Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Pierre Lefebvre

Sur certaines équivalences simplifiables d'un demi-groupe

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, n° 1 (1960-1961), exp. n° 10, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_1_A9_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
14e année, 1960/61, n° 10

30 janvier 1961

SUR CERTAINES ÉQUIVALENCES SIMPLIFIABLES D'UN DEMI-GROUPE

par Pierre LEFEBVRE

INTRODUCTION. - L'étude de certains demi-groupes admettant un plus grand groupe homomorphe (voir par exemple [6]), et ses rapports avec l'existence d'un plus grand semi-groupe homomorphe à un demi-groupe (cf. [14]) m'ont amené à chercher une construction de la plus fine équivalence régulière et simplifiable dans un demi-groupe non commutatif (le cas abélien étant très simple).

Il m'est apparu à cette occasion que, parmi les équivalences susceptibles d'être définies dans un demi-groupe, on s'était occupé surtout de celles qui sont régulières, ou régulière et simplifiables.

Le maniement des équivalences simplifiables est d'ailleurs a priori plus délicat que celui des équivalences régulières. Il faut noter également que l'égalité, équivalence minimum dans le treillis des équivalences, est régulière, mais n'est pas en général simplifiable. Elle ne l'est que dans les semi-groupes : ce fait m'a conduit à m'intéresser en particulier à une classe de demi-groupes qui généralise celle des semi-groupes : les demi-groupes stationnaires [13].

Il m'a aussi montré l'intérêt d'avoir une construction de la plus fine équivalence simplifiable pour un demi-groupe quelconque. Le procédé utilisé consiste à définir par récurrence une suite croissante de relations dont on prend la réunion [3]. Ce procédé s'est révélé être assez fécond, puisqu'il s'applique à la construction de la plus fine équivalence régulière et simplifiable, ainsi qu'à celle de la plus fine équivalence simplifiable - ou régulière et simplifiable - pour laquelle un complexe quelconque d'un demi-groupe est indivisible (cf. [9] et [10]).

Le dernier paragraphe de cet exposé - qui constitue le dernier chapitre d'un projet de thèse - illustre l'intérêt de la caractérisation de la plus fine équivalence simplifiable d'un côté, dans un cas particulier où la suite qui la définit se réduit à ses deux premiers termes : les demi-groupes stationnaires y sont reliés aux demi-groupes inversés et rectangulaires [13] par une propriété des équivalences simplifiables, comme les semi-groupes sont reliés aux groupes [10].

Notons enfin qu'il serait sans doute intéressant d'étudier les demi-groupes pour lesquels les suites qui définissent les plus fines équivalences en question, ne comportent qu'un nombre fini (et petit) de termes.

1. Plus fine équivalence simplifiable d'un côté dans un demi-groupe.

Soit D un demi-groupe. Une relation R définie dans D est simplifiable à droite, par exemple, si $a, b, x \in D$, $axRbx$ entraîne aRb.

Soit $\mathcal{E}_d$ l'ensemble des équivalences simplifiables à droite de D, ordonné par la relation usuelle : $R \subseteq R' \iff (aRb \implies aR'b)$. Dans le treillis complet T des équivalences de D, $\mathcal{E}_d$ est une famille de Moore ([3]) : toute intersection d'équivalences simplifiables à droite est simplifiable à droite, et l'équivalence universelle est simplifiable à droite. Nous construisons l'équivalence simplifiable à droite minimum σ_d, intersection de toutes les équivalences simplifiables à droite de D.

Comme nous ne supposons pas a priori que D possède un élément neutre, nous posons : $D^* = D \cup \{e\}$, avec : $\forall\ x \in D^*$, $ex = xe = x$ (si D possède un élément neutre u, nous prendrons $e = u$, d'où $D^* = D$).

L'introduction de D^* simplifie certaines définitions. Il faudra prendre garde, cependant, que ces définitions font intervenir soit des éléments de D seulement, soit ceux de D^*.

1° L'égalité dans D est une équivalence régulière que nous noterons σ_1.

2° La relation σ_2, définie par : $a, b \in D$, $a\sigma_2 b \iff \exists\ x \in D^*$ tel que $ax\sigma_1 bx$, est une relation, définie dans D, réflexive, symétrique, simplifiable à droite et régulière à gauche dans D [14].

Si ρ est une relation réflexive et simplifiable à droite de D, on a $\sigma_2 \subseteq \rho$. Donc lorsque σ_2 est transitive, on a $\sigma_2 = \sigma_d$, équivalence simplifiable à droite minimum de D.

En particulier, σ_2 est transitive dans les trois cas suivants :

a. Dans un demi-groupe commutatif : il est alors immédiat que σ_2 est la plus fine équivalence régulière et simplifiable de D ; D/σ_2 est le plus grand semi-groupe homomorphe à D.

b. Dans un demi-groupe stationnaire à gauche. Un demi-groupe D est stationnaire à gauche si $\exists\ x_1 \in D$ tel que $ax_1 = bx_1$ entraîne, $\forall\ x \in D$, $ax = bx$. Notons qu'alors σ_2 est régulière, et que c'est la plus fine équivalence régulière, simplifiable à droite, de D .

c. Dans un demi-groupe réversible à gauche [3], c'est-à-dire tel que deux éléments quelconques aient un multiple commun à droite. Car $ax = bx$ et $by = cy$ entraînent, puisqu'il existe, $m , n \in D$ tels que $xm = yn$;

$$a(xm) = bxm = byn = c(yn)$$

(On peut toujours supposer x et y différents de e).

3° Dans le cas général, nous construisons par récurrence, à partir de σ_1 , une suite croissante (S) de relations σ_i , définies dans D ,

(S) $$\sigma_1 \subseteq \sigma_2 \subseteq \cdots \subseteq \sigma_{2p-1} \subseteq \sigma_{2p} \subseteq \sigma_{2p+1} \subseteq \cdots \qquad (p = 1 , 2 \ldots)$$

réflexives, symétriques et régulières à gauche, celles d'indice pair étant simplifiables à droite, celles d'indice impair étant transitives, chaque relation étant contenue dans toute équivalence simplifiable à droite.

