

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MARIO CURZIO

Treillis des sous-groupes de composition

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, n° 1 (1960-1961), exp. n° 9,
p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_1_A8_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

23 janvier 1961

TREILLIS DES SOUS-GROUPES DE COMPOSITION

par Mario CURZIO

(d'après O. TAMASCHKE, G. ZACHER, G. ZAPPA et M. CURZIO)

1. Notations.

Tous les groupes G, H, K, \dots qui interviennent dans cet exposé sont supposés finis, de plus :

$|G|$ est l'ordre du groupe G ;

$H \triangleleft G$ ou $G \triangleright H$ signifie que H est un sous-groupe distingué du groupe G ;

$(H_i)_G$ est une suite de composition du groupe G ;

$(H_i)_G^!$ est une suite de Jordan-Hölder du groupe G ;

$\langle H_i \rangle_G$ est une suite (strictement décroissante) de sous-groupes $\triangleleft G$;

$\langle H_i \rangle_G^!$ est une suite $\langle H_i \rangle_G$ telle que

$$K \triangleleft G, H_i \supseteq K \supseteq H_{i+1} \implies K = H_i \text{ ou } K = H_{i+1} \quad ;$$

$K \triangleleft\triangleleft G$ ou $G \triangleright\triangleright K$ signifie que K est un sous-groupe de composition, c'est-à-dire : K est dans une suite $(H_i)_G$;

$L(G)$ est le treillis des sous-groupes de G ;

$N(G)$ est le treillis des sous-groupes $\triangleleft G$.

L'ensemble $C(G)$ des sous-groupes $\triangleleft\triangleleft G$ est un treillis inférieurement-modulaire [9] ⁽¹⁾.

En ce qui concerne les treillis on peut voir les traités [1] et [5].

2. Étude des groupes dont le treillis $C(G)$ est distributif au sens de la théorie des treillis.

Un premier résultat est dû à G. ZAPPA qui a donné le théorème suivant [12] :

THÉOREME 1.2. - Soit G un groupe résoluble. Pour que le treillis $C(G)$ soit distributif, il faut et il suffit que les sous-groupes de Sylow de G soient cycliques.

⁽¹⁾ Les numéros entre les crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de l'exposé.

Démonstration.

Les sous-groupes de Sylow de G sont cycliques. On sait que [6] :

$$|H| = |K|, H \ll G \implies H = K, \quad ,$$

alors

$$C(G) = N(G) \quad .$$

Donc, si A, X, Y sont trois sous-groupes de composition, on aura

$$A \cup X = A \cup Y, A \cap X = A \cap Y \implies \frac{A \cup X}{X} \cong \frac{A}{A \cap X} \cong \frac{A \cup Y}{Y} \implies |X| = |Y| \implies X = Y.$$

D'après cela, le treillis $C(G)$ est distributif.

Le treillis $C(G)$ est distributif.

On voit aisément que dans chaque suite $\langle H_i \rangle_G^!$ les quotients $|H_i|/|H_{i+1}|$ sont premiers. Par conséquent si

$$|G| = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t} \quad (p_1 > \dots > p_t \text{ premiers}) \quad ,$$

G possède un sous-groupe $K \triangleleft G$ d'ordre $p_1^{\alpha_1}$. Les treillis $C(G/K)$ et $C(K) = L(K)$ sont distributifs ; par récurrence sur t , on prouve que les sous-groupes de Sylow de G sont cycliques.

G. ZACHER a donné une condition nécessaire et suffisante pour que $C(G)$, dans le cas général, soit distributif. On a [11] :

THÉORÈME 2.2. - Si dans les suites $\langle H_i \rangle_G$ les quotients H_i/H_{i+1} , qui sont des p -groupes, sont aussi cycliques, $C(G)$ est distributif et vice versa.

La démonstration, très technique, n'est pas brève, et on préfère renvoyer au travail de ZACHER.

Dans l'ordre d'idée des théorèmes précédents on trouve que [3]

THÉORÈME 3.2. - Soient H_i les éléments résolubles (au sens de la théorie des groupes) du treillis $C(G)$. Si A est neutre dans $C(\bigcup_i H_i)$, A est un sous-groupe caractéristique de G . De plus, si $B \in C(\bigcup_i H_i)$, on a

$$A \cap B \triangleleft A \cup B \implies |A/A \cap B| \text{ et } |B/A \cap B| \text{ premiers entre eux} \quad .$$

Démonstration. - L'énoncé 3.2 contient un certain nombre de propositions ; nous donnerons sa démonstration en trois parties :

(α) $A \cap B \triangleleft A \cup B \implies |A/A \cap B|$ et $|B/A \cap B|$ premiers entre eux.

