ et $\Lambda = \emptyset$. L'ensemble E des idempotents et l'ensemble des sous-groupes maximaux ont la même puissance que $\mathcal{P}(R)$, (puissance supérieure à celle du continu).

4° Demi-groupe multiplicatif des entiers modulo m, [5], [6] ; je me bornerai à indiquer les principaux résultats.

Soit $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ $(p_\lambda \neq p_\mu)$ la décomposition de m en facteurs premiers. Un entier naturel a appartient à une classe idempotente A si et seulement si on a, pour tout facteur premier de m, l'une ou l'autre des congruences

(1) $$a \equiv 1 \quad (p_i^{\alpha_i}) \quad ,$$

(2) $$a \equiv 0 \quad (p_j^{\alpha_j}) \quad .$$

Soient r le produit des facteurs primaires $p_i^{\alpha_i}$ pour lesquels (1) est vraie, s le produit des facteurs primaires $p_j^{\alpha_j}$ pour lesquels (2) est vraie : nous avons

$$rs = m \quad \text{et} \quad (r , s) = 1 \qquad .$$

Le nombre des idempotents A est 2^n ; l'ordre du sous-groupe maximal Γ_A est $\varphi(r)$ où φ est l'indicateur d'Euler ; Γ_A coïncide avec son radical P_A si $s = 1$ ou si s est semi-premier (chaque α_j égal à 1) et dans ces cas seulement. Le demi-groupe D étant fini, Λ est vide. D est réunion de ses sous-groupes maximaux si m est semi-premier et seulement dans ce cas.

5° Demi-groupe des endomorphismes d'un groupe. - L'étude des demi-groupes de ce type est la question dont nous allons nous occuper maintenant. Quelques préliminaires sur la classification des endomorphismes sont nécessaires.

3. Classification des endomorphismes.

Considérons un groupe G muni d'un domaine d'opérateurs Δ pouvant se réduire à l'opérateur identique (ce qui redonne le cas d'un groupe ordinaire). Soit H l'ensemble des Δ-endomorphismes (c'est-à-dire des endomorphismes η tels que $\eta(\omega x) = \omega . \eta x$, $\forall \omega \in \Delta$). Le composé de deux Δ-endomorphismes est un Δ-endomorphisme ; pour simplifier l'écriture, nous noterons multiplicativement la composition des endomorphismes : ainsi H est un demi-groupe multiplicatif.

A tout Δ-endomorphisme $\eta \in H$, nous associons l'image qu'il donne de G :

$$S_\eta = \eta(G) = \{s \; ; \; s = \eta x , \; x \in G\}$$

qui est un Δ-sous-groupe de G ($\forall s \in S_\eta$ et $\forall \alpha \in \Delta$, on a : $\alpha s \in S_\eta$), et son noyau :

$$N_\eta = \{n \; ; \; n \in G , \; \eta n = e\}$$

(e désignant l'élément-unité du groupe G) ; N_η est un Δ-sous-groupe distingué.

D'après le théorème d'homomorphisme

$$S_\eta \cong G/N_\eta \qquad ,$$

à tout Δ-endomorphisme η est associé un Δ-sous-groupe distingué N_η de G tel que le Δ-groupe-quotient G/N_η soit Δ-isomorphe à un sous-groupe de G . Réciproquement, si N est un Δ-sous-groupe distingué de G tel que G/N soit Δ-isomorphe à un Δ-sous-groupe B de G et si nous désignons par h le

Δ-homomorphisme canonique $G \sim G/N$ et par i le Δ-isomorphisme $G/N \simeq S$, $\eta = ih$ est un Δ-endomorphisme de G qui admet N comme noyau et S comme image.