Pour cela, les relations σ_i étant supposées définies jusqu'à $i = 2p - 1$ ($p \geqslant 1$) avec les propriétés précédentes, nous définissons :

σ_{2p} par $a , b \in D$, $a\sigma_{2p} b \iff \exists\ x \in D^*$ tel que $ax\sigma_{2p-1} bx$

σ_{2p+1} comme fermeture transitive de σ_{2p} .

Nous avons immédiatement $\sigma_{2p-1} \subseteq \sigma_{2p} \subseteq \sigma_{2p+1}$ (si $a\sigma_{2p-1} b$, on a $ae\sigma_{2p-1} be$). σ_{2p} est réflexive et régulière à gauche, puisque σ_{2p-1} l'est ; elle est évidemment symétrique et simplifiable à droite.

Si ρ_1 est une équivalence simplifiable à droite de D , on a $\sigma_{2p} \subseteq \rho_1$. Car $a , b \in D$, $a\sigma_{2p} b$ entraîne :

soit $ae\sigma_{2p-1} be$ ou $a\sigma_{2p-1} b$, avec $\sigma_{2p-1} \subseteq \rho_1$, donc $a\rho_1 b$,

soit $ax\sigma_{2p-1} bx$ ($x \in D$), d'où $ax\rho_1 bx$, et comme ρ_1 est simplifiable à droite dans D , $a\rho_1 b$.

σ_{2p+1} est une équivalence régulière à gauche, comme fermeture transitive d'une relation réflexive, symétrique et régulière à gauche. Si ρ_1 est une équivalence simplifiable à droite dans D, on a $\sigma_{2p+1} \subseteq \rho_1$; car $a , b \in D$, $a\sigma_{2p+1} b$ entraîne l'existence de $m_1 , m_2 , \ldots , m_n \in D$ tels que $a\sigma_{2p} m_1\ \sigma_{2p} m_2 , \ldots , m_n\ \sigma_{2p} b$ c'est-à-dire $a\rho_1 b$ puisque $\sigma_{2p} \subseteq \rho_1$, et que ρ_1 est transitive.

Dans cette démonstration, les propriétés d'une relation dépendent seulement de celles de la relation immédiatement inférieure, ce qui explique qu'on puisse construire la suite à partir de σ_1 seulement.

4° Enfin, nous définissons une relation σ_d dans D par :

$a , b \in D$, $a\sigma_d b \iff \exists\ n$, entier naturel ≥ 1 , tel que $a\sigma_n b$, $\sigma_n \in (S)$, c'est-à-dire $\sigma_d = \bigcup_{i=1}^{\infty} \sigma_i$. La relation σ_d est l'équivalence simplifiable à droite minimum de D . La reflexivité et la symétrie sont immédiates ; la transitivité résulte de l'inclusion des relations σ_i et du fait que les σ_{2p+1} sont des équivalences ; la simplifiabilité à droite résulte de cette même inclusion et du fait que les σ_{2p} sont simplifiables à droite.

σ_d est la plus petite équivalence simplifiable à droite de D ; car si ρ_1 est une équivalence simplifiable à droite de D , et si $a , b \in D$, $a\sigma_d b$, il existe n tel que $a\sigma_n b$; de $\sigma_n \subseteq \rho_1$ résulte alors $a\rho_1 b$.

Les relations σ_i étant régulière à gauche, la propriété suivante est immédiate :

THÉORÈME 1.1. - <u>Dans un demi-groupe, la plus fine équivalence simplifiable d'un coté est régulière de l'autre côté.</u>

REMARQUE. - Si σ_g est la plus fine équivalence simplifiable à gauche de D , la condition

$$(\sigma^*) \qquad \sigma_d = \sigma_g$$

est une condition suffisante pour que σ_d $(= \sigma_g)$ soit la plus fine équivalence régulière et simplifiable de D .

Dans [14], G. THIERRIN a indique une classe très large de demi-groupes possèdant cette propriété (demi-groupes abéliens, homogroupes). Ces demi-groupes vérifient la condition

$$(\sigma) \qquad \exists\ x \in D , \quad ax = bx \iff \exists\ x_1 \in D , \quad x_1 a = x_1 b \quad .$$

Dans ce cas, σ_2 est transitif et égal à σ_d $(= \sigma_g)$.

Le théorème X de [14] s'étend immédiatement aux demi-groupes vérifiant la condition (σ^*).

THÉORÈME 1.2. - Pour que les équivalences simplifiables à droite d'un demi-groupe D vérifiant la condition (σ^*) soient régulières à droite, il faut et il suffit que tout semi-groupe homomorphe à D soit un groupe.

2. Plus petite équivalence simplifiable d'un demi-groupe.

Nous construisons l'élément nul τ du treillis complet $\mathcal{E}$ des équivalences simplifiables définies dans un demi-groupe D non commutatif. Rappelons que, dans le cas commutatif, on a $\tau = \sigma_2$, définie par $a, b \in D$, $a \sigma_2 b$, si et seulement s'il existe $x \in D$ (ou D^*) tel que $ax = bx$, équivalence qui est aussi, dans ce cas, la plus petite équivalence régulière et simplifiable de D.

D^* étant défini comme au paragraphe 1, on construit par récurrence une suite croissante (T) de relations τ_i réflexives et symétriques, celles d'indice pair étant simplifiables, celles d'indice impair étant transitives, chaque relation étant contenue dans toute équivalence simplifiable.

1° τ_1 étant l'égalité, τ_2 est définie par la condition $a, b \in D$, $a \tau_2 b$ si et seulement s'il existe $x, y \in D^*$ tels que $xay \tau_1 xby$.