Si $A \cap B \triangleleft A \cup B$ et $A \cap B \neq A$ ou B , on a

$$(1) \quad \frac{A \cup B}{A \cap B} = \frac{A}{A \cap B} \cup \frac{B}{A \cap B}, \quad \frac{A \cap B}{A \cap B} = \frac{A}{A \cap B} \cap \frac{B}{A \cap B} \quad .$$

Le treillis $C((A \cup B)/(A \cap B))$ est isomorphe à l'intervalle $[A \cap B, A \cup B]$ de $C(\bigcup_i H_i)$, ce qui implique : $A/(A \cap B)$ neutre dans $C((A \cup B)/(A \cap B))$.
Donc [1] :

$$(2) \quad C\left(\frac{A \cup B}{A \cap B}\right) = C\left(\frac{A}{A \cap B}\right) \times C\left(\frac{B}{A \cap B}\right) \quad .$$

Alors : $(A \cup B)/(A \cap B) = A/(A \cap B) \times B/(A \cap B)$, et $|A/(A \cap B)|$ et $|B/(A \cap B)|$ sont premiers entre eux (voir le théorème 1.4).

(β) A est un sous-groupe $\triangleleft \bigcup_i H_i$.

Si $|\bigcup_i H_i| = pq$ (p, q premiers), c'est-à-dire si : longueur de $C(\bigcup_i H_i) = 2$, il est évident que : $A \triangleleft \bigcup_i H_i$.

Supposons : longueur de $C(\bigcup_i H_i) \geq 3$, et, prouvons (β) par récurrence sur cette longueur.

Si A est un élément maximal de $C(\bigcup_i H_i)$, A est un sous-groupe invariant de $\bigcup_i H_i$; si A n'est pas maximal, il existe un sous-groupe $B \triangleleft \bigcup_i H_i$ tel que $A < B$. Le treillis $C(B)$ est un sous-treillis de $C(\bigcup_i H_i)$; d'où : A est un élément neutre de $C(B)$. La longueur de $C(B)$ est plus petite que la longueur de $C(\bigcup_i H_i)$, et, B est un groupe résoluble; donc, d'après l'hypothèse de récurrence : $A \triangleleft G$.

D'après (α),

$$(*) \quad |A| = |X|, \quad X \triangleleft B \implies A = X$$

en effet, si $X \neq A$, les ordres $|A/(A \cap X)|$ et $|X/(A \cap X)|$ ne seraient pas premiers entre eux. D'après (*), A est un sous-groupe caractéristique de B , et $A \triangleleft \bigcup_i H_i$ parce que l'on sait que $B \triangleleft \bigcup_i H_i$.

(γ) A est un sous-groupe caractéristique de G . D'après (β), $A \triangleleft \bigcup_i H_i$; de cela et de (α), on déduit que

$$|A| = |X|, \quad X \triangleleft \bigcup_i H_i \implies A = X \quad .$$

Alors (γ) est vraie parce que $\bigcup_i H_i$ est un sous-groupe caractéristique de G .

Remarques. - Nous avons vu que si A est un élément résoluble et neutre du treillis $C(G)$, il est aussi un sous-groupe caractéristique ; pourtant, on peut avoir des éléments neutres de $C(G)$ qui ne sont pas des sous-groupes caractéristiques ; par exemple : soit G le groupe $A \times B$ où les sous-groupes A et B sont isomorphes et simples (non abéliens).

O. TAMASCHKE a donné une condition nécessaire et suffisante pour que A soit neutre en $C(G)$. Ce théorème paraîtra dans le "Mathematische Zeitschrift"[8].

La condition du théorème 3.2, imposée aux éléments du treillis $N(G)$, est suffisante pour que A soit neutre en $N(G)$. On a [3].

THÉORÈME 4.2. - Si $A \triangleleft G$, et si, pour tous les sous-groupes $B \triangleleft G$, les ordres $|B/(A \cap B)|$ et $|A/(A \cap B)|$ sont premiers entre eux, A est un élément neutre du treillis $N(G)$.

