JACQUES LÉVY-BRUHL

Produit symétrisé

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, nº 1 (1960-1961), exp. nº 4, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_1_A4_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
14e année, 1960/61, n° 4

5 décembre 1960

PRODUIT SYMÉTRISÉ

par Jacques LÉVY-BRUHL

A. Généralités.

1. n-mots.

Soit un système quelconque de symboles, et soit M l'ensemble des mots qu'on peut former avec ces symboles. M a une structure de demi-groupe, si on désigne par ab le mot formé par la juxtaposition des mots a et b. Dans tout cet exposé, nous considérerons des n-mots, c'est-à-dire des éléments de la forme $(a_1 , \dots , a_n) \in M^n$.

Si on se donne un anneau R, on peut construire un module ayant les n-mots pour vecteurs de base, et une algèbre associative sur ce module : S_n, dès l'instant qu'on définit sur les n-mots une multiplication associative.

La donnée de cette multiplication associative n'est pas unique : par exemple la construction du corps quadratique $(a , a')(b , b') = (aa' + mbb' , ab' + ba')$. Nous nous proposons ici d'en étudier un type particulier.

D'autre part, on peut introduire entre n-mots une relation d'équivalence T_n compatible avec l'addition et la multiplication dans S_n, ce qui permettra de définir une algèbre quotient S_n/T_n. Par exemple

$$(a_1 , \dots , a_i + a_i' , a_{i+1} , \dots , a_n)$$
$$= (a_1 , \dots , a_{i-1}\, a_i\, a_{i+1} , \dots , a_n) + (a_1 , a_{i-1}\, a_i' , a_{i+1} , \dots , a_n)$$

qui exprime la distributivité par rapport à la somme dans S_1 à la i-ième place, ou encore

$$(a_1 , a_2) + (b_1 , b_2) = (a_1 + b_1 , a_2 + b_2) \quad .$$

2. Recherche d'un produit associatif.

Soient trois n-mots $A = (a_1 , \dots , a_n)$, $B = (b_1 , \dots , b_n)$, $C = (c_1 , \dots , c_n)$ et recherchons s'il existe des produits associatifs du type

$$AB = \sum k_s(a_{s1}\ b_1\ ,\ a_{s2}\ b_2\ ,\ \dots\ ,\ a_{sn}\ b_n)$$

où $k_s \in R$ est supposé unitaire et d'intégrité, et s une permutation quelconque des indices $(1\ ,\ \dots\ ,\ n)$, sp désignant l'indice sur lequel s'applique p, il vient immédiatement

$$(AB)C = \sum k_s\ k_{s'}(a_{ss'1}\ b_{s'1}\ c_1\ ,\ \dots\ ,\ a_{ss'p}\ b_{s'p}\ c_p\ ,\ \dots\ ,\ a_{ss'n}\ b_{s'n}\ c_n)$$

et

$$A(BC) = \sum k_s\ k_{s'}(a_{s1}\ b_{s'1}\ c_1\ ,\ \dots\ ,\ a_{sp}\ b_{s'p}\ c_p\ ,\ \dots\ ,\ a_{sn}\ b_{s'n}\ c_n) .$$

En comparant, l'associativité exige $k_{ss'}\ k_{s'} = k_s\ k_{s'}$, $\forall\ s\ ,\ s'$. Si $k_{s'} \neq 0$, on a $k_{ss'} = k_s$, et si $k_e \neq 0$, en faisant $s = e$, $k_{s'} = k_e$. Tous les s pour lesquels $k_s = k_e \neq 0$ <u>forment un groupe</u>, car $k_s = k_{s'} = k_e$ entraîne $k_{ss'} = k_e$, et les s forment une partie stable d'un groupe fini. D'ailleurs si $k_e = 0$, on a $k_{es'}\ k_{s'} = k_e\ k_{s'} = 0$; $k_{s'} = 0$, $\forall\ s'$. D'où :

PROPOSITION. - Les seuls produits associatifs de la forme

$$(a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_n)(b_1\ ,\ \dots\ ,\ b_n) = \sum k_s(a_{s1}\ b_1\ ,\ \dots\ ,\ a_{sp}\ b_p\ ,\ \dots\ ,\ a_{sn}\ b_n)$$

sont ceux où $k_s = 0$ pour toutes les permutations, sauf pour celles qui appartiennent à un groupe G , où on peut prendre $k_s = 1$.