τ_2 est réflexive, symétrique et simplifiable. Si ρ est une relation réflexive et simplifiable de D, on a $\tau_2 \subseteq \rho$ car $a, b \in D$, $a\tau_2 b \iff \exists\ x, y \in D^*$, $xay = xby \iff xay \equiv xby\ (\rho) \iff a \equiv b\ (\rho)$, la démonstration restant valable si x ou y est égal à e. Lorsque τ_2 est transitive, c'est l'équivalence simplifiable minimum de D. En particulier, τ_2 est transitive dans les deux cas particuliers suivants :

a. Dans un demi-groupe stationnaire (c'est-à-dire stationnaire à gauche et à droite).

Car $a, b, c \in D$, $x, y, x', y' \in D^*$, $xay = xby$, $x'by' = x'cy'$ entraînent $xay' = xby'$ (encore vrai si $x = e$) et $x'ay' = x'by' = x'cy'$.

τ_2 est régulière, car $a, b \in D$, $x, y \in D^*$, $xay = xby$ entraînent par exemple, pour tout $r \in D^*$, $xray = xrby$.

τ_2 est donc, pour un demi-groupe stationnaire, la plus fine équivalence régulière et simplifiable.

b. Dans un demi-groupe réversible.

S'il existe $x, y, x', y' \in D^*$ tels que $a, b, c \in D$ et $xay = xby$, $x'by' = x'cy'$, on peut toujours supposer, en multipliant à gauche ou à droite par un élément quelconque de D , x , y , x' , y' différents de e . Il existe alors, par hypothèse, $m , n , m' , n' \in D$ tels que $ym = y'n$, $m'x = n'x'$, d'où :

$$xaym = xbym$$

et

$$(m'x)\, a(ym) = (m'x)\, b(ym) = (n'x')\, b(y'\, n) = (n'x')\, c(y'n) \quad .$$

2° Dans le cas général, à partir de τ_1 , nous construisons la suite (T) par récurrence ; si nous supposons les τ_i définis jusqu'à $i = 2p - 1$ ($p \geq 1$) avec les propriétés citées plus haut, nous définissons :

$$\tau_{2p} \text{ par } a , b \in D , \ a\tau_{2p}\, b \iff \exists \ x , y \in D^* \text{ tels que } xay\tau_{2p-1}\, xby$$

$$\tau_{2p+1} \text{ comme fermeture transitive de } \tau_{2p} \quad .$$

On a évidemment $\tau_{2p-1} \subseteq \tau_{2p} \subseteq \tau_{2p+1}$; τ_{2p} est réflexive et simplifiable dans D . τ_{2p+1} est une équivalence dans D . Si ρ_1 est une équivalence simplifiable de D , on démontre comme au paragraphe 13 les inclusions $\tau_{2p} \subseteq \tau_{2p+1} \subseteq \rho_1$.

4° Si l'on définit la relation τ comme réunion des τ_i : $\tau = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tau_i$, τ est la plus fine équivalence simplifiable de D . Cette équivalence n'est pas régulière a priori.

3. Plus petite équivalence régulière et simplifiable de D .

Nous construisons maintenant l'équivalence régulière et simplifiable minimum Σ^* , définie dans D , intersection de toutes les équivalences régulières et simplifiables de D ; le demi-groupe quotient $S^* = D/\Sigma^*$ est alors le plus grand semi-groupe homomorphe à D , et tout semi-groupe homomorphe à D est homomorphe à S^* [14].

Le procédé de construction employé est encore le même qu'aux paragraphes précédents : nous définissons par récurrence une suite croissante de relations dont nous prenons la réunion.

Cette étude concerne essentiellement le cas non commutatif. Dans le cas commutatif, nous avons déjà souligné que Σ^* était l'équivalence définie par : $a , b \in D$, $a\Sigma^* b$ si et seulement s'il existe $x \in D$, tel que $ax = bx$.

1° L'égalité, plus fine équivalence régulière de D, est ici notée ω_1.

2° Nous construisons par récurrence une suite croissante (0) de relations ω_i, réflexives, symétriques et régulières,

$$\omega_1 \subseteq \omega_2 \subseteq \cdots \subseteq \omega_{2p-1} \subseteq \omega_{2p} \subseteq \omega_{2p+1} \subseteq \cdots \tag{0}$$

telles que chacune de ces relations soit contenue dans toute équivalence régulière et simplifiable de D, celles d'indice impair étant des équivalences.

Les relations ω_i (i entier naturel ≥ 1) étant supposées définies jusqu'a $i = 2p - 1$ ($p \geq 1$) avec les propriétés précédentes, nous définissons ω_{2p} de la manière suivante : $a , b \in D$, $a\omega_{2p} b$ si et seulement s'il existe $a' , b' \in D$, $x , y , u , v \in D^*$ tels que $a = ua'v$, $b = ub'v$, $uxa'yv\omega_{2p-1}uxb'yv$.

La relation ω_{2p+1} est définie comme fermeture transitive de ω_{2p}.

La symétrie de ω_{2p} est immédiate. Si $a , b \in D$ et $a\omega_{2p-1} b$, en posant $a = eae$, $b = ebe$, on a $e.e.a.e.e. = e.e.b.e.e$, c'est-à-dire $a\omega_{2p} b$ d'où $\omega_{2p-1} \subseteq \omega_{2p}$.

La reflexivité de ω_{2p} résulte alors de celle de ω_{2p-1}.

La relation ω_{2p} est régulière : démontrons par exemple la régularité à gauche.

Supposons que $a , b \in D$, $a\omega_{2p} b$; il existe $a' , b' \in D$, $x , y , u , v \in D^*$ tels que

$$a = ua'v , \quad b = ub'v , \quad uxa'yv\omega_{2p-1}uxb'yv$$

ω_{2p-1} étant régulière dans D, pour tout $r \in D$, on a :

$$ra = (ru)\, a'v , \quad rb = (ru)\, b'x , \quad (ru)\, xa'yv\omega_{2p-1} (ru)\, xb'yv$$

ce qui prouve que les éléments ra et rb vérifient la relation ω_{2p}.

Si Σ est une équivalence régulière et simplifiable de D, montrons que $\omega_{2p} \subseteq \Sigma$.