Démonstration. - Soient X et Y , sous-groupes distingués de G , vérifiant :

$$A \cap X = A \cap Y, \quad A \cup X = A \cup Y \quad ;$$

on aura

$$(3) \quad \left| \frac{A}{A \cap X} \right| = \left| \frac{A}{A \cap Y} \right| ,$$

d'où

$$(4) \quad \frac{A \cup X}{A \cap X} = \frac{A}{A \cap X} \times \frac{X}{A \cap X} = \frac{A}{A \cap X} \times \frac{Y}{A \cap X} ,$$

$$(5) \quad \frac{A \cup X}{A \cap X} = \frac{A}{A \cap X} \cup \left[\frac{X}{A \cap X} \cup \frac{Y}{A \cap X} \right] .$$

Un nombre premier p divise $|(X/(A \cap X)) \cup (Y/(A \cap X))|$ si, et seulement s'il divise $|X/(A \cap X)|$; en effet $|X/(A \cap X)| = |Y/(A \cap X)|$, et les sous-groupes $X/(A \cap X)$, $Y/(A \cap X)$ sont $\triangleleft (A \cup X)/(A \cap X)$. Par hypothèse $|X/(A \cap X)|$ et $|A/(A \cap X)|$ sont premiers entre eux ; donc, à cause de (5) :

$$\frac{A \cup X}{A \cap X} = \frac{A}{A \cap X} \times \left[\frac{X}{A \cap X} \cup \frac{Y}{A \cap X} \right] .$$

Enfin d'après [12] :

$$|(X/(A \cap X)) \cup (Y/(A \cap X))| = |X/(A \cap X)| = |Y/(A \cap X)| ,$$

c'est-à-dire : $X = Y$. Nous avons démontré que A est un élément neutre

(²) du treillis $N(G)$. Si G est un groupe résoluble, le théorème 3.2 permet de déterminer le centre de $C(G)$. On a [3] :

THÉORÈME 5.2. - Soit G un groupe résoluble. Pour que A soit dans le centre du treillis $C(G)$, il faut et il suffit que l'on ait : $G = A \times B$ où $|A|$ et $|B|$ sont premiers entre eux.

3. Caractérisation des groupes dont le treillis $C(G)$ est modulaire.

On a [13]

THÉORÈME 1.3. - Le treillis $C(G)$ est modulaire si et seulement si dans chaque suite $(H_i)_G$ les quotients qui sont des p -groupes, sont quasi-hamiltoniens (³).

Démonstration. - Supposons que $C(G)$ soit modulaire. Dans une suite $(H_i)_G$, on considère un quotient H_i/H_{i+1} . Le treillis $C(H_i/H_{i+1})$ est isomorphe à l'intervalle $[H_{i+1}, H_i]$ de $C(G)$; d'où : $C(H_i/H_{i+1})$ est modulaire. Si H_i/H_{i+1} est un p -groupe, on a

$$L(H_i/H_{i+1}) = C(H_i/H_{i+1})$$

et le quotient H_i/H_{i+1} est un groupe quasi-hamiltonien [7].

Vice versa : supposons que dans les suites $(H_i)_G$, chaque p -groupe H_i/H_{i+1} soit quasi-hamiltonien.

Puisque $C(G)$ est un treillis modulaire inférieurement, il suffit de prouver que si les éléments A et B de $C(G)$ couvrent $A \cap B$ dans le treillis $C(G)$, la réunion $A \cup B$ couvre A et B dans le treillis $C(G)$. Puisque A et B couvrent $A \cap B$, l'intersection $A \cap B$ est un sous-groupe distingué de A et B ; donc, $A/(A \cap B)$ est simple (non abélien), ou a un ordre premier. Nous démontrerons que dans le treillis $C((A \cup B)/(A \cap B))$, l'élément $(A \cup B)/(A \cap B)$ couvre $A/(A \cap B)$ et $B/(A \cap B)$; par conséquent $A \cup B$ couvrira A et B dans le treillis $C(G)$.

On peut avoir :

$$(\alpha) \quad |A/(A \cap B)| \neq |B/(A \cap B)| \quad \text{et ils sont premiers.}$$

(²) Soit x un élément d'un treillis modulaire. Si :

$$x \cup y = x \cup z, \quad x \cap y = x \cap z \implies y = z$$

x est élément neutre.