Les deux propriétés suivantes sont immédiates, mais fondamentales

(P_1) $$S_{\eta_2\eta_1} \subseteq S_{\eta_2} \quad ,$$

(P_2) $$N_{\eta_2\eta_1} \supseteq N_{\eta_1} \quad .$$

Désignons par o l'endomorphisme nul ($ox = e$, $\forall\ x \in G$), par A le groupe des Δ-automorphismes de G, dont l'élément-unité est l'automorphisme identique ε, par Θ l'ensemble des Δ-endomorphismes injectifs $\theta, \dots$ ($N_\theta = \{e\}$, d'où $S_\theta \simeq G$), par Σ l'ensemble des Δ-endomorphismes surjectifs $\sigma, \dots$ ($S_\sigma = G$). Bien entendu, $\mathsf{A} = \Theta \cap \Sigma$. $\mathsf{H} - (\Theta \cup \Sigma) = \Xi$ est par définition l'ensemble des Δ-endomorphismes singuliers $\xi, \dots$ Si G ne se réduit pas à son élément-unité e, $o \in \Xi$. Avec W. SPECHT, [10], nous allons nous intéresser à l'ensemble $\mathsf{M} = \Theta - \mathsf{A}$ des Δ-endomorphismes injectifs propres et à l'ensemble $\Pi = \Sigma - \mathsf{A}$ des Δ-endomorphismes surjectifs propres.

On établit aisément les propositions suivantes, [10] :

1a. Tout Δ-endomorphisme injectif θ est, dans le demi-groupe H, un élément simplifiable à gauche ; Θ est un sous-demi-groupe de H vérifiant la règle de simplification à gauche.

2a. Dans le demi-groupe Θ des Δ-endomorphismes injectifs, l'ensemble $\mathsf{M} = \Theta - \mathsf{A}$ des Δ-endomorphismes injectifs propres est un idéal (éventuellement vide) ; M est donc une partie stable (de H).

3a. Deux Δ-endomorphismes μ, $\mu_1 \in \mathsf{M}$ donnent la même image : $S_\mu = S_{\mu_1}$ si et seulement si l'on a :

$$\mu_1 = \mu\alpha \text{ où } \alpha \text{ est un } \Delta\text{-automorphisme} : \alpha \in \mathsf{A} \quad .$$

4a. Si $\mu \in \mathsf{M}$, on a (d'après la propriété P_1) :

$$(G \supset)\ S_\mu \supseteq S_{\mu^2} \supseteq \dots \supseteq S_{\mu^k} \supseteq S_{\mu^{k+1}} \supseteq \dots \quad ;$$

mais l'égalité $S_{\mu^k} = S_{\mu^{k+1}}$ entraînerait, d'après 3a :

$$\mu^{k+1} = \mu^k \circ \alpha \text{ où } \alpha \in \mathsf{A} \subseteq \Theta \quad ,$$

et, puisque μ^k, élément de Θ, est simplifiable à gauche, $\mu = \alpha$, ce qui n'est pas. Nous avons donc une suite strictement décroissante

$$G \supset S_\mu \supset S_{\mu^2} \supset \dots \supset S_{\mu^k} \supset S_{\mu^{k+1}} \supset \dots$$

d'où résulte d'abord que tout Δ-endomorphisme $\mu \in \mathcal{M}$ est apériodique, que $\mathcal{M}$ est vide ou infini, enfin que $\mathcal{M}$ est certainement vide quand l'ensemble des Δ sous-groupes de G vérifie la condition de chaîne descendante.

1b. Tout Δ-endomorphisme surjectif σ est, dans le demi-groupe $\mathcal{H}$, un élément simplifiable à droite ; Σ est un sous-demi-groupe de $\mathcal{H}$ vérifiant la règle de simplification à droite.

2b. Dans le demi-groupe Σ des Δ-endomorphismes surjectifs, l'ensemble $\Pi = \Sigma - \mathcal{A}$ des Δ-endomorphismes surjectifs propres est un idéal (éventuellement vide) ; Π est donc une partie stable (de $\mathcal{H}$).