DÉFINITION. - C'est ce produit associatif de n-mots qu'on appellera <u>produit symétrisé relativement au groupe</u> G .

EXEMPLE. - Pour $n = 2$, on a deux produits symétrisés relativement à

$G = \{e\}$ $\quad (a_1\ ,\ a_2)(b_1\ ,\ b_2) = (a_1\ b_1\ ,\ a_2\ b_2)$

$G = S_2$ $\quad (a_1\ ,\ a_2)(b_1\ ,\ b_2) = (a_1\ b_1\ ,\ a_2\ b_2) + (a_2\ b_1\ ,\ a_1\ b_2)$.

REMARQUE 1. - Quand nous parlerons de <u>produit symétrisé</u> (sans plus) il s'agira toujours du produit symétrisé relativement au <u>groupe symétrique</u> S_n .

REMARQUE 2. - On peut dire qu'il y a quasi-distributivité du produit par rapport aux signes $+$ et $(\,,)$, en ce sens que si on remplace $(\,,)$ par $+$, on obtient la formule usuelle de $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)$.

B. Cas où les n-mots sont commutatifs.

Dans ce paragraphe, nous supposerons établie l'équivalence entre n-mots $(a_1, \dots, a_n) = (a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$, pour toutes les permutations $i_1, \dots i_n$ des indices $(1, \dots, n)$, et nous désignerons par $(a_1 \circ a_2 \dots \circ a_n)$ la classe d'équivalence de $(a_1, \dots, a_n)$. Il y a d'ailleurs isomorphisme entre $(a_1 \circ \dots \circ a_n)$ et la somme symétrisée $\sum (a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$ étendue à toutes les permutations des indices $1, \dots, n$.

Le produit symétrisé

$$(a_1 \circ \dots \circ a_n)(b_1 \circ \dots \circ b_n) = \sum (a_{i_1} b_1 \circ \dots \circ a_{i_n} b_n)$$

car on voit immédiatement que l'équivalence établie entre n-mots est compatible avec le produit symétrisé.

On peut alors considérer la matrice $(a_i b_j)$ carrée d'ordre n, et le produit symétrisé apparaît alors comme le permanent de la matrice, c'est-à-dire la somme des termes du déterminant sans alternance de signe, le signe $\circ$ jouant le rôle du signe de multiplication.

1. Calcul des coefficients dans le cas où certains des a_i et b_j sont égaux.

Nous emploierons la notation abrégée $a^{\circ k}$ pour désigner la partie d'un n-mot commutatif formée de $a \circ a \circ a \circ a$ (k fois), et posons

$$A = (a_1^{\circ k_1} \circ a_2^{\circ k_2} \circ \dots \circ a_n^{\circ k_n}) ; \qquad B = (b_1^{\circ k'_1} \circ \dots \circ b_n^{\circ k'_n})$$

les k_i et k'_j étant des entiers positifs ou nuls satisfaisant à la condition $\sum k_i = \sum k'_i = n$.

Un terme quelconque du développement de AB (il y en a en tout $n!$) se présente sous la forme

$$R_H = (a_1 b_1)^{\circ h_{11}} \circ \dots \circ (a_i b_j)^{\circ h_{ij}} \circ \dots \circ (a_n b_n)^{\circ h_{nn}}$$

où les h_{ij} sont des entiers positifs ou nuls en nombre de n^2, qu'on peut disposer suivant un tableau carré d'ordre n : $(h_{ij}) = H$. La somme des éléments de la i-ième ligne de H est k_i, de la j-ième colonne est k'_j. A toute matrice telle que H correspondra un terme R_H.

PROPOSITION. - Le coefficient de R_H dans le développement de AB est

$$K_H = \frac{\Pi k_i ! \, \Pi k_j' !}{\Pi h_{ij} !} .$$

Comptons de combien de manières on peut répartir les k_1 facteurs u_1 en m groupements contenant h_{1i} facteurs a_1. On a $C_{k_1}^{h_{11}}$ possibilités pour le premier groupement, $C_{k_1 - h_{11}}^{h_{12}}$ pour le deuxième, au total

$$C_{k_1}^{h_{11}} \, C_{k_1 - h_{11}}^{h_{12}} \, C_{k_1 - h_{11} - h_{12}}^{h_{13}} \cdots C_{h_{1m}}^{h_{1m}} = \frac{k_1 !}{\Pi_i (h_{1i})!}$$

manières de disposer a_1 afin d'obtenir R_H. On raisonne ensuite de même sur a_2, a_n, b_1, b_n.