Soient $a , b \in D$ tels que $a\omega_{2p} b$; avec les notations précédentes, supposons d'abord u et v différents de e ; alors $u , v \in D$. De $uxa'yv\omega_{2p-1}uxb'yv$ et $\omega_{2p-1} \subseteq \Sigma$ on déduit $uxa'yv\Sigma uxb'yv$; que x et y soient ou non différents de e, et Σ étant simplifiable dans D, on a $a'\Sigma b'$; Σ étant régulière dans D, on a aussi $ua'v\Sigma ub'v$, c'est-à-dire finalement $a\Sigma b$.

Si par exemple $u = e$, on a $a = a'v$, $b = b'v$, $xa'yv\omega_{2p-1}\, xb'yv$, et la démonstration précédente s'adapte sans difficulté.

La fermeture transitive de ω_{2p} est une équivalence régulière, puisque ω_{2p} est une relation réflexive, symétrique et régulière. On a évidemment $\omega_{2p-1} \subseteq \omega_{2p} \subseteq \omega_{2p+1}$. Si Σ est une équivalence régulière et simplifiable de D , on a $\omega_{2p+1} \subseteq \Sigma$.

Car $a , b \in D$, $a\omega_{2p+1} b$ entraîne $a\omega_{2p}\, m_1 , m_1\omega_{2p}\, m_2 , \ldots , m_n\omega_{2p}\, b$ ($m_i \in D$) et comme $\omega_{2p} \subseteq \Sigma$, et que Σ est transitive, il en résulte aussitôt $a\Sigma b$.

Les relations ω_{2p} et ω_{2p+1} ont donc bien les propriétés annoncées au début du point 2.

3° Enfin, nous définissons la relation Σ^* en prenant la réunion des relations ω_i : $\Sigma^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} \omega_i$. Σ^* est la plus fine équivalence régulière et simplifiable de D . La réflexivité et la symétrie sont immédiates ; la transitivité et la régularité résultent du fait que les ω_i forment une chaîne et que les ω_{2p+1} sont des équivalences régulières.

Σ^* est simplifiable dans D : si $a , b , t \in D$ sont tels que, par exemple, on ait $at\Sigma^* bt$, il existe un entier p tel que $at\omega_{2p-1}\, bt$; comme ω_{2p-1} est régulière dans D , pour un élément quelconque x de D , on a $xat\omega_{2p-1}\, xbt$ d'où, en posant $a = eae$, $b = ebe$, $exate\omega_{2p-1}\, exbte$, c'est-à-dire $a\omega_{2p}\, b$, et par conséquent $a\Sigma^* b$.

Que Σ^* soit la plus fine des équivalences régulières et simplifiables de D est la conséquence immédiate de ce que chaque ω_i est contenue dans toute équivalence régulière et simplifiable de D .

REMARQUE. - Si D est un groupe stationnaire, la suite (O) se réduit à ses deux premiers termes (cf. paragraphe 2).

4. Plus fine équivalence simplifiable à droite pour laquelle un complexe H de D est indivisible.

Dans [10], M. TEISSIER a déterminé de manière simple la plus petite équivalence régulière d'un demi-groupe D pour laquelle un complexe H de D est indivisible. La solution du problème analogue, pour les équivalences simplifiables, ou régulières et simplifiables, n'est pas aussi simple, pour la raison que la plus fine équivalence simplifiable de D n'est pas aussi simplement définie que la plus fine équivalence régulière, qui est l'égalité.

La solution que nous proposons ici est encore fondée sur le procédé des paragraphes précédents : construction d'une suite croissante de relations dont on prend la réunion. L'ensemble Λ_d des équivalences $\mathcal{L}_H$ de D, simplifiables à droite, et pour lesquelles un complexe H de D $(H \neq \emptyset)$ est indivisible, n'est pas vide : l'équivalence universelle appartient à Λ_d ; Λ_d est d'ailleurs dans le treillis T des équivalences de D une famille de Moore. Nous construisons l'élément nul λ_d de λ_d.

On pose encore $D^* = D \cup \{e\}$ avec $\forall\ x \in D^*$, $ex = xe = x$ ($e = u$ si D possède un élément neutre u).

1° λ_1 est la relation définie dans D de la manière suivante :

$a, b \in D$, $a \lambda_1 b$ si et seulement s'il existe $x \in D^*$ tel que $ax = bx$

ou

$$ax \in H \text{ et } bx \in H \quad (\Longleftrightarrow a, b \in H \,{}^{\bullet}\!.\, x \Longleftrightarrow H \,.^{\bullet}\, a \,)(\, H \,.^{\bullet}\, b) .$$

λ_1 est réflexive, symétrique et simplifiable à droite dans D.

Si $\mathcal{L}_H$ est une équivalence simplifiable à droite, définie dans D, et dans laquelle H est indivisible, on a : $\lambda_1 \subseteq \mathcal{L}_H$.

Soit en effet $a, b \in D$, $a \lambda_1 b$; s'il existe $x \in D^*$ tel que $ax = bx$, ou bien $x = e$, $a = b$ et $a \mathcal{L}_H b$; ou bien $x \in D$, $ax \mathcal{L}_H bx$ et $a \mathcal{L}_H b$, puisque $\mathcal{L}_H$ est simplifiable à droite.

S'il existe $x \in D^*$, tel que ax et $bx \in H$, on a $a, b \in H$ ou $ax, bx \in H$ avec $x \in D$.

Dans les deux cas, les hypothèses H invisible modulo $\mathcal{L}_H$ simplifiable à droite entraînent $a \mathcal{L}_H b$.

2° Nous construisons par récurrence, à partir de λ_1, une suite croissante de relations λ_i, définies dans D :

(L) $$\lambda_1 \subseteq \lambda_2 \subset \cdots \subseteq \lambda_{2p-1} \subseteq \lambda_{2p} \subseteq \lambda_{2p+1} \subseteq \cdots \quad (p = 1, 2 \ldots)$$

réflexives, symétriques, celles d'indiee impair étant simplifiables à droite, celles d'indice pair étant transitives ; chaque relation étant contenue dans toute équivalence simplifiable à droite pour laquelle H est indivisible.