3b. Deux Δ-endomorphismes π, $\pi_1 \in \Pi$ ont le même noyau : $N_\pi = N_{\pi_1}$ si et seulement si l'on a :

$$\pi_1 = \alpha\pi \quad \text{où} \quad \alpha \quad \text{est un} \quad \Delta\text{-automorphisme} : \quad \alpha \in \mathcal{A} \quad .$$

4b. Si $\pi \in \Pi$, on a, d'après la propriété P_2 :

$$(\{e\} \subset)\ N_\pi \subseteq N_{\pi^2} \subseteq \dots \subseteq N_{\pi^k} \subseteq N_{\pi^{k+1}} \subseteq \dots \quad ,$$

mais l'égalité $N_{\pi^k} \subseteq N_{\pi^{k+1}}$ entraînerait (d'après 3b)

$$\pi^{k+1} = \alpha\pi^k \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathcal{A} \subseteq \Sigma$$

et puisque π^k, élément de Σ, est simplifiable à droite, $\pi = \alpha$, ce qui n'est pas. Nous avons donc une suite strictement croissante :

$$\{e\} \subset N_\pi \subset N_{\pi^2} \subset \dots \subset N_{\pi^k} \subset N_{\pi^{k+1}} \subset \dots$$

d'où résulte d'abord que tout Δ-endomorphisme $\pi \in \Pi$ est apériodique, que Π est vide ou infini, enfin que Π est certainement vide quand l'ensemble des Δ-sous-groupes distingués de G vérifie la condition de chaîne ascendante.

4. Endomorphismes idempotents et sous-groupes maximaux du demi-groupe $\mathcal{H}$ des Δ-endomorphismes de G.

Dans le groupe $\mathcal{A}$ des Δ-automorphismes, seul l'automorphisme identique ε est idempotent. Ce groupe $\mathcal{A} = \Theta \cap \Sigma$ n'est autre que le plus grand sous-groupe Γ_ε de $\mathcal{H}$ ayant ε comme élément-unité. Nous avons en effet $\mathcal{A} \subseteq \Gamma_\varepsilon$ et si, inversement, $\gamma \in \Gamma_\varepsilon$, l'égalité $\gamma\gamma^{-1} = \varepsilon$ entraîne $G = S_\varepsilon \subseteq S_\gamma$ d'où $S_\gamma = G$ c'est-à-dire $\gamma \in \Sigma$, et l'égalité $\gamma^{-1}\gamma = \varepsilon$ entraîne $\{e\} = N_\varepsilon \supseteq N_\gamma$ d'où $N_\gamma = \{e\}$, c'est-à-dire $\gamma \in \Theta$. Ainsi, $\mathcal{A} = \Gamma_\varepsilon$.

Un Δ-endomorphisme idempotent β qui n'est pas un automorphisme $(\beta \neq \varepsilon)$ ne peut appartenir ni à $\mathcal{M}$, ni à Π, d'après les propriétés 4a, 4b du § 3 : tout Δ-endomorphisme idempotent $\beta \neq \varepsilon$ est singulier.

Si $s \in S_\beta$, c'est-à-dire si $s = \beta x$ $(x \in G)$, nous avons :

$$\beta s = \beta^2 x = \beta x = s \quad ,$$

donc la restriction de β à l'image S_β est l'identité.

Pour tout élément g de G, nous avons $\beta g = s = \beta s$ $(s \in S_\beta)$, donc $gs^{-1} = n \in N_\beta$, c'est-à-dire $g = ns$. Ainsi :

$$G = N_\beta S_\beta \quad .$$

Si maintenant $t \in N_\beta \cap S_\beta$, nous avons : $\beta t = e$ (puisque $t \in N_\beta$) et $\beta t = t$ (puisque $t \in S_\beta$) donc $t = e$ et par suite

$$N_\beta \cap S_\beta = \{e\} \quad .$$

Il en résulte que, pour chaque élément g de G, la représentation $g = ns$ où $n \in N_\beta$ et $s \in S_\beta$ est unique. Chaque classe $N_\beta g$ par rapport à N_β contient un élément s de S_β et un seul.