2. <u>n-mots commutatifs réduits</u>.

Soit le n-mot commutatif $A = (a_1^{\circ k_1} \circ \ldots \circ a_n^{\circ k_n})$ avec les a_i distincts. On appelle n-mot réduit le n-mot

$$|A| = \frac{A}{k_1 ! \ldots k_n !} .$$

Calculons le produit $|A| \, |B|$. On a $AB = \Sigma K_H R_H$. D'où

$$\Pi k_i ! \, \Pi k_j' ! \, |A| \, |B| = \Sigma k_H \, \Pi k_{ij} ! \, |R_H|$$

et en tenant compte de l'expression de K_H

$$|A| \, |B| = \Sigma \, |R_H| .$$

<u>Tous les coefficients dans le développement</u> du produit symétrisé de deux <u>mots commutatifs réduits sont égaux à</u> 1.

REMARQUES.

1. Ce résultat suppose essentiellement que tous les a_i b_j sont distincts ;

2. L'emploi des n-mots réduits supprimant les factorielles peut avoir une signification quelle que soit la caractéristique de l'anneau des coefficiants. Mais cet emploi présente par contre l'inconvénient que le produit des n-mots réduits n'est pas associatif.

C. n-mots monogènes.

1. n-mots monogènes.

On appelle n-mot monogène tout n-mot de la forme

$$(u^{k_1}, \dots, u^{k_n})$$

k_i étant un entier positif ou nul et u^{k_i} désignant le produit de k_i mots égaux à u.

Nous aurons à considérer en plus du n-mot monogène commutatif $(u^{k_1} \circ \dots \circ u^{k_n})$ le n-mot monogène alterné $(u^{k_1} \wedge \dots \wedge u^{k_n})$, nul si deux mots sont les mêmes, et changeant de signe dans S_n si on transpose deux de ces mots. Le n-mot alterné peut s'obtenir à partir d'un n-mot par antisymétrisation.

2. n-mots monogènes commutatifs.

A tout n-mot monogène commutatif A, on peut associer de façon bijective la suite d'entiers non croissants $(k_1, \dots, k_n)$, si $A = (u^{k_1} \circ \dots \circ u^{k_n})$, $k_i \geqslant k_{i+1}$.

Si on fait le produit de deux n-mots commutatifs monogènes

$$AA' = (u^{k_1} \circ \dots \circ u^{k_n})(u^{k'_1} \circ \dots \circ u^{k'_n}) = \sum (u^{k_{i_1}+k'_1} \circ \dots \circ u^{k_{i_n}+k'_n})$$

tous les termes du sommet correspondront à des partitions du nombre $\sum_1^n (k_i + k'_i)$.
Si $k_i \geqslant k_{i+1}$, $k'_i \geqslant k'_{i+1}$, on appellera "sommet de AA' " le n-mot $(u^{k_1+k'_1} \circ \dots \circ u^{k_p+k'_p} \circ \dots \circ u^{k_n+k'_n})$. C'est le terme de hauteur la plus élevée, dans le développement.

PROPOSITION. - Tous les termes du produit AA' correspondent à des partitions de N, multiples (au sens donné dans "Antisymétriseurs") de la partition correspondant au sommet.

Le monôme partition correspondant au sommet a pour exposants successifs

$$\begin{cases} r_1 = (k_1 + k'_1) + \dots + (k_n + k'_n) \\ r_2 = (k_2 + k'_2) + \dots + (k_n + k'_n) \\ r_n = \qquad\qquad\qquad\quad k_n + k'_n \end{cases}.$$

Soit maintenant $R_i = (K_i + K'_i + \dots + K_m + K'_m)$ la suite des exposants des monômes partitions correspondant à un terme quelconque du développement de AA', avec $K_i + K'_i \geqslant K_{i+1} + K'_{i+1}$, les K_i et K'_i étant des permutations des k_i et k'_i. Je dis que $R_i \geqslant r_i$ pour tout i compris entre 1 et n. On a

$$k_1 + \dots + k_{i-1} \geqslant K_1 + \dots + K_{i-1}$$
$$k'_1 + \dots + k'_{i-1} \geqslant K'_1 + \dots + K'_{i-1}$$

puisque les k_p ne sont autres que les K_p rangés dans un ordre non croissant.
D'où $r_i = N - \sum\limits_1^{i-1} (k_i + k'_i) \leqslant R_i = N - \sum\limits_1^{i-1} (K_i + K'_i)$.