(³) On dit que G est un groupe quasi-hamiltonien si [7] :

$$M, N \in L(G) \implies M \cup N = MN = NM \quad .$$

On a ([9], théorème 19) :

$$\frac{A \cup B}{A \cap B} = \frac{A}{A \cap B} \times \frac{B}{A \cap B} ,$$

et il est évident que $(A \cup B)/(A \cap B)$ couvre $A/(A \cap B)$ et $B/(A \cap B)$.

$$(\beta) \quad |A/(A \cap B)| = |B/(A \cap B)| = p \quad (p \text{ premier}) \quad .$$

Le quotient $(A \cup B)/(A \cap B)$ est un p -groupe ([9], théorème 10), et puisque $(A \cup B) \in \mathcal{C}(G)$ et $(A \cup B) \triangleright (A \cap B)$, il existe une suite $(H_i)_G$ dont $(A \cup B)/(A \cap B)$ est un quotient. Comme par hypothèse, le p -groupe $(A \cup B)/(A \cap B)$ est quasi-hamiltonien, le treillis $\mathcal{C}((A \cup B)/(A \cap B))$ est modulaire [7]. Puisque $A/(A \cap B)$ et $B/(A \cap B)$ couvrent $(A \cap B)/(A \cap B)$, la réunion $(A \cup B)/(A \cap B)$ couvrira $A/(A \cap B)$ et $B/(A \cap B)$.

$$(\gamma) \quad A/(A \cap B) \text{ est un groupe simple (non abélien).}$$

Le groupe $A/(A \cap B)$ est un groupe parfait, et $(A \cap B)/(A \cap B)$ est résoluble car :

$$|(A \cap B)/(A \cap B)| = 1 \quad .$$

Donc, $A/(A \cap B)$ est un sous-groupe distingué de $(A \cup B)/(A \cap B)$ (théorème [9]). On a

$$\frac{(A \cup B)/(A \cap B)}{A/(A \cap B)} \cong \frac{B/(A \cap B)}{(A \cup B)/(A \cap B)}$$

et, dans le treillis $\mathcal{C}((A \cup B)/(A \cap B))$, l'élément $B/(A \cap B)$ couvre $(A \cap B)/(A \cap B)$; alors, dans le treillis $\mathcal{C}((A \cup B)/(A \cap B))$, l'élément $(A \cup B)/(A \cap B)$ doit couvrir $A/(A \cap B)$.

Maintenant, démontrons que $(A \cup B)/(A \cap B)$ couvre aussi $B/(A \cap B)$ (bien entendu, dans le treillis $\mathcal{C}((A \cup B)/(A \cap B))$). Si l'élément

$$X/(A \cap B) \in \mathcal{C}((A \cup B)/(A \cap B))$$

est tel que

$$\frac{A \cup B}{A \cap B} \triangleright \frac{X}{A \cap B} \triangleright \frac{B}{A \cap B} ,$$

on a

$$(X \cap A)/(A \cap B) \in \mathcal{C}(A/(A \cap B)) \quad .$$

Puisque :

$$\frac{A}{A \cap B} \cup \frac{B}{A \cap B} = \frac{A \cup B}{A \cap B} \neq \frac{X}{A \cap B} ,$$

il en résulte

$$(X \cap A)/(A \cap B) \neq A/(A \cap B) .$$

Puisque

$$\left| \frac{A}{A \cap B} \cap \frac{X}{A \cap B} \right| = \frac{|A/(A \cap B)| \times |X/(A \cap B)|}{|(A \cup B)/(A \cap B)|} > \frac{|A/(A \cap B)| \times |B/(A \cap B)|}{|(A \cup B)/(A \cap B)|} = 1$$

il en résulte

$$(X \cap A)/(A \cap B) \neq (A \cap B)/(A \cap B) .$$

Cela est en contradiction avec l'hypothèse : $A/(A \cap B)$ couvre $(A \cap B)/(A \cap B)$ dans le treillis $C((A \cup B)/(A \cap B))$.

(δ) $B/(A \cap B)$ est un groupe simple (non abélien).

Voir (γ).

4. Étude des groupes dont le treillis $C(G)$ est ou complété ou réductible.