Réciproquement, considérons dans le Δ-groupe G un Δ-sous-groupe distingué N et un Δ-sous-groupe S vérifiant les deux conditions

(1) $$G = NS \quad ,$$

(2) $$N \cap S = \{e\} \quad .$$

Tout élément g de G admet une représentation unique $g = ns$, où $n \in N$ et $s \in S$, et l'application β définie par $g \xrightarrow{\beta} s$ est un endomorphisme puisque nous avons

$$gg_1 = ns . n_1 s_1 = nn_1' . ss_1 \quad \text{où} \quad n_1' = sn_1 s^{-1} \in N \quad .$$

De plus, β est un Δ-endomorphisme puisque :

$$\forall \ \omega \in \Delta , \qquad \omega g = \omega(ns) = (\omega n)(\omega s)$$

où $\omega n \in N$ et $\omega s \in S$, c'est-à-dire :

$$\beta(\omega g) = \omega s = \omega(\beta g) \quad .$$

Si $s \in S$, l'égalité $s = es$ (où $e \in N$) entraîne $\beta s = s$: la restriction de β à S est l'identité, d'où :

$$\forall \ g \in G , \quad \beta^2 g = \beta s = s = \beta g$$

c'est-à-dire

$$\beta^2 = \beta \quad ;$$

le Δ-endomorphisme β est donc idempotent ; d'après sa définition même, son noyau est N et l'image est S.

En tenant compte du fait que l'automorphisme identique ε correspond au cas $N = \{e\}$, $S = G$, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 1 (R. BAER, [1] ; [10]). - Les Δ-endomorphismes idempotents du Δ-groupe G correspondent bijectivement aux décompositions

$$G = NS \quad \text{avec} \quad N \cap S = \{e\}$$

où N est un Δ-sous-groupe distingué et S un Δ-sous-groupe de G. L'endomorphisme idempotent correspondant à une telle décomposition associe à un élément de G sa composante dans S, sa restriction à S est l'identité.

Les Δ-endomorphismes idempotents sont appelés endomorphismes de décomposition ("splitting endomorphisms", [1]) ; le sous-groupe image S est appelé rétract de G.

Exemples.

1. Une décomposition directe

$$G = A \times B , \qquad A \cap B = \{e\}$$

(A, B Δ-sous-groupes distingués) fournit deux Δ-endomorphismes idempotents : la projection sur A $(g = ab \to a)$ et la projection sur B $(g = ab \to b)$. Si G est abélien, tout Δ-endomorphisme idempotent détermine une décomposition directe à laquelle est associé un deuxième Δ-endomorphisme idempotent qui peut être dit conjugué du premier.

2. En prenant pour G le groupe symétrique S_4 formé par les bijections d'un ensemble de quatre éléments, pour S le groupe S_3' des bijections laissant un élément fixe et pour N le groupe de Klein V_4 (sous-groupe distingué de S_4), on a bien $G = NS$ et $N \cap S = \{e\}$.

3. Le groupe G des déplacements en géométrie euclidienne à deux dimensions (c'est-à-dire des isométries respectant l'orientation), le sous-groupe distingué des translations N et le sous-groupe S des rotations autour d'un point donné O, vérifient également les deux relations fondamentales :

$$G = NS \quad \text{et} \quad N \cap S = \{e\} \quad .$$

Dans les exemples 2 et 3, S est rétract de G sans être facteur direct.