REMARQUE. - Si on fait le produit de deux n-mots monogènes commutatifs réduits, le sommet ne peut se réduire et son coefficient est égal à 1.

DÉFINITION. - Un n-mot monogène <u>élémentaire</u> commutatif est de la forme $(u^{k_1} \circ \dots \circ u^{k_n})$ où tous les k_i sont égaux à 0 ou 1.

Si on pose $u^{\circ} = I$, tout n-mot monogène commutatif s'écrit

$$(u^{\circ i} \circ I^{\circ n-i})$$

et on désigne par s_i le n-mot réduit correspondant $(u^{\circ i} \circ I^{\circ n-i}) = i!(n-i)!s_i$.

<u>Théorème des n-mots monogènes commutatifs réduits</u>. - Tout n-mot monogène commutatif réduit $|u^{k_1} \circ \dots \circ u^{k_n}|$ où $k_i \geqslant k_{i+1}$ s'exprime d'une manière unique comme fonction linéaire à coefficients entiers de monômes de la forme $s_1^{p_1} \dots s_n^{p_n}$, où la partition $1^{p_1} \dots n^{p_n}$ est multiple de la conjuguée de la partition $(k_1, \dots, k_n)$.

On démontre de façon élémentaire qu'il existe $s_1^{p_1} \dots s_n^{p_n}$ dont le sommet est $|u^{k_1} \circ \dots \circ u^{k_n}|$. Le sommet d'un produit étant le produit des sommets, on a $k_i = p_i + p_{i+1} + \dots + p_n \quad \forall\ i$, ce qui détermine les p_i de manière unique. La partition $1^{p_1} \dots n^{p_n}$ est alors la conjuguée de $(k_1, \dots, k_n)$, et tous les n-mots intervenant dans $s_1^{p_1} \dots s_n^{p_n}$ développée, correspondent d'après la proposition précédente à des partitions multiples de $1^{p_1} \dots n^{p_n}$. Comme le coefficient de $|u^{k_1} \circ \dots \circ u^{k_n}|$ est égal à 1, le théorème est démontré par récurrence sur les hauteurs.

3. Définition des fonctions de Schur.

LEMME. - Il existe une application bijective entre l'ensemble des partitions d'un entier n en entiers positifs ou nuls, et l'ensemble des partitions de $\frac{(n+1)n}{2}$ en entiers positifs ou nuls distincts.

Soit $k_1 + \dots + k_n = n$, $k_i \geq k_{i+1}$. Considérons la suite

$$(k_1 + n - 1 , k_2 + n - 2 , \dots , k_p + n - p , \dots , k_n) = (k'_1 , \dots , k'_n) \quad .$$

C'est une partition de $\frac{n(n+1)}{2}$ en entiers positifs ou nuls distincts car

$$k'_i - k'_{i+1} = k_i - k_{i+1} > 0 \quad .$$

Soit maintenant une partition $k'_1 , \dots , k'_{n'}$ de $\frac{n(n+1)}{2}$ en entiers positifs ou nuls distincts. La somme de n' entiers distincts positifs ou nuls étant au moins égale à $\frac{n'(n'-1)}{2}$, on doit avoir $n'(n'-1) \leq n(n+1)$ ou en posant $n' - 1 = x$, cela donne $n' \leq n + 1$. A part la partition $(n ; n-1 , \dots , 0)$ toutes les partitions en nombres distincts de $\frac{n(n+1)}{2}$ ont au plus n termes. Cela étant, on aura successivement, $(k'_1 , \dots , k'_n)$ étant une partition de $\frac{n(n+1)}{2}$ en nombre positifs ou nuls distincts, $k'_n \geq 0$, $k'_{n-1} \geq 1$, $k'_1 \geq n - 1$ et on pourra poser $k_p = k'_p - (n - p)$.

