Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

Jean-Pierre Serre

Sur les modules projectifs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, nº 1 (1960-1961), exp. nº 2, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_1_A2_0>

SUR LES MODULES PROJECTIFS

par Jean-Pierre SERRE

Conventions.

Tous les anneaux considérés dans cet exposé sont supposés commutatifs, noethériens, et pourvus d'un élément unité. Tous les modules sur ces anneaux sont supposés unitaires et de type fini.

Introduction.

Les modules projectifs sur un anneau de dimension 0 ou 1 sont assez bien connus (cf. par exemple [10]). Il n'en est plus de même en dimension supérieure. Par exemple, lorsque n est un entier ≥ 3 , on ignore si tout module projectif sur l'anneau des polynômes $k[X_1, \ldots, X_n]$ est libre (k désignant un corps). Pour $n = 2$, on sait d'après SESHADRI [13] qu'il en est bien ainsi ; dans la première partie de cet exposé nous reproduisons sa démonstration, en l'adaptant à un cadre un peu plus général. Dans la deuxième partie, nous construisons certains modules projectifs, et nous montrons que, s'ils sont libres, certaines variétés algébriques sont des "intersections complètes" ; dans cette direction, de nombreuses questions restent à résoudre. Les deux parties sont essentiellement indépendantes.

I. Le théorème de Seshadri.

1. Énoncé.

Soit A un anneau, et soit $A[X]$ l'anneau des polynômes en une variable à coefficients dans A . Si E est un A-module, nous noterons $E[X]$ le $A[X]$-module défini à partir de E par extension des scalaires. On a :

$$E[X] = A[X] \otimes_A E \quad .$$

Tout élément $f \in E[X]$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$f = \Sigma\, a_i\, X^i \ ,$$

où les a_i sont des éléments de E , nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Soit F un $A[X]$-module. Nous dirons que F provient de A s'il existe un A-module E tel que $E[X]$ soit isomorphe à F. Cette condition détermine alors E à isomorphisme près, car $E = F/XF$.

Le théorème de SESHADRI s'énonce ainsi :

THÉORÈME 1. - Si A est un anneau de Dedekind, tout $A[X]$-module projectif provient de A.

COROLLAIRE 1. - Tout $A[X]$-module projectif non nul est somme directe d'un module libre et d'un module de la forme $\mathfrak{a}[X]$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal non nul de A.

Cela résulte du théorème de structure des A-modules.

COROLLAIRE 2. - Si A est un anneau principal, tout $A[X]$-module projectif est libre.

Cela résulte du corollaire 1 (ou du théorème 1, au choix).

[Le théorème 1 a été démontré par SESHADRI lorsque A est l'anneau de coordonnées d'une courbe affine non singulière définie sur un corps algébriquement clos [14], et lorsque A est un anneau principal [13].]

REMARQUE. - Soit F un $A[X]$-module projectif. Si F est de rang 1, il correspond à une classe de diviseurs de $A[X]$ (en effet les anneaux locaux de $A[X]$ sont réguliers, donc factoriels). Or, il est facile de prouver que le groupe $\mathrm{Cl}(A[X])$ formé par ces classes de diviseurs est isomorphe au groupe $\mathrm{Cl}(A)$ (cf. par exemple [7]). Il s'ensuit que F provient de A. Si maintenant le rang de F est $\geqslant 2$, le théorème 1 de [10] montre que $F = L \oplus Q$, où Q est de rang 2 (en effet, $\dim A[X] = \dim A + 1 \leqslant 2$). Finalement, on voit qu'il suffit de prouver que tout $A[X]$-module projectif de rang 2 provient de A ; c'est ce que nous ferons au numéro 3.

2. Résultats auxiliaires.

LEMME 1. - Si E et E' sont deux A-modules, $\mathrm{Ext}^i_{A[X]}(E[X], E'[X])$ s'identifie à $\mathrm{Ext}^i_A(E, E')[X]$.

En effet, $A[X]$ est un A-module libre, donc plat, et l'on peut appliquer l'exercice 11, p. 123-124, de [1].