Etudions le sous-groupe maximal Γ_β ayant pour élément-unité le Δ-endomorphisme idempotent β (il n'est pas nécessaire de supposer β singulier ; pour $\beta = \varepsilon$, on retrouve que Γ_β est le groupe A des Δ-automorphismes). Soit $\eta \in \Gamma_\beta$, donc :

$$\beta\eta = \eta\beta = \eta \quad ,$$

et, en désignant par η^{-1} l'inverse de η dans Γ_β,

$$\eta^{-1}\eta = \eta\eta^{-1} = \beta \ ,$$

d'où, d'après la propriété (P_1) du § 3 :

$$S_\eta = S_{\beta\eta} \subseteq S_\beta \quad ,$$
$$S_\beta = S_{\eta\eta^{-1}} \subseteq S_\eta$$

donc

(3) $$S_\eta = S_\beta \quad ;$$

d'après la propriété (P_2), nous avons de même :

$$N_\eta = N_{\eta\beta} \supseteq N_\beta \quad ,$$
$$N_\beta = N_{\eta^{-1}\eta} \supseteq N_\eta \quad ,$$

donc

(4) $$N_\eta = N_\beta \quad .$$

Ainsi, le sous-groupe maximal Γ_β est contenu dans l'ensemble Γ'_β des Δ-endomorphismes de G qui donnent S_β comme image et ont pour noyau S_β.

Il en résulte que :

- pour $\beta = \varepsilon$, Γ_β ne comprend que des Δ-automorphismes ; par conséquent Γ_ε est le groupe A des Δ-automorphismes (comme nous l'avons déjà vu) ;

- pour $\beta \neq \varepsilon$, Γ_β ne contient que des endomorphismes singuliers : $\Gamma_\beta \subseteq \Xi$. Nous avons même, pour le radical P_β de Γ_β, $P_\beta \subseteq \Xi$. En effet, Θ et Σ étant stables, donc semi-stables, $\Theta \cup \Sigma$ est semi-stable et $\Xi = H - (\Theta \cup \Sigma)$ est semi-premier : $\Gamma_\beta \subseteq \Xi$ entraîne donc $P_\beta = R(\Gamma_\beta) \subseteq \Xi$.

Montrons maintenant que l'ensemble Γ'_β $(\supseteq \Gamma_\beta)$ des Δ-endomorphismes de G donnant S_β comme image et ayant pour noyau N_β, est un groupe, ce qui entraînera aussitôt l'égalité $\Gamma_\beta = \Gamma'_\beta$.

Soit $\eta \in \Gamma'_\beta$ c'est-à-dire : $S_\eta = S_\beta$ et $N_\eta = N_\beta$.

Soit s_0 un élément de l'image $S_\eta = S_\beta$: il existe un élément g de G tel que $\eta g = s_0$. Puisque $G = N_\beta S_\beta$, nous avons $g = ns$ avec $n \in N_\beta = N_\eta$ et $s = \beta g \in S_\beta = S_\eta$, d'où $\eta g = \eta s$ et finalement il existe un élément $s \in S_\beta$ tel que $\eta s = s_0$: ainsi, <u>la restriction η^* de η à l'image S_β est surjective</u>.

Pour tout élément $g = ns$ de G, nous avons

$$\eta g = \eta s = \eta(\beta g) = \eta\beta g$$

d'où

$$\eta = \eta\beta = \eta^* \beta \quad .$$

<u>Un Δ-endomorphisme $\eta \in \Gamma'_\beta$ est donc déterminé par sa restriction η^* à l'image S_β</u>.

Considérons deux éléments s, s_1 de S_β tels que $\eta^* s = \eta^* s_1$ (ou $\eta s = \eta s_1$). L'élément $s^{-1} s_1$ de S_β appartient au noyau $N_\eta = N_\beta$ et, puisque $N_\beta \cap S_\beta = \{e\}$, nous avons $s = s_1$. <u>La restriction η^* de η à S_β est donc injective</u> : finalement, <u>η^* est un Δ-automorphisme de S_β et tout élément η de Γ'_β est de la forme</u>

$$\eta = \eta^* \beta \quad . \tag{5}$$

<u>Réciproquement</u>, tout Δ-endomorphisme de G de la forme $\sigma\beta$ où σ est un Δ-automorphisme de S_β, appartient évidemment à Γ'_β. Γ'_β <u>est donc l'ensemble de ces endomorphismes</u>, de la forme (5).