LEMME 2. - Si A est un n-mot symétrisé et B un n-mot alterné, le produit symétrisé AB est une somme de n-mots alternés.

$$(a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n)(b_1 \wedge \dots \wedge b_n) = \sum (a_{i_1} b_1 \wedge \dots \wedge a_{i_n} b_n) \quad .$$

PROPOSITION. - $k'_1 , \dots , k'_n$ étant une partition de $\frac{n(n+1)}{2}$ en entiers distincts, les n-mots alternés $(u^{k'_1} \wedge \dots \wedge u^{k'_n})$ sont des formes linéaires à coefficients entiers des produits symétrisés $|u^{k_1} \circ \dots \circ u^{k_n}| (u^{n-1} \wedge u^{n-2} \wedge \dots \wedge u \wedge I)$, $k_1 , \dots , k_n$ étant une partition de n .

En effet si

$$|u^{k_1} \circ \dots \circ u^{k_n}| (u^{n-1} \wedge u^{n-2} \wedge \dots \wedge u \wedge I) = \sum p_i (u^{k'_1} \wedge \dots \wedge u^{k'_n}) \quad ,$$

l'entier p_i correspondant au sommet est égal à 1 , et toutes les partitions figurant au deuxième membre seront des partitions multiples de celles correspondant au sommet (proposition du numéro 2). D'où le résultat énoncé par récurrence sur les hauteurs. La matrice des p_i carrée d'ordre égal au nombre de partitions de n est donc inversible dans Z.

Quand la division par $(u^{n-1} \wedge \ldots \wedge u \wedge I)$ est possible, on voit que les $u^{k_1} \circ \ldots \circ u^{k_n}$ s'expriment linéairement en fonction des $\dfrac{(u^{k_1} \wedge \ldots \wedge u^{k_n}}{(u^{n-1} \wedge \ldots \wedge u_1 \wedge I)}$ qu'on appelle la fonction de Schur correspondant à la partition $k'_p + p - n = k_p$ de n.

REMARQUE. - Caractères du groupe symétrique S_n. - Signalons que si on effectue le produit

$$|u^n \circ I^{\circ n-1}|\ |u^{r_2} \circ I^{\circ n-1}| \ \ldots\ |u^{r_k} \circ I^{\circ n-1}|(u^{n-1} \wedge \ldots \wedge u_1 \wedge I)$$

les coefficients apparaissant dans le développement de ce produit sont les caractères du groupe symétrique S_n (cf [4], p. 87).

4. Un théorème de Dedekind. ([3], p. 72).

THÉORÈME. - Les produits $P_r = a_0^{r_0} \ldots a_m^{r_m}$ où les entiers r_i sont tels que $r_0 + \ldots + r_m = n + 1$ s'expriment comme fonctions linéaires à coefficients entiers des mineurs d'ordre $n + 1$ de la matrice $b_i^j = a_{i-j}$ si $0 \leqslant i - j \leqslant m$ et $b_i^j = 0$ si $i - j < 0$, ou $i - j > m$.

Soit $n + 1 + m$ indices $0, 1, m + n$. Il existe une application bijective de l'ensemble E des C_{m+n+1}^{n+1} combinaisons de ces indices $n + 1$ à $n + 1$ (chaque combinaison étant écrite dans l'ordre croissant) sur l'ensemble F des combinaisons à répétitions de $m + 1$ indices $n + 1$ à $n + 1$, ces combinaisons étant écrites dans l'ordre non décroissant des indices. Les éléments de F ainsi écrits sont ordonnés lexicographiquement.

Exemple : $m = n = 3$: 000, 001, 002, 003, 011, 012, ... , 333 .

A tout élément de F, on fait correspondre l'élément de E obtenu en ajoutant 0 au premier indice, i au $i + 1$-ième, $n - 1$ au n-ième : à 011 correspond 023 . Cette application est bijective.

Cela étant, effectuons le produit symétrisé

$$(u^0 \circ u^{-1} \circ u^{-2} \circ \ldots \circ u^{-(n-1)})(u^{i_0} \circ u^{i_1} \circ \ldots \circ u^{i_{n-1}}) = AB$$

où $(i_0, i_1, \dots, i_{n-1}) \in E$, $i_p \leqslant i_{p+1}$, en convenant de considérer comme nuls dans AB tous les termes u^k_i où k est négatif. On voit aisément que le sommet de AB est alors $u^{i_0} \circ u^{i_1 - 1} \circ \dots \circ u^{i_{n-1}+1-n}$ (au sens lexicographique) et est affecté du coefficient 1, ce qui démontrera le théorème par récurrence sur les hauteurs.

D. Mots permutables.

Les mots u^k et $u^{k'}$ sont évidemment permutables, au sens du produit des mots. A la théorie des n-mots monogènes correspond par "polarisation" une théorie des n-mots permutables : $uv = vu$.