REMARQUE. - Soit $0 \to E' \to E'' \to E \to 0$ une suite exacte, et e l'élément correspondant de $\mathrm{Ext}^1_A(E, E')$. Cette suite définit une autre suite exacte :

$$0 \to E'[X] \to E''[X] \to E[X] \to 0 ,$$

d'où un élément $e(X) \in \mathrm{Ext}^1_{A[X]}(E[X], E'[X])$. On vérifie aisément que l'isomorphisme du lemme 1 transforme $e(X)$ en l'image canonique de e dans $\mathrm{Ext}^1_A(E, E')[X]$; nous noterons encore e cette image (c'est un polynôme "réduit à son terme constant").

A partir de maintenant, et jusqu'à la fin du numéro 3, nous supposerons que A est un anneau de Dedekind.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier non nul de A, soit $k = A/\mathfrak{p}$, et soit E un A-module projectif de rang 2.

On sait (cf. [10] par exemple) que $\bar{E} = E/\mathfrak{p}E$ est un k-espace vectoriel de dimension 2. Il s'ensuit que $\bar{E}[X] = E[X]/\mathfrak{p}E[X]$ est un module libre de rang 2 sur l'anneau $k[X]$.

LEMME 2. - *Tout automorphisme de déterminant 1 de $\bar{E}[X]$ est induit par un automorphisme de $E[X]$.*

D'après le théorème de structure des A-modules projectifs, on peut supposer que E est de la forme $E = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$, où $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux non nuls de A. L'espace vectoriel $\bar{E}$ se décompose alors en somme directe des deux sous-espaces de dimension 1, $\bar{\mathfrak{a}}$ et $\bar{\mathfrak{b}}$. En prenant des bases ξ et η de ces espaces, on obtient du même coup une base du $k[X]$-module $\bar{E}[X]$. Soit θ un automorphisme de déterminant 1 de ce module ; il nous faut trouver un automorphisme f de $E[X]$ dont la réduction $\bar{f}$ mod $\mathfrak{p}$ soit égale à θ. Comme l'anneau $k[X]$ est euclidien, la matrice représentant θ est produit de matrices de l'un des types suivants (cf. [15], § 108) :

(a) Matrice triangulaire supérieure, $\theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & P(X) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P(X) \in k[X]$.

(b) Matrice triangulaire inférieure, $\theta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P(X) & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Matrice diagonale, $\theta_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\lambda\mu = 1$.

Il nous suffit évidemment de prouver que ces trois types de matrices "se remontent" (c'est-à-dire sont de la forme $\bar{f}$, où f est un automorphisme de $E[X]$). On peut même se borner aux deux premiers types ; en effet, une matrice θ_3 appartient à $SL(2, k)$, donc est produit de matrices du premier type (cf. [2], p. 36).

Considérons donc une matrice du type (a) . Soit $P(X) = \Sigma\, c_i X^i$, avec $c_i \in k$. On relève chaque c_i en un élément x_i de l'idéal fractionnaire $\mathfrak{c} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}^{-1}$ (cela a un sens, car $\bar{\mathfrak{c}}$ est de dimension 1 sur k , et la donnée des bases ξ , η définit une base $\xi^{-1}\eta$ de $\bar{\mathfrak{c}}$ sur k). Soit $Q(X) = \Sigma\, x_i X^i$. Si $g \in \mathfrak{a}[X]$, on a $Qg \in \mathfrak{b}[X]$. On peut donc définir un automorphisme f de $E[X]$ au moyen de la matrice :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & Q(X) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

et il est clair que $\bar{f} = \theta_1$. On raisonne de même pour θ_2 ,

C. Q. F. D.

On conserve les mêmes hypothèses sur $\mathfrak{p}$ et sur E . On pose $V = \mathrm{Ext}^1_A(k , E)$. En localisant en $\mathfrak{p}$, on voit que

$$V = \mathrm{Ext}^1_A(k , E) = \mathrm{Ext}^1_{A_\mathfrak{p}}(k , E_\mathfrak{p}) ,$$

et on en déduit que V est un espace vectoriel de dimension 2 sur k .