O. TAMASCHKE a prouvé que [8] :

THÉORÈME 1.4. - Pour que $C(G)$ soit réductible, il faut et il suffit que l'on ait :

$$G = G_1 \times G_2$$

où aucun quotient abélien A_1/B_1 ($A_1 \triangleleft \triangleleft G_1$) n'est isomorphe à un quotient A_2/B_2 ($A_2 \triangleleft \triangleleft G_2$) .

La démonstration se trouve dans [8].

Remarque. - En 1957, j'ai démontré [3] le corollaire suivant du théorème 1.4 :

Soit G un groupe résoluble. Pour que $C(G)$ soit réductible, il faut et il suffit que l'on ait :

$$G = G_1 \times G_2$$

où $|G_1|$ et $|G_2|$ sont premiers entre eux.

Il est bien facile de déterminer les groupes dont $C(G)$ est un treillis complé-
menté, rappelons tout d'abord les lemmes ([3] et [10]) :

LEMME 1.4. - Si $C(G)$ est complé-menté, un sous-groupe distingué-minimal ⁽⁴⁾
 N est un groupe simple tel que

$$G = N \times M \quad .$$

LEMME 2.4. - Soient N un sous-groupe distingué du groupe G , M un complé-
ment du sous-groupe N . On a : $K \triangleleft G$, $K < M$,

$$M_1 \cup K = G, \quad M_1 \cap K = 1 \implies (M \cap M_1) \cup (N \cup K) = G, \quad (M \cap M_1) \cap (N \cup K) = 1 .$$

Et finalement [3] :

THÉORÈME 2.4. - Pour que $C(G)$ soit complé-menté, il faut et il suffit que G
soit un produit direct de groupes simples.

Démonstration. - Supposons que $C(G)$ soit complé-menté. Si N est un sous-
groupe distingué-minimal on a (Lemme 1.4) :

$$(6) \quad G = N \times M \quad ,$$

où N est simple. Si M est un produit direct de groupes simples, le théorème
est déjà démontré. Supposons que M ne soit pas le composé direct de groupes
simples ; alors G possède un sous-groupe $K \neq 1$ qui est distingué-minimal pour
 M . D'après (6), K est distingué-minimal aussi pour G ; donc (Lemme 1.4) K
est simple, et admet un complément M_1 qui est un sous-groupe invariant de G .
On a (Lemme 2.4) :

$$(7) \quad (M \cap M_1) \cup (N \cup K) = G, \quad (M \cap M_1) \cap (N \cup K) = 1 \quad .$$

Il en résulte aussi :

$$N \cup K = N \times K \triangleleft G \quad ,$$

et, d'après (7) :

$$G = (M \cap M_1) \times S_1 \quad ,$$

où $S_1 = N \times K$.

Le groupe S_1 est le produit direct des groupes simples N et K ; donc, si
 $M \cap M_1$ est le composé direct de groupes simples, la même propriété est valable
pour G . Si $M \cap M_1$ n'est pas un tel composé, on peut trouver des sous-groupes

⁽⁴⁾ On dit que $A \triangleleft G$ est un sous-groupe distingué-minimal, si

$$A' \triangleleft G, \quad A \supseteq A' \implies A' = A \quad \text{ou} \quad A' = 1 \quad .$$

M_2 et K_1 tels que :

$$G = (M \cap M_1 \cap M_2) \times S_2$$

où K_1 est simple et $S_2 = S_1 \times K_1$.

Le groupe G est fini, et alors il existera un entier n tel que :

$$G = (M \cap M_1 \cap \dots \cap M_n) \times S_n,$$

où $M \cap M_1 \cap \dots \cap M_n$ est simple et S_n est un produit direct de groupes simples.

Soit G un produit direct de groupes simples.

Le treillis $N(G)$ est modulaire et G est la réunion des atomes de $N(G)$, alors $N(G)$ est un treillis complété [1]. Par conséquent, si A est un sous-groupe distingué de G , on peut trouver un sous-groupe B tel que $G = A \times B$, donc on voit aisément que

$$N(G) = C(G) \quad .$$

5. Problèmes ouverts. - En ce qui concerne le treillis $C(G)$, on peut se poser les problèmes suivants.

PROBLÈME 1. - Si G est un groupe donné, construire les groupes G' tels que :

$$C(G') \cong C(G) \quad .$$

PROBLÈME 2. - Si G est un groupe donné, construire les groupes G' tels que $C(G')$ soit le dual du treillis $C(G)$.