Supposant définies les λ_i jusqu'à $i = 2p - 1$ $(p \geqslant 1)$ avec les propriétés précédentes, on définit λ_{2p} comme fermeture transitive de λ_{2p-1} et λ_{2p+1} par la condition :

$$a , b \in D , \quad a\lambda_{2p+1} b \iff \exists \ x \in D^* , \quad ax\lambda_{2p} bx$$

$\lambda 2p$ est évidemment une équivalence contenant λ_{2p-1} ; si $\mathfrak{L}_H$ est une équivalence simplifiable à droite pour laquelle H est indivisible, on a $\lambda_{2p} \subseteq \mathfrak{L}_H$.

En effet, soit $a , b \in D$, $a\lambda_{2p} b$: $\exists$ $m_1 , m_2 , \dots , m_n \in D$ tels que $a\lambda_{2p-1} m_1 , m_1 \lambda_{2p-1} m_2 , \dots , m_n \lambda_{2p-1} b$. De l'inclusion $\lambda_{2p-1} \subseteq \mathfrak{L}_H$ et de la transitivité de $\mathfrak{L}_H$ on déduit alors $a\mathfrak{L}_H b$.

λ_{2p+1} est évidemment symétrique et simplifiable à droite ; on a $\lambda_{2p} \subseteq \lambda_{2p+1}$, car $a\lambda_{2p} b$ entraîne $ae\lambda_{2p} be$. Il en résulte que λ_{2p+1} est réflexive.

Si $\mathfrak{L}_H$ est une équivalence simplifiable à droite pour laquelle H est indivisible, on a $\lambda_{2p+1} \subseteq \mathfrak{L}_H$.

Car $a , b \in D$, $a\lambda_{2p+1} b \implies \exists$ $x \in D^*$ tel que $ax\lambda_{2p} bx$. Si $x = e$, $a\lambda_{2p} b$, avec $\lambda_{2p} \subseteq \mathfrak{L}_H$, entraîne $a\mathfrak{L}_H b$; si $x \in D$, on a $ax\mathfrak{L}_H bx$, d'où $a\mathfrak{L}_H b$ puisque $\mathfrak{L}_H$ est simplifiable à droite dans D .

3° La relation $\lambda_d = \bigcup_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ est la plus fine équivalence simplifiable à droite de D pour laquelle H soit indivisible.

Que λ_d soit une équivalence simplifiable à droite est immédiat. H est indivisible modulo λ_d car $a , b \in H$ entraîne $ae = a$, $be = b \in H$, c'est-à-dire $a\lambda_1 b$; d'où $a\lambda_d b$. Que λ_d soit la plus fine des équivalences $\mathfrak{L}_H$ résulte du fait que chaque λ_i est contenue dans toute $\mathfrak{L}_H$.

Si $\mathfrak{L}$ est une équivalence simplifiable à droite contenant λ_d , $\mathfrak{L}$ est une équivalence $\mathfrak{L}_H$, car H , indivisible modulo λ_d , l'est modulo $\mathfrak{L}$. Les équivalences $\mathfrak{L}_H$ sont donc toutes les équivalences simplifiables à droite qui contiennent λ_d .

5. Plus fine équivalence simplifiable pour laquelle un complexe H est indivisible.

Nous construisons de la même façon l'élément nul μ du treillis M des équivalences simplifiables $\mathfrak{M}_H$ de D pour lesquelles un complexe H donné est indivisible. La suite (μ_i) dont la réunion μ est l'équivalence cherchée sera définie comme suit :

1° $a, b \in D$, $a\mu_1 b$ si et seulement s'il existe $x, y \in D^*$ tels que $xay = xby$ ou $xay, xby \in H$.

2° Les μ_i étant définis jusqu'à $i = 2p - 1$ avec les propriétés requises (suite croissante, chaque μ_i est contenue dans toute équivalence simplifiable pour laquelle H est indivisible, μ_i est réflexive, symétrique et simplifiable pour i impair, et transitive pour i pair), μ_{2p} est définie comme fermeture transitive de μ_{2p-1}, et μ_{2p+1} par la condition : $a, b \in D$, $a\mu_{2p+1} b$ si et seulement s'il existe $x, y \in D^*$ tels que $xay\mu_{2p} xby$.

3° $\mu = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mu_i$ est la plus fine équivalence simplifiable de D pour laquelle H est indivisible et les équivalences $\mathfrak{M}_H$ sont les équivalences simplifiables de D qui contiennent μ.

6. Plus fine équivalence régulière et simplifiable pour laquelle un complexe H de D est indivisible.

Si ν est l'élément nul du treillis N des équivalences régulières et simplifiables pour lesquelles un complexe H de D est indivisible, D/ν est le plus grand semi-groupe homomorphe à D dans lequel l'image de H est formée d'un seul élément.

La méthode est toujours la même : on définit par récurrence une suite croissante de relations ν_i, réflexives, symétriques et régulières ; chacune de ces relations étant contenue dans toute équivalence régulière et simplifiable pour laquelle H est indivisible, celles d'indice pair étant transitives.

1° On prend pour ν_1 la relation définie par les conditions suivantes :

$a, b \in D$, $a\nu_1 b$ si et seulement s'il existe $a', b' \in D$, $u, v, x, z, t \in D^*$ tels que $a = ua'v$, $b = ub'v$ et

$$uxa'yv = uxb'yv$$

ou

$$uxa'yv, \quad uxb'yv \in zHt$$

ν_1 est réflexive (prendre $u = v = y = e$) et symétrique ; ν_1 est régulière ; démontrons par exemple la régularité à gauche.

Soit $a, b \in D$, $a\nu_1 b$; si on a $uxa'yv = uxb'yv$ avec $a = ua'v$, $b = ub'v$ on a aussi $(ru)\, xa'yv = (ru)\, xb'yv$ avec $ra = (ru)\, a'v$, $rb = (ru)\, b'v$, c'est-à-dire $ra\nu_1 rb$.