LEMME 3. - <u>Soit</u> $\varepsilon \in \mathrm{Ext}^1_{A[X]}(k[X] , E[X]) = V[X]$ <u>un élément tel que l'extension</u> F_ε <u>correspondante soit un</u> $A[X]$<u>-module projectif. Si</u> e_1 <u>et</u> e_2 <u>forment une base de</u> V <u>sur</u> k , <u>les composantes de</u> ε <u>suivant</u> e_1 <u>et</u> e_2 <u>sont des éléments étrangers de</u> $k[X]$.

Par construction même de F_ε , on a une suite exacte de $A[X]$-modules :

$$0 \to E[X] \to F_\varepsilon \to k[X] \to 0 \quad .$$

Si G est un $A[X]$-module, le fait que F_ε soit projectif montre que l'homomorphisme

$$d : \mathrm{Hom}_{A[X]}(E[X] , G) \to \mathrm{Ext}^1_{A[X]}(k[X] , G)$$

est surjectif.

De plus, si $h \in \mathrm{Hom}_{A[X]}(E[X] , G)$, $d(h)$ n'est autre que $h_*(\varepsilon)$, image de ε par l'homomorphisme

$$h_* : \mathrm{Ext}^1_{A[X]}(k[X] , E[X]) \to \mathrm{Ext}^1_{A[X]}(k[X] , G) \quad .$$

On applique ceci à $G = k[X]$. Pour faire le calcul, il est commode de supposer que A est un anneau principal (on se ramène à ce cas en remplaçant A par l'anneau local A_p), et $E = A^2$; l'isomorphisme $E = A^2$ définit alors une base e_1 , e_2 de V. On décompose ε suivant cette base :

$$\varepsilon = \varepsilon_1(X)\ e_1 + \varepsilon_2(X)\ e_2 \quad , \quad \varepsilon_i(X) \in k[X] \quad .$$

Un homomorphisme $h : E[X] \to k[X]$ est donné par ses deux composantes $h_1(X)$, $h_2(X) \in k[X]$. Le module $\mathrm{Ext}^1_{A[X]}(k[X] , k[X])$ s'identifie à $k[X]$. Enfin,

$$h_*(\varepsilon) = h_1(X)\ \varepsilon_1(X) + h_2(X)\ \varepsilon_2(X) \quad .$$

Puisque d est surjectif, il existe h_1 et h_2 tels que $h_*(\varepsilon) = 1$, ce qui prouve bien que $\varepsilon_1(X)$ et $\varepsilon_2(X)$ sont étrangers.

[Inversement , il est facile de montrer que, si $\varepsilon_1(X)$ et $\varepsilon_2(X)$ sont étrangers, le module F_ε est projectif].

LEMME 4. - *Avec les hypothèses du lemme* 3, *il existe un automorphisme* f *de* $E[X]$ *tel que* $f_*(\varepsilon) = e_1$.

La suite exacte $0 \to p \to A \to k \to 0$ montre que $V = p^{-1} E/E$; le choix d'un générateur de pA_p permet donc d'identifier V et $\bar{E} = E/pE$. Cette identification est compatible avec les structures de $\mathrm{Hom}_A(E , E)$-modules de V et de $\bar{E}$. On identifie de même $V[X]$ et $\bar{E}[X]$.

Ceci fait, puisque ε_1 et ε_2 sont étrangers, il existe h_1 , h_2 tels que $h_1\, \varepsilon_1 + h_2\, \varepsilon_2 = 1$. La matrice

$$\theta = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

est unimodulaire, et transforme ε en e_1. D'après le lemme 2, il existe un automorphisme f de P tel que $f = \theta$. D'où le lemme.

LEMME 5. - *Soit* $0 \to E[X] \to F \to A/p[X] \to 0$ *une suite exacte, avec* E *projectif sur* A , *et* F *projectif sur* $A[X]$. *Le module* F *provient alors de* A .