Deux tels endomorphismes η, η_1 se composent suivant la loi

$$\eta\eta_1 = (\eta^* \beta)(\eta_1^* \beta) = \eta^* \beta^* \eta_1^* \beta \quad ;$$

la restriction β^* de β à S_β étant l'identité, il vient :

$$\eta\eta_1 = (\eta^* \eta_1^*)\, \beta \in \Gamma'_\beta \quad . \tag{6}$$

Γ'_β est donc <u>stable</u> ; de plus, d'après (6), Γ'_β est isomorphe au groupe des Δ-automorphismes de l'image S_β, donc est lui-même un groupe et nous avons bien l'égalité $\Gamma'_\beta = \Gamma_\beta$. En résumé :

THÉORÈME 2. - <u>Les Δ-endomorphismes η de G qui appartiennent au sous-groupe maximal Γ_β associé à un idempotent β sont caractérisés par les deux égalités</u> :

$$S_\eta = S_\beta \,, \qquad N_\eta = N_\beta \quad .$$

Leur restriction η^* à S_β est un Δ-automorphisme de S_β, ils sont de la forme (5) et Γ_β est isomorphe au groupe des Δ-automorphismes de S_β.

Considérons enfin, dans l'ensemble des idempotents β, γ, ... du demi-groupe H la relation d'ordre classique [7] :

$$\beta \leqslant \gamma \quad \text{si} \quad \beta\gamma = \gamma\beta = \beta \quad .$$

L'égalité $\gamma\beta = \beta$ entraîne, d'après la propriété (P_1) du § 3 :

$$S_\beta = S_{\gamma\beta} \subseteq S_\gamma \quad ;$$

de même, d'après la propriété (P_2), $\beta\gamma = \beta$ entraîne :

$$N_\beta = N_{\beta\gamma} \supseteq N_\gamma \quad .$$

Réciproquement, supposons que deux Δ-endomorphismes idempotents β, γ vérifient

$$S_\beta \subseteq S_\gamma \quad .$$

Un élément quelconque g de G admet les deux décompositions

$$g = ms \quad \text{où} \quad m \in N_\beta \quad \text{et} \quad s \in S_\beta \quad ,$$
$$g = nt \quad \text{où} \quad n \in N_\gamma \quad \text{et} \quad t \in S_\gamma \quad .$$

Nous avons :

$$\gamma\beta g = \gamma s \ , \qquad s = \beta g \in S_\beta \subseteq S_\gamma$$

donc

$$\gamma\beta g = s = \beta g$$

c'est-à-dire

$$\gamma\beta = \beta \quad .$$

De même, si nous avons

$$N_\gamma \subseteq N_\beta \quad ,$$

les égalités

$$\beta\gamma g = \beta t = \beta(n^{-1} ms) \quad ,$$

où $n^{-1} m \in N_\beta$, entraînent :

$$\beta\gamma g = \beta(n^{-1} m.s) = \beta s = s = \beta g$$

donc

$$\beta\gamma = \beta \quad .$$

Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 3. - Pour deux Δ-endomorphismes idempotents β, γ du groupe G, les propriétés

$$\beta = \gamma\beta \quad \underline{\text{et}} \quad S_\beta \subseteq S_\gamma$$

sont équivalentes ; de même

$$\beta = \beta\gamma \quad \underline{\text{et}} \quad N_\gamma \subseteq N_\beta \quad ;$$

l'inégalité $\beta \leqslant \gamma$ a donc lieu si et seulement si les images et les noyaux de β et de γ vérifient

$$S_\beta \subseteq S_\gamma \ \underline{\text{et}} \ N_\beta \supseteq N_\gamma \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAER (Reinhold). - Splitting endomorphisms, Trans. Amer. math. Soc., t. 61, 1947, p. 508-516.