Si $uxa'yv$ et $uxb'yv \in zHt$, $(ru)\,xa'yv$ et $(ru)\,xb'yv \in (rz)\,Ht$, et on a encore $ra\nu_1\, rb$.

Si π_H est une équivalence régulière et simplifiable de D pour laquelle H est indivisible, on a : $\nu_1 \subseteq \pi_H$. Car si $uxa'yv = uxb'yv$, on a $a'\pi_H\, b'$ puisque π_H est simplifiable dans D et $ua'v\pi_H\, ub'v$ ou $a\pi_H\, b$ puisque π_H est régulière. La démonstration reste valable si certains des éléments x , y , u , v sont égaux à e .

Si $uxa'yv$, $uxb'yv \in zHt$, on remarque d'abord que, H étant indivisible modulo l'équivalence régulière π_H , zHt l'est aussi. Donc $uxa'yv\pi_H\, uxb'yv$, et la démonstration se termine comme ci-dessus.

2° Les relations ν_i étant supposée définies jusqu'à $i = 2p - 1$ ($p \geq 1$) avec les propriétés requises, on définit ν_{2p} comme fermeture transitive de ν_{2p-1} et ν_{2p+1} par la condition : a , $b \in D$, $a\nu_{2p+1}\, b$ si et seulement s'il existe a' , $b' \in D$, u , v , x , $y \in D^*$ tels que $a = ua'v$, $b = ub'v$, $uxa'yv\nu_{2p}\, uxb'yv$.

ν_{2p} est une équivalence régulière contenant la relation réflexive, symétrique et régulière ν_{2p-1} , et si π_H est une équivalence du treillis N , $\nu_{2p-1} \subseteq \pi_H$ entraîne $\nu_{2p} \subseteq \pi_H$.

ν_{2p+1} est symétrique et régulière, car ν_{2p} l'est. On a $\nu_{2p} \subseteq \nu_{2p+1}$ (prendre $u = v = x = y = e$) donc ν_{2p+1} est réflexive.

Si $\pi_H \in N$, on démontre, par un raisonnement analogue à celui de 1 , que $\nu_{2p+1} \subseteq \pi_H$.

3° Si on définit la relation ν comme réunion des ν_i , ν est la plus fine équivalence régulière et simplifiable pour laquelle H est indivisible.

Que ν soit une équivalence régulière est immédiat ; ν est simplifiable dans D ; car si a , b , $t \in D$ et $at\nu bt$, il existe un entier $p \geq 1$ tel que $at\nu_{2p}\, bt$; comme ν_{2p} est régulière, pour x quelconque de D , on a $xat\nu_{2p}\, xbt$; si on écrit $a = eae$, $b = ebe$, $exate\nu_{2p}\, exbte$, on voit que $a\nu_{2p+1}\, b$ c'est-à-dire $a\nu b$.

ν est la plus fine des équivalences régulières et simplifiables pour lesquelles H est indivisible.

H est indivisible modulo ν , car a , $b \in H \implies a = eae$, $b = ebe$ et , $eeaee$, $eebee \in eHe$ c'est-à-dire $a\nu_1\, b$, d'où $a\nu b$.

Que ν soit la plus fine résulte enfin du fait que chaque ν_i est contenue dans toute équivalence π_H.

7. Caractérisation des demi-groupes inversés et rectangulaires par leurs équivalences simplifiables.

J'ai déjà fait remarquer, dans la construction de la plus petite équivalence simplifiable (d'un côté ou bilatère), que les suites (S) et (T) se réduisaient à leurs deux premiers termes lorsque D est stationnaire.

Dans un précédent travail (voir [6]), j'ai mis en évidence une classe particulière de demi-groupes stationnaires : les demi-groupes inversés et rectangulaires [13]. Ceux-ci possèdent, en ce qui concerne les sous-demi-groupes normaux unitaires, des propriétés analogues à celles qu'on a pour les sous-groupes distingués d'un groupe. En particulier, les demi-groupes inversés et rectangulaires globalement idempotents admettent un sous-demi-groupe normal unitaire minimum égal à l'ensemble des idempotents.

Par ailleurs, dans sa thèse [10], G. THIERRIN a donné une caractérisation des groupes au moyen de leurs équivalences simplifiables d'un côté :

THÉORÈME 7.1 (THIERRIN). - Pour qu'un semi-groupe soit un groupe, il faut et il suffit que ses équivalences simplifiables d'un côté soient régulières du même côté.

Il m'a paru intéressant de chercher ce que devient cette proposition lorsqu'on remplace l'hypothèse "semi-groupe" par "demi-groupe stationnaire" qui en constitue une généralisation. J'ai obtenu le théorème suivant :

THÉORÈME 7.2. - Pour qu'un demi-groupe stationnaire D soit inversé et rectangulaire, il faut et il suffit que ses équivalences simplifiables d'un côté soient régulières du même côté.

Nous ferons la démonstration pour le cas "à droite". Rappelons qu'un demi-groupe inversé est un demi-groupe dans lequel : $\forall\ x \in D$, $\exists\ x' \in D$ tel que xx' ou $x'x$ soit idempotent, qu'un demi-groupe rectangulaire est un demi-groupe dans lequel tous les éléments sont forts [13].

Que la condition du théorème 18.2 soit nécessaire résulte immédiatement d'un théorème de G. THIERRIN [14].

THÉORÈME 7.3 (THIERRIN). - Dans un demi-groupe inversé, toute relation réflexive, transitive et simplifiable à droite est régulière à droite.

Pour démontrer la partie "suffisante", et puisque tout demi-groupe stationnaire est rectangulaire, nous établirons que D est inversé lorsque dans D, toute équivalence simplifiable à droite est régulière à droite.

Observons d'abord que D^2 inversé entraîne D inversé. Car si $x \in D$, $x^2 \in D^2$ et s'il existe $x' \in D$, tel que $x^2 x'$ soit idempotent, xx' est alors tel que $x(xx')$ le soit. Donc D est inversé.