Soit ε l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{A[X]}(A/p[X] , E[X])$ correspondant à cette extension.

D'après le lemme précédent, il existe un automorphisme f de $E[X]$ qui transforme ε en un élément e indépendant de X. Le module F est isomorphe au module F_e correspondant à e. Puisque e est indépendant de X, F_e est de la forme $E'[X]$, où E' est une extension de A/p par E. Donc F provient de A.

3. Démonstration du théorème 1.

LEMME 6. - Soit Λ un anneau régulier de dimension ≤ 2. Soient P et Q deux Λ-modules projectifs, contenus dans un même Λ-module sans torsion X. Alors $P \cap Q$ est un Λ-module projectif.

On se ramène tout de suite au cas où Λ est un anneau local régulier de dimension 2. On a la suite exacte :

$$0 \to P \cap Q \to P \oplus Q \to P + Q \to 0 \quad .$$

Pour prouver que $dh(P \cap Q) = 0$, il suffit de prouver que $dh(P + Q) \leq 1$. Or $P + Q$ est un module sans torsion. On a donc $codh(P + Q) \geq 1$ (cf. [9] pour tout ce qui concerne la codimension homologique). D'où $dh(P + Q) \leq 1$,

C. Q. F. D.

[On aurait également pu utiliser le fait que tout module réflexif sur Λ est projectif, cf. [11], lemme 6].

Soient maintenant P et Q deux modules projectifs de rang 2 sur $A[X]$, avec $Q \subset P$. Si n est un entier ≥ 0, nous dirons que le couple (P, Q) vérifie la propriété T_n s'il existe un idéal non nul α de A vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) $\alpha P \subset Q$.

(ii) Si $\alpha = \Pi p_i^{n_i}$ est la décomposition de α en facteurs premiers, on a $\Sigma n_i = n$.

LEMME 7. - Pour tout module projectif P de rang 2 sur $A[X]$, il existe un sous-module libre Q de P et un entier $n \geq 0$ tels que (P, Q) vérifie T_n.

Soit $S = A - \{0\}$, et soit K le corps des fractions de A. On a $S^{-1} A = K$ et $S^{-1} A[X] = K[X]$. Comme $K[X]$ est principal, le module $S^{-1} P$ est libre. On en conclut qu'il existe un sous-module libre Q de P, de rang 2, tel que $S^{-1} P = S^{-1} Q$. Si P est engendré par des éléments x_i, il existe donc $s_i \in S$

tel que $s_i x_i \in Q$. L'idéal $\mathfrak{a}$ de A engendré par le produit des s_i vérifie alors (i),

C. Q. F. D.

LEMME 8. - <u>Soit</u> n <u>un entier</u> ≥ 0 , <u>et soit</u> (P , Q) <u>un couple vérifiant</u> T_n . <u>Si</u> Q <u>provient de</u> A , <u>il en est de même de</u> P .

On raisonne par récurrence sur n ; si $n = 0$, on a $P = Q$, et notre assertion est triviale.

Soit donc $n \geq 1$, soit $\mathfrak{a}$ un idéal vérifiant (i) et (ii), et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A divisant $\mathfrak{a}$. Posons $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{p}$. Le module $\mathfrak{p}P$ est projectif (c'est évident par localisation, par exemple). Posons :

$$Q' = Q \cap \mathfrak{p}P \; , \quad P' = \mathfrak{p}P \quad .$$

D'après le lemme 6, Q' est projectif. D'autre part, on voit tout de suite que $\mathfrak{b}P' \subset Q'$, donc (P' , Q') vérifie T_{n-1} .