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, Chapitre 1 : Structures algébriques. - Paris, Hermann, 1942 (Act. scient. et ind., 934 ; Bourbaki, 4).

[3] CLIFFORD (A. H.). - Semi-groups admitting relative inverses, Annals of Math., Series 2, t. 42, 1941, p. 1037-1049.

[4] FITTING (Hans). - Die Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nicht kommutativen Gruppen, Math. Annalen, t. 107, 1933, p. 514-542.

[5] HEWITT (E.) and ZUCKERMANN (H. S.). - The multiplicative semi-group of integers modulo m , Pacific J. of Math., t. 10, 1960, p. 1291-1308.

[6] PARIZEK (B.) a SCHWARZ (Š.). - On the multiplicative semi-group of residue classes mod m [en slovaque, résumé en anglais], Matem.-Fys. Casopis, Bratislava, t. 8, 1958, p. 136-150.

[7] REES (D.). - On semi-groups, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 36, 1940, p. 387-400.

[8] SCHWARZ (Š.). - Zur Theorie der Halbgruppen [en slovaque, résumé en allemand], Sbornik prác Prirodovedeckej Fakulty Sloveskej Univerzity v Bratislave, n° 6, 1943, 64 p.

[9] SCHWARZ (Š.). - Semigroups satisfying some weakened forms of the cancellation law [en slovaque, résumé en anglais], Matem. - Fys. Casopis, Bratislava, t. 6, 1956, p. 149-158.

[10] SPECHT (W.). - Gruppentheorie. - Berlin, Springer-Verlag, 1956 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 82) [voir en particulier § 1.3.3].

*

* *

N. B. [Juillet 1963]. — La question exposée dans la conférence précédente, en 1961, a évolué, depuis cette date, à la fois vers une plus grande généralité et une plus grande précision des résultats.

Comme l'avait remarqué E. BAER, la théorie des endomorphismes est indépendante de l'associativité et par conséquent s'applique aux <u>boucles</u> ("loops"), c'est-à-dire aux quasi-groupes avec élément-unité, aussi bien qu'aux groupes. Mais en fait, les questions dont nous nous sommes occupés sont indépendantes aussi de l'existence d'un élément-unité et de l'axiome des quotients. Finalement, la théorie s'applique à n'importe quel ensemble G muni d'une loi de composition interne et d'un domaine d'opérateurs ("groupoïde avec opérateurs"). Bien entendu, les démonstrations doivent être modifiées, le noyau N_η de l'endomorphisme η étant remplacé par l'équivalence d'homomorphisme ou équivalence nucléaire R_η, définie par : $x \equiv y \pmod{R_\eta}$ si $\eta x = \eta y$.

Quant aux résultats, une classification plus fine des endomorphismes permet de localiser exactement, dans l'ensemble Ξ des endomorphismes singuliers, les sous-groupes maximaux Γ_β $(\beta \neq \varepsilon)$ et leurs radicaux $\mathcal{P}_\beta$.

Cette forme plus élaborée de la théoriea été exposée à New Orleans [Tulane University] et à Knoxville [University of Tennessee] en Mai 1962, puis à Paris en Novembre 1962. On pourra se reporter soit aux leçons de Tulane (en particulier Lecture XIII, en englais), soit aux conférences de Paris, soit encore à un mémoire à paraître.

Voir aussi "A. H. CLIFFORD et G. B. PRESTON : The algebraic theory of semigroups, Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7)", en particulier § 1.7 (sous-groupes maximaux), § 2.1 et § 2.3 (étude des équivalences de Green, avec le théorème : deux sous-groupes maximaux contenus dans une même "$\mathcal{D}$-classe" sont <u>isomorphes</u>, théorème 2.20 et exercice 1 du § 2.3), § 2.2 (cas du demi-groupe $\mathfrak{T}_X$ des applications d'un ensemble X en lui-même, d'après C. G. DOSS et D. D. MILLER) et exercice 6 (demi-groupe des applications linéaires d'un espace vectoriel en lui-même).