Soit $a \in D^2$; nous avons $a = a_1 a_2$, $a_1, a_2 \in D$.

Nous considérons l'ensemble V_a des éléments $m \in D$ tels que :

$$\nexists\ x, e \in D \text{ tels que } aex = mx$$

V_a est consistant à gauche ([2]) ; autrement dit, $mn \in V_a$ entraîne $m \in V_a$. Car si $m \notin V_a$, $\exists\ x, e \in D$ tels que $aex = mx$; or D est stationnaire, donc $aex = mx$ entraîne $aen = mn$ et $a(en)x = mn.x$ ce qui montre que $mn \notin V_a$ contrairement à l'hypothèse.

Nous définissons alors dans D une équivalence E_a de la manière suivante :

1° V_a est une classe.

2° Dans $D - V_a$, nous prenons la restriction de σ_2, plus fine équivalence simplifiable à droite de D, définie par $b, c \in D$, $b\sigma_2 c \iff \exists\ t \in D$ tel que $bt = ct$.

Nous démontrons que E_a est simplifiable à droite dans D (donc, d'après l'hypothèse, régulière à droite). Supposons que $bx \equiv cx \ (E_a)$.

Si bx (et par conséquent cx) appartient à V_a, consistant à gauche, on a $b \in V_a$, $c \in V_a$ donc $b \equiv c \ (E_a)$.

Sinon, par définition, il existe $u \in D$ tel que $bxu = cxu$.

Je dis que b et c appartiennent simultément, soit à V_a, soit $D - V_a$ (d'où résulte alors, par définition, $b \equiv c \ (E_a)$).

En effet, si $b \notin V_a$ et $c \in V_a$, il existe $e, t \in D$ tels que $aet = bt$. Mais $bxu = cxu$ entraîne, puisque D est stationnaire, $bt = ct$, d'où $aet = ct$, qui prouve $c \notin V_a$, contrairement à l'hypothèse.

Nous démontrons ensuite que $a \notin V_a$.

Si $a = a_1 a_2 \in V_a$, $a_1 \in V_a$. On a donc $a = a_1 a_2 \equiv a_1 \ (E_a)$.

E_a est régulière à droite, ainsi qu'on l'a démontré, donc :

$$\forall \ x , y \in D , \ axy = a_1 a_2 xy \equiv a_1 xy \ (E_a) \quad .$$

Mais axy n'appartient pas à V_a , car on a $a(xy) z = axy.z$, donc il existe $t \in D$ tel que $a_1 a_2 xyt = a_1 xyt$.

Finalement, D étant stationnaire, en remplaçant xyt par a_2 , on obtient $aa_2 = a$ d'où $aa_2 x = ax$ ($\forall \ x \in D$) c'est-à-dire $a \notin V_a$ en contradiction avec l'hypothèse $a \in V_a$.

Il existe donc $e , x \in D$ tels que $aex = ax$.

D étant stationnaire, cette égalité entraîne successivement : $ae^2 = ae$, puis $e^3 = e^2$ et enfin $e^4 = e^3 = e^2$, qui montre que e^2 est un idempotent de D .

Nous montrons pour terminer qu'il existe $a' \in D$ tel que aa' soit idempotent.

Si $e \notin V_a$, il existe $f , x \in D$ tels que $afx = ex$, d'où, D étant stationnaire, $afe = e^2$; on pourra prendre $a' = fe$.

Si $e \in V_a$, je dis que $e \in V_{a^2}$; car sinon, il existe $f , x \notin D$ tels que $a^2 fx = ex$ ou $a(af) x = ex$ qui prouve que $e \notin V_a$.

Si alors, $a \notin V_{a^2}$, il existe $f , x \in D$ tels que $a^2 fx = ax = a(af) x$.

Comme précédemment, on montre que $(af)^2$ est idempotent, et ainsi on peut prendre pour a' l'élément $a' = faf$.

Si $a \in V_{a^2}$, on a alors : $e \equiv a \ (E_{a^2})$.

E_{a^2} est régulière à droite, donc $ea \equiv a^2 \ (E_{a^2})$.

Mais $a^2 \notin V_{a^2}$, donc $\exists \ x \in D$ tel que $eax = a^2 x$ ou $a(ax) = e(ax)$ et, finalement, D étant stationnaire, $ae = e^2$. On pourra prendre dans ce cas $a' = e$. La propriété "toute équivalence de D simplifiable à droite est régulière D inversé" est ainsi démontrée.

Parmi les généralisations possibles de la notion de demi-groupe, nous avons rencontré également, au cours de nos travaux, celle qu'on obtient en considérant les conditions :

(C_1) $$ax = bx \Longrightarrow |a) = |b)$$

et

(C_2) $$xa = xb \Longrightarrow (a| = (b|$$

$|a)$ étant l'idéal principal à droite engendré par a : $|a) = aD \cup \{a\}$

Un semi-groupe à droite, par exemple, vérifie la condition (C_1). Un semi-groupe, un demi-groupe complètement simple vérifient les deux conditions (C_1) et (C_2).

PROPRIÉTÉ 18.1. - Tout demi-groupe D inversif à droite et vérifiant la condition (C_2) est réunion de groupes.

Il suffit de démontrer que D est inversif [1], c'est-à-dire que : $\forall \; a \in D$, $\exists \; t \in D$ tel que $a = ata$.

D étant inversif à droite, $\forall \; a \in D$, $\exists \; u \in D$ tel que $a = a^2 u$.

On a

$$a^2 = a^3 u = a^2 ua$$

d'où

$$a^2.au = a^2.ua \quad .$$

D'après la condition (C_2), $(au| = (ua|$, donc il existe $t \in D$ tel que $au = tua$ c'est-à-dire $a = a^2 u = a(tu) a$.

PROPRIÉTÉ 18.2. - Tout demi-groupe D inversif à droite et vérifiant les conditions (C_1) et (C_2) est complètement simple.

Il suffit de démontrer que D est simple, c'est-à-dire que $\forall \; x, a \in D$, $\exists \; u, v \in D$ tels que $x = uav$.