Considérons alors la suite exacte :

$$0 \to Q'/\mathfrak{p}Q \to Q/\mathfrak{p}Q \to P/\mathfrak{p}P \quad .$$

Si $k = A/\mathfrak{p}$, les $k[X]$-modules $Q/\mathfrak{p}Q$ et $P/\mathfrak{p}P$ sont libres de rang 2 . Il y a donc trois possibilités pour $Q'/\mathfrak{p}Q$:

a. $Q'/\mathfrak{p}Q = 0$. Dans ce cas, $Q' = \mathfrak{p}Q$, donc Q' provient de A (car $\mathfrak{p}Q$ peut aussi s'écrire $\mathfrak{p} \otimes_A Q$).

b. $Q'/\mathfrak{p}Q$ est isomorphe à $k[X]$. Comme $\mathfrak{p}Q$ provient de A , le lemme 5 s'applique aux modules $F = Q'$ et $E[X] = \mathfrak{p}Q$. On en conclut que Q' provient de A .

c. $Q'/\mathfrak{p}Q$ est libre de rang 2 sur $k[X]$. Comme le quotient de $Q/\mathfrak{p}Q$ par $Q'/\mathfrak{p}Q$ est sous-module de $P/\mathfrak{p}P$, donc sans torsion, on a nécessairement $Q'/\mathfrak{p}Q = Q/\mathfrak{p}Q$, d'où $Q' = Q$ et Q' provient encore de A .

D'après l'hypothèse de récurrence, P' provient aussi de A , et comme P est isomorphe à $\mathfrak{p}^{-1} \otimes_A P'$, il en est de même de P ,

C. Q. F. D.

En combinant les lemmes 7 et 8, on voit que tout module projectif de rang 2 sur $A[X]$ provient de A , ce qui établit le théorème de SESHADRI.

II. Intersections complètes.

4. Constructions.

LEMME 9. - *Soit* A *un anneau, soit* E *un* A-*module, et supposons* :

(i) $dh(E) \leq 1$.

(ii) $\mathrm{Ext}^1_A(E , A) = 0$.

Alors E *est projectif.*

On se ramène tout de suite au cas où A est local. Puisque $dh(E) \leq 1$, il existe une suite exacte

$$0 \to L \to L' \to E \to 0$$

où L et L' sont libres. Vu (ii), on a $\mathrm{Ext}^1_A(E , L) = 0$, ce qui montre que E est facteur direct de L' , donc projectif.

PROPOSITION 1. - *Soit* F *un* A-*module de dimension homologique* ≤ 1 , *soit* $\xi \in \mathrm{Ext}^1_A(F , A)$, *et soit* E_ξ *l'extension de* F *par* A *correspondant à* ξ . *Pour que* E_ξ *soit un module projectif, il faut et il suffit que* ξ *engendre le* A-*module* $\mathrm{Ext}^1_A(F , A)$.

La suite exacte

$$0 \to A \to E_\xi \to F \to 0$$

montre que $dh(E_\xi) \leq 1$. La suite exacte des Ext s'écrit ici :

$$\mathrm{Hom}_A(A , A) \xrightarrow{d} \mathrm{Ext}^1_A(F , A) \to \mathrm{Ext}^1_A(E_\xi , A) \to 0 \quad .$$

On a $\mathrm{Hom}_A(A , A) = A$, et l'image par d d'un élément $x \in A$ est égale à $x\xi$. L'application d est donc surjective si et seulement si ξ engendre $\mathrm{Ext}^1_A(F , A)$. La proposition résulte de là et du lemme 9.

Supposons maintenant que A soit *intègre*, ce qui permet de définir le *rang* de tout A-module E . Si m est un entier, nous dirons que A *vérifie la propriété* L_m *si tout* A-*module projectif de rang* m est libre. Avec ces notations, on a :

PROPOSITION 2. - *Supposons que* A *vérifie la propriété* L_1 . *Soit* F *un* A-*module de dimension homologique* ≤ 1 , *et de rang* m . *Alors la condition* :

(i) F <u>peut être engendré par</u> $m+1$ <u>éléments</u>
<u>entraîne la condition</u> :

(ii) $\mathrm{Ext}^1_A(F, A)$ <u>est un</u> A-<u>module monogène</u>.

<u>Réciproquement, si</u> A <u>vérifie</u> L_{m+1}, <u>la condition</u> (ii) <u>entraîne la condition</u> (i).