PROBLÈME 3. - Construire les groupes G tels que $C(G)$ soit autodual.

Je crois qu'il ne serait pas facile de résoudre ces problèmes dans le cas général, et je voudrais signaler certains résultats particuliers ([2] et [4]) :

THÉORÈME 1.5. - Soit G un groupe résoluble. Pour que $C(G)$ soit isomorphe au treillis $C(G')$ d'un groupe nilpotent G' , il faut et il suffit que l'on ait :

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_t \quad (t \geq 1)$$

où $|G_i|$ et $|G_j|$ sont premiers entre eux et G_i est un p -groupe, ou un groupe d'ordre $r^\alpha q^\beta$ ($r \neq q$ premiers), dont les sous-groupes de Sylow sont cycliques et dont le groupe dérivé est son propre centralisateur.

Démonstration.

La condition est nécessaire. - On peut avoir :

(α) G' est un p-groupe cyclique.

Les sous-groupes de Sylow de G sont cycliques parce que le treillis $C(G)$ est distributif (Théorème 1.1). Le dérivé K de G est cyclique [14] et G/K est abélien, on aura :

$$|G| = r^\alpha q^\beta \quad (r, q \text{ premiers})$$

parce que $C(K)$ et $C(G/K)$ sont des chaînes. D'après cela, si $r \neq q$, il est évident que K est son propre centralisateur :

(β) G' est un p-groupe non cyclique.

Soit p^α l'ordre du groupe G' . Si $\alpha = 2$, on a

$$|G| = p^2 \quad ;$$

si $\alpha \geq 3$, par récurrence sur α , nous démontrerons que

$$|G| = |G'| \quad .$$

D'abord, supposons $p \neq 2$.

On sait [14] que G possède un sous-groupe maximal H' qui n'est pas cyclique. Soit W un isomorphisme : $C(G) \rightarrow C(G')$; le sous-groupe $H = W^{-1}(H')$ est un sous-groupe distingué-maximal ⁽⁵⁾ de G , et, puisque G est résoluble, on a

$$|G/H| = q \quad (q \text{ premier}) \quad .$$

Les treillis $C(H)$ et $C(H')$ sont isomorphes ; donc, d'après l'hypothèse de récurrence : $|H| = p^{\alpha-1}$. D'où $|G| = p^{\alpha-1} q$. Le groupe G' possède un sous-groupe maximal $K' \neq H'$; posons : $W^{-1}(K') = K$. On voit aisément que les treillis $C(G/(H \cap K))$ et $C(G'/(H' \cap K'))$ sont isomorphes ; de plus :

$|G'/(H' \cap K')| = p^2$, et, par conséquent : $|G/(H \cap K)| = p^2$. D'après cela : $|H \cap K| = p^{\alpha-3} q$; mais on a $p = q$, car $|H \cap K|$ doit diviser $|H| = p^{\alpha-1}$.

Nous avons démontré que

$$|G| = p^\alpha \quad .$$

Si $p = 2$, de façon presque analogue, on peut voir que

$$|G| = 2^\alpha \quad .$$

⁽⁵⁾ On dit que $A \triangleleft G'$ est un sous-groupe distingué-maximal, si :

$$A' \triangleleft G, \quad A' \supseteq A \implies A' = A \quad \text{ou} \quad A' = G \quad .$$

(γ) G' n'est pas un p-groupe.

Le treillis $C(G') = L(G')$ est réductible, par conséquent on aura (Théorème 1.4) :

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_t \quad (t > 1)$$

où $|G_i|$ et $|G_j|$ sont premiers entre eux. A cause de (α) et de (β), chaque G_i a la structure donnée dans l'énoncé 1.5 ; en effet, $C(G_i)$ est isomorphe au treillis $C(G'_i) = L(G'_i)$ lié au sous-groupe de Sylow G'_i du groupe G' .

La condition est suffisante. - La démonstration est triviale.

En ce qui concerne les problèmes 2 et 3 on peut remarquer que [4] :

THÉORÈME 2.5. - Soit G un groupe résoluble tel que : $N(G) = C(G)$. Le treillis $N(G)$ n'est jamais le dual du treillis $L(G')$ lié au groupe hamiltonien ⁽⁶⁾ G' .