1. Formule de Newton-Cayley-Hamilton.

PROPOSITION. – $u, u_1, \dots, u_n$ étant des mots permutables, et x_1, x_{n-1} des mots quelconques, on a la formule

$$\begin{aligned}(I \circ x_1 \circ \dots \circ x_{n-1})(u_1 \circ \dots \circ u_n) - \Sigma\, (u_1 \circ x_1 \circ \dots \circ x_{n-1})(I \circ u_2 \circ \dots \circ u_n) \\ + (-1)^p\, \Sigma\, (u_1\, u_2 \dots u_p \circ x_1 \circ \dots \circ x_{n-1})(I^{\circ p} \circ u_{p+1} \circ \dots \circ u_n) \\ + (-1)^n\, (u_1\, u_2 \dots u_n \circ x_1 \circ \dots \circ x_{n-1})(I^{\circ n}) = 0\end{aligned}$$

En appliquant la règle du produit symétrisé, on voit en effet que les termes s'annulent deux à deux.

Cas particuliers. Si on fait $u_1 = \dots = u_n = u$, la formule devient la formule de Cayley-Hamilton

$$\sum_1^n (-1)^p\, C_n^p (u^p \circ x_1 \dots \circ x_{n-1})(u^{\circ n-p} \circ I^{\circ p}) = 0 \quad .$$

Si l'on fait de plus $x_1 = \dots = x_{n-1} = I$, et si l'on pose $S_p = |u^p \circ I^{\circ n-1}|$ et $|u^{\circ n-p} \circ I^{\circ p}| = s_{n-p}$, les factorielles disparaissent, et il reste

$$\sum_1^n (-1)^p\, S_p\, s_{n-p} = 0 \qquad \text{(formule de Newton)}, \ \forall\ n \quad .$$

2. Théorème de Poisson-Schlafli.

On peut démontrer par les mêmes procédés le théorème de Poisson-Schlafli (cf. par exemple [3], p. 312) qui exprime les fonctions symétriques de plusieurs systèmes d'indéterminées, en fonction de produits de fonctions symétriques élémentaires.

E. Cas où les n-mots sont multilinéaires et commutatifs.

1. Théorème de Phillips.

Si on suppose que les mots appartiennent à un R-module, et que les **n-mots** sont n linéaires, c'est-à-dire que

$$(u_1 , \dots , u_i + u'_i , \dots , u_n) \equiv (u_1 , u_i , u_n) + (u_1 , u'_i , u_n)$$

$$(u_1 , \dots , au_i , \dots , u_n) \equiv a(u_1 , \dots , u_n) \qquad a \in R , \ \forall \ i .$$

On a notamment les propriétés suivantes si on prend des n-mots commutatifs $(u_1 \circ \dots \circ u_n)$.

THÉORÈME de Phillips. - Les T_i, T'_j, T''_k étant tous des mots permutables entre eux, et les u_i, u'_j, u''_k étant des mots quelconques, les relations

$$(1) \qquad \sum u_i T_i = 0 \qquad \sum u'_j T'_j = 0 \qquad \sum u''_k T''_k = 0$$

entraînent $\sum (u_i \circ u'_j \circ u''_k)(T_i T'_j T''_k \circ x_1 \circ x_2) = 0$ quels que soient les mots x_1, x_2, la somme étant étendue à tous les arrangements $T_i T'_j T''_k$ (cf. [5], p. 18)

Si on effectue chaque terme du développement le produit symétrisé est séparément nul, par exemple $\sum u_i x_1 \circ u'_j T_i T'_j T''_k \circ u''_k x_2$ est nul si laissant i et k fixe, on somme par rapport à j, en vertu de la deuxième relation (1) et de $T_i T''_j = T'_j T_i$

Si en particulier les mots T_i sont des indéterminées, le résultat est valable à condition de remplacer les T_i par des éléments permutables après la multiplication.

EXEMPLE. - De $u_1 - u_1 I = 0$, $u_2 - u_2 I = 0$, u_1 et u_2 étant permutables, on déduit

$$(u_1 - T_1) \circ (u_2 - T_2) = (u_1 \circ u_2) - T_1(I \circ u_2) - T_2(I \circ u_1) + T_1 T_2(I \circ I)$$

et par la spécialisation $T_1 \to u_1 \circ x$, $T_2 = (u_2 \circ x)$, $T_1 T_2 = (u_1 u_2 \circ x)$, le deuxième membre devient égal à zéro pour tout x. En faisant $u_1 = u_2$, on retrouve la formule de Cayley-Hamilton pour $n = 2$.