D'après la propriété 2.1, D est inversif : $\exists \; t \in D$ tel que $a = ata$, d'où $xa = xata$, et d'après la condition (C), $\exists \; t' \in D$ tel que $x = xatt' \in DaD$.

Parmi les demi-groupes inversés et rectangulaires, ceux qui sont globalement idempotents ont déjà retenu notre attention. Nous savons qu'ils sont isomorphes au produit direct d'un groupe et d'un demi-groupe idempotent rectangulaire [13].

Notons que, pour un demi-groupe idempotent, les notions de rectangularité au send de THEODOSSIS [11] et au sens de KIMURA [5] sont équivalentes (cf. par exemple le théorème 2 de [13]).

En utilisant le résultat de KIMURA ; tout demi-groupe idempotent rectangulaire est isomorphe au produit direct d'un antisemigroupe à droite et d'un antisemigroupe à gauche, on voit que les demi-groupes inversés rectangulaires globalement idempotents sont des demi-groupes complètement simples particuliers ; ceux pour lesquels les p_{kj} sont tous égaux à 1 . Comme tels, il vérifient les conditions (C_1) et (C_2).

Nous démontrons la proposition suivante :

THÉORÈME 18.4. - Pour qu'un demi-groupe stationnaire D vérifiant les conditions (C_1) et (C_2) soit un demi-groupe inversé rectangulaire globalement idempotent, il faut et il suffit que ses équivalences simplifiables d'un côté soient régulières de l'autre côté.

Que la condition soit nécessaire est immédiat. En tenant compte du théorème 18.2 la condition suffisante sera démontrée si l'on démontre la partie " D est globalement idempotent". Nous traitons du cas "à droite".

Supposons que $D - D^2$ ne soit pas vide, et soit $p \in D - D^2$; considérons $D' = D - \{p , p^2\}$ et définissons dans D une équivalence E de la manière suivante :

1° $\{p , p^2\}$ est une classe.

2° Dans D' , on prend la restriction de σ_2 , plus petite équivalence simplifiable à droite de D . E est simplifiable à droite sur D . En effet, soit $bx \equiv cx \quad (E)$. Si $bx , cx \in \{p , p^2\}$, on a nécessairement $bx = cx = p^2$. D étant stationnaire, on a, en particulier, $bp = cp = p^2$, et d'après la condition (C_1) : $\exists\ m \in D$ tel que $p = bm$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $p \in D - D^2$.

Donc bx et cx appartiennent à D' ; il existe $t \in D$ tel que $bxt = cxt$; d'après la condition (C_1), il existe m et n dans D tels que $b = cm$ et $c = bn$. Si b et c appartiennent à D' , ils sont équivalents modulo E par définition. Si b et c appartiennent à $\{p , p^2\}$, on a nécessairement $b = c = p^2$ donc $b \equiv c \quad (E)$. Si enfin, par exemple, $b \in \{p , p^2\}$ et $c \in D'$, on a $b = p^2$, d'où $c = p^2 n$ et finalement $p^2 = p^2 nm$, ce qui s'écrit encore $p.p = p.nm$ et entraîne, d'après la condition (C_2) : $\exists\ t \in D$ tel que $p = tpnm$, en contradiction avec l'hypothèse $p \in D - D^2$.

E est simplifiable à droite, donc régulière à droite par hypothèse.

De $p \equiv p^2$ (E) on déduit $p^2 \equiv p^3$ (E) donc $p^3 \in \{p , p^2\}$. Comme $p^3 \neq p$, on a $p^3 = p^2$ ou $p^2.p = p.p$, et d'après la condition (C_1), $\exists$ $t \in D$ tel que $p = p^2 t$ en contradiction avec $p \in D - D^2$.

Finalement, $D - D^2 = \emptyset$, $D = D^2$, D est globalement idempotent.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CROISOT (Robert). - Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 3, t. 70, 1953, p. 361-379.

[2] DUBREIL (Paul). - Contribution à la théorie des demi-groupes, I. - Paris, Gauthier-Villars, 1941 (Mém. Acad. Sc. Inst. France, 2e série, t. 63, 52 p.).

[3] DUBREIL (Paul). - Algèbre, t. 1 : Equivalence, opérations, groupes, anneaux, corps. 2e éd. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

[4] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Théorie des treillis, des structures et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

[5] KIMURA (Naoki). - The structure of idempotent semigroups, Pacific J. of Math., t. 8, 1958, p. 257-375.

[6] LEFEBVRE (Pierre). - Sur les demi-groupes admettant pour image homomorphe un groupe avec zéro, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 13, 1959/60, n° 7, 18 p.

[7] LEFEBVRE (Pierre). - Sur la plus fine équivalence simplifiable d'un demi-groupe, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 251, 1960, p. 1205-1207.

[8] LEFEBVRE (Pierre). - Sur la plus fine équivalence régulière et simplifiable d'un demi-groupe, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 251, 1960, p. 1265-1267.

[9] SCHÜTZENBERGER (Marcel P.). - Sur les homomorphismes d'un demi-groupe sur un groupe, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 2442-2444.

[10] TEISSIER (Mlle Marianne). - Sur les équivalences régulières dans les demi-groupes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 236, 1953, p. 1120-1122.

[11] THEODOSSIS (Constantin). - Etude dans un demi-groupe des complexes formés par un seul élément, demi-groupes rectangulaires (Thèse Sc. math. Paris, 1953) (multigraphié).

[12] THIERRIN (Gabriel). - Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes, Bull. Soc. math. France, t. 83, 1955, p. 103-159 (Thèse Sc. math. Paris. 1954).

[13] THIERRIN (Gabriel). - Demi-groupes inversés et rectangulaires, Bull. Acad. royale Belg., Classe Sc., 5e série, t. 41, 1955, p. 83-92.

[14] THIERRIN (Gabriel). - Sur la structure des demi-groupes, Publ. scient. Univ. Alger, Série A : Alger-Mathématiques, t. 3, 1956, p. 161-171.