THÉORÈME 3.5. - Soit G un groupe hyper-résoluble. Si $C(G)$ est le dual du treillis $L(G')$ d'un p-groupe G' non cyclique, on a $|G| = |G'|$.

Remarque. - Soient G un groupe résoluble, et $C(G)$ le dual du treillis $L(G')$ lié au p-groupe G' supposé non cyclique. On peut avoir $|G| \neq |G'|$; par exemple : soient G' le groupe des quaternions et G le groupe alterné de degré 4. Donc, l'hypothèse : " G est un groupe hyper-résoluble" est une hypothèse nécessaire pour que 3.5 soit valable.

Pour les démonstrations des théorèmes 2.5 et 3.5, on préfère renvoyer au travail [4] ; à l'aide de ces théorèmes on peut aisément prouver que [4] :

THÉORÈME 4.5. - Soit G un groupe hyper-résoluble dont aucun sous-groupe de Sylow ne soit cyclique. Le treillis $C(G)$ est autodual si, et seulement si G est un groupe nilpotent, et il existe un groupe abélien G' tel que : $L(G) \simeq L(G')$.

THÉORÈME 5.5. - Soit G un groupe résoluble tel que : $N(G) = C(G)$, et dont aucun sous-groupe de Sylow ne soit cyclique. Le treillis $N(G)$ est autodual, si, et seulement si G est abélien.

Remarque. - L'hypothèse : "aucun sous-groupe de Sylow n'est cyclique" est une hypothèse nécessaire pour que 4.5 soit valable. Par exemple : soit G un groupe

⁽⁶⁾ Soit G un groupe non abélien. On dit que G est hamiltonien, si :

$$H \in L(G) \implies H \triangleleft G \quad .$$

non abélien d'ordre pq ($p \neq q$ premiers). Alors, $C(G)$ est autodual et G n'est pas nilpotent.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BIRKHOFF (Garrett). - Lattice theory. - New-York, American mathematical Society, 1948 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 25).
 - [2] CURZIO (Mario). - Sul reticolo dei sottogruppi di composizione di alcuni gruppi finiti, Boll. Unione mat. ital., Série 8, t. 12, 1957, p. 284-289.
 - [3] CURZIO (Mario). - Sui sottogruppi di composizione di gruppi finiti, *Ricerche di Matematica*, t. 7, 1958, p. 265-287.
 - [4] CURZIO (Mario). - Sui gruppi supersolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è autoduale, *Le Matematiche*, t. 12, 1957, p. 74-79.
 - [5] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).
 - [6] HONDA (Kin-ya). - On finite groups, whose Sylow-groups are all cyclic, *Comment. math. Univ. Sancti Pauli, Tokyo*, t. 1, 1952, p. 5-39.
 - [7] IWASAWA (Kenkiti). - Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen, *J. Fac. Sc. Univ. Tokyo*, t. 4, 1941, p. 171-199.
 - [8] TAMASCHKE (O.). - Gruppen mit reduziblem Subnormalteilerverband, *Math. Z.*, t. 75, 1961, p. 211-214.
 - [9] WIELANDT (Helmut). - Eine Verallgemeinerung den invarianten Untergruppen, *Math. Z.*, t. 45, 1939, p. 209-244.
 - [10] ZACHER (Giovanni). - Costruzione dei gruppi finiti a sottogruppo di Frattini identico, *Rend. Sem. mat. Univ. Padova*, t. 21, 1952, p. 383-394.
 - [11] ZACHER (Giovanni). - Sui gruppi finiti per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo, *Rend. Sem. mat. Univ. Padova*, t. 27, 1957, p. 75-79.
 - [12] ZAPPA (Guido). - Sui gruppi finiti risolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo, *Boll. Unione mat. ital., Série 8*, t. 11, 1956, p. 150-157.
 - [13] ZAPPA (Guido). - Sui gruppi finiti per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è modulare, *Boll. Unione mat. ital., Série 8*, t. 11, 1956, p. 315-318.
 - [14] ZASSENHAUS (H.). - *Lehrbuch der Gruppentheorie*, Band 1. - Leipzig, B. G. Teubner, 1937 (Hamburger mathematische Einzelschriften, 21).
-