2. Rang et équation caractéristique d'un élément du R-module E.

Un élément (mot) $v \in E$ est dit de rang k si $v^{\circ k} \neq 0$, $v^{\circ k+1} = 0$. On appelle équation caractéristique de $u \in E$, l'équation $(u - sI)^{\circ n} = 0$, si tous les éléments de E ont au plus un rang égal à n , où s est une indéterminée. En vertu de la multilinéarité de l'opération $\circ$, on aura

$$(u - sI)^{\circ n} = (u^{\circ n}) - C_n^1 s(I \circ u^{\circ n-1}) + \dots$$
$$+ (-1)^p C_n^p s^p |I^{\circ p} \circ u^{\circ n-p}) + \dots + (-1)^n s^n |I^{\circ n}| \quad .$$

En passant aux n-mots réduits, les coefficients binomiaux disparaissent, et l'équation caractéristique s'écrit simplement

$$0 = |u^{\circ n}| + \dots + (-1)^p s^p |I^{\circ p} \circ u^{\circ n-p}| + \dots + (-1)^n s^n |I^{\circ n}| \quad .$$

Le coefficient indépendant de s , $|u^{\circ n}|$ s'appelle le déterminant de u ; celui de $u^{\circ n-p}$ la trace d'ordre p de u .

Si on peut identifier les n-mots à des éléments de l'anneau R , la formule de Cayley-Hamilton exprime que u vérifie sa propre équation caractéristique. On vérifie immédiatement que si R est un corps algébriquement clos, on a alors $|u_1^{k_1} \circ \dots \circ u^{k_n}| = \sum s_1^{k_1} \dots s_n^{k_n}$, ce qui permet d'interpréter la théorie des n-mots commutatifs monogènes comme la théorie des fonctions symétriques de $s_1 , \dots , s_n$.

3. Propriétés diverses démontrées à l'aide du produit symétrisé.

1° La trace de $u_1 u_2 \dots u_q$ ne change pas si on permute circulairement les facteurs u_i (si R est un anneau commutatif, et si un n-mot peut être identifié à un élément de R).

2° L'équation caractéristique de $u_1 u_2 \dots u_q$ ne change pas si on fait une permutation circulaire des u_i ([5], p. 23).

3° On a la relation

$$|a^{\circ k}|(u_1 \circ \dots \circ u_k)|b^{\circ k}| = |au_1 b \circ \dots \circ au_k b| \quad ,$$

ce qui peut s'appeler la propriété d'invariance du k-mot $(u_1 \circ \dots \circ u_k)$. En particulier le déterminant de uv est le produit des déterminants de u et de v , car $(u^{\circ n})(v^{\circ n}) = n!(uv^{\circ n})$.

F. Cas où les mots sont des matrices d'ordre n .

On peut représenter une matrice $A = \sum a_p^q e_p^q$, et on définira un produit $A \circ B = \sum a_p^q b_r^s (e_p^q \circ e_r^s)$ avec la condition que le produit $\circ$ est alterné pour la suite des indices inférieurs, comme pour la suite des indices supérieurs. Le produit $e_p^q \circ e_r^s$ est alors commutatif. Si alors $e_p^q e_r^s = \delta_q^r e_p^s$ (produit habituel des matrices), on vérifie immédiatement la formule

$$(1) \qquad (A_1 \circ \dots \circ A_n)(B_1 \circ \dots \circ B_n) = \Sigma(A_{i_1} B_1 \circ \dots \circ A_{i_n} B_n)$$

étendue à toutes les permutations $i_1, \dots, i_n$ des indices n. Le produit $\circ$ est commutatif, associatif, distributif, par rapport à l'addition des matrices, et relié au produit ordinaire par la formule (1), qui n'est autre que celle du produit symétrisé. Il a été considéré dans le cas de deux matrices par STEPHANOS ([5], p. 84 et [8]). Il se réduit au produit direct de Kronecker $A \circ B$ si les e_p^q figurant dans A et B ont des indices tous distincts.

Si les A_i et les B_i sont des matrices carrées d'ordre n sur un anneau commutatif R, on a évidemment

$$(A_1 \circ \dots \circ A_n)(B_1 \circ \dots \circ B_n) = (B_1 \circ \dots \circ B_n)(A_1 \circ \dots \circ A_n)$$

et en développant les deux nombres par la formule (1), on obtient des identités entre sommes de déterminants, ou de produits de déterminants, [1]. Signalons que $A^{\circ n} = n!$ déterminant de A, et que $(A^{\circ n-k} \circ e_{p_1}^{q_1} \circ \dots \circ e_{p_k}^{q_k})$ est le mineur d'ordre $n - p$ de A formé avec les lignes et les colonnes complémentaires de $p_1, \dots, p_k ; q_1, \dots, q_k$.

D'ailleurs $A^{\circ k}$ est une matrice égale à la k-ième composée de la matrice A, et on a par exemple la formule $(A^{\circ k})(B^{\circ k}) = k!(AB)^{\circ k}$, d'après la formule (1), ce qui donne un théorème connu sur les matrices composées.

Si on considère des matrices carrées d'ordre n, on peut établir une explication bijective entre les matrices de la forme $e_{p_1}^{q_1} \circ \dots \circ e_{p_k}^{q_k}$ et les matrices formées avec les suites d'indices complémentaires $e_{p_{k+1}}^{q_{k+1}} \circ \dots \circ e_{p_n}^{q_n}$, ce qui permet de retrouver les théorèmes de Sylvester, Francke et Jacobi sur les mineurs d'une matrice composée.

Si les matrices $A_1, \dots, A_n$ représentent des endomorphismes d'un R-module, le produit $A_1 \circ \dots \circ A_n$ représente un invariant simultané de ces n endomorphismes. Il en est de même de tous les produits $A_{i_1} \circ \dots \circ A_{i_n}$ quel que soit l'arrangement à répétition $i_1, \dots, i_n$.

Signalons enfin que la théorie des déterminants cubiques ([6], p. 131) se rattache au produit symétrisé de n matrices.

G. Générateurs de dérivation.

Rappelons qu'une dérivation dans une algèbre est un endomorphisme de module de cette algèbre dans elle-même, vérifiant $D(u + v) = Du + Dv$, $Da = 0$ si $a \in R$, $D(u , v) = Du.v + u.Dv$. Si, au lieu de uv , on emploie le symbole (u , v) , on voit qu'on peut écrire cette dernière formule sous la forme

$$(D \circ I)(u , v) = (Du , Iv) + (Iu , Dv) \quad ,$$

si on pose $Iu = u$. On est donc encore ramené à un exemple de produit symétrisé.

Si on considère par exemple $(D \circ I)(D \circ I)(u , v) = ((D^2 \circ I) + (D \circ D))(u , v)$ et qu'on généralise à $(D \circ I)^n$, on retrouve la formule de Leibnitz.

Si on considère le produit $(Di , D'j)(u , v)$, où $ij = ji$, on retrouve le jacobien de u et v .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEAVER (R. A.). - Vanishing aggregates of determinants and their relationships, Amer. math. Monthly, t. 39, 1932, p. 266-276.

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, chap. 3, 4 et 5. - Paris, Hermann, 1948 (Act. scient. et ind., 1044 ; Eléments de Mathématique, 7).

[3] KÖNIG (Julius). - Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen. - Leipzig, B. G. Teubner, 1903.

[4] LITTLEWOOD (Dudley). - The theory of group characters and matrix representations of groups. - Oxford, at the Clarendon Press, 1950.

[5] MAC DUFFEE (C. C.). - The theory of matrices (edition reprinted). - New York, Chelsea publishing Compagny, 1946 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 5).

[6] NETTO (E.). - Analyse combinatoire et théorie des déterminants, Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, éd. franç., t. I, volume 1, fascicule 1, 1904, p. 63-132 [Article I 2].

[7] PHILIPS (H. B.). - Functions of matrices, Amer. J. of Math., t. 41, 1959, p. 266-278.

[8] STEPHANOS (Cyparissos). - Sur une extension du calcul des substitutions linéaires, J. Math. pures et appl., Série 5, t. 6, 1900, p. 73-128.

[9] TURNBULL (H. W.). - The theory of determinants, matrices and invariants. - London, Blackie and sons, 1948.

[10] VAN DER CORPUT (J. G.). - Sur les fonctions symétriques. - Amsterdam, Mathematisch Centrum, 1950 (Scriptum, 3).