Si (i) est vérifié, on a la suite exacte :

$$0 \to P \to A^{m+1} \to F \to 0 \quad .$$

Puisque $dh(F) \leqslant 1$, P est projectif. Comme le rang de F est égal à m, le rang de P est égal à 1, et on en conclut que P est isomorphe à A. Il existe donc une extension de F par A qui est un module projectif, et la proposition 1 montre bien que (ii) est vérifiée.

Réciproquement, supposons (ii) vérifiée, et soit ξ un générateur de $\mathrm{Ext}^1_A(F, A)$. Soit E_ξ l'extension correspondante. D'après la proposition 1, E_ξ est un A-module projectif, évidemment de rang $m+1$. Puisque A vérifie L_{m+1}, E est isomorphe à A^{m+1}, et comme F est quotient de E, on voit bien que F peut être engendré par $m+1$ éléments.

COROLLAIRE. - <u>Supposons que</u> A <u>vérifie les propriétés</u> L_1 <u>et</u> L_2. <u>Soit</u> $\mathfrak{a}$ <u>un idéal non nul de</u> A, <u>de dimension homologique</u> $\leqslant 1$. <u>Les deux conditions suivantes sont alors équivalentes</u> :

(i) $\mathfrak{a}$ <u>peut être engendré par</u> 2 <u>éléments</u>.

(ii) $\mathrm{Ext}^1_A(\mathfrak{a}, A)$ <u>est un</u> A-<u>module monogène</u>.

En effet, le rang de $\mathfrak{a}$ est égal à 1.

(Noter que $\mathrm{Ext}^1_A(\mathfrak{a}, A) = \mathrm{Ext}^2_A(A/\mathfrak{a}, A)$, à cause de la suite exacte des Ext).

5. <u>Le cas de la dimension</u> 2.

LEMME 10. - <u>Soit</u> A <u>un anneau local régulier de dimension</u> n, <u>et soit</u> $\mathfrak{a}$ <u>un idéal de</u> A <u>qui soit primaire pour l'idéal maximal</u> $\mathfrak{m}$ <u>de</u> A. <u>Pour que</u> $\mathfrak{a}$ <u>soit irréductible, il faut et il suffit que</u> $\mathrm{Ext}^n_A(A/\mathfrak{a}, A)$ <u>soit monogène</u>.

(Rappelons que $\mathfrak{a}$ est dit <u>irréductible</u> s'il n'est pas intersection de deux idéaux $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{b}_2$, avec $\mathfrak{b}_i \neq \mathfrak{a}$ pour $i = 1, 2$).

Dans le cas classique, ce résultat est dû à MACAULAY (au langage près) ; le cas général est dû à GROTHENDIECK et GABRIEL (cf. [3], n° 8). Rappelons brièvement comment procède GABRIEL :

Soit $k = A/m$, et soit I l'enveloppe injective de k . On montre que I s'identifie à $\varinjlim \mathrm{Ext}^n_A(A/q , A)$, pour q parcourant l'ensemble des idéaux de A primaires pour m . Si E est un A-module de longueur finie, on pose $E' = \mathrm{Hom}_A(E , I)$, c'est le module dual du module E . Cette dualité jouit des propriétés habituelles (elle fournit une équivalence de la catégorie des A-modules de longueur finie avec la catégorie duale). On vérifie également que E' est isomorphe à $\mathrm{Ext}^n_A(E , A)$. Si $E = A/\alpha$, E' n'est pas autre chose que le sous-module de I annulé par α , on le note α^{-1} (c'est l' "inverse system" de MACAULAY). Comme la dualité transforme intersection en somme, on voit que α est irréductible si et seulement si α^{-1} n'est pas somme (de façon non triviale) de deux sous-modules, c'est-à-dire si α^{-1} est monogène. Comme α^{-1} est isomorphe à $\mathrm{Ext}^n_A(A/\alpha , A)$, cela démontre le lemme.

PROPOSITION 3. - Soit A un anneau local régulier de dimension 2 , et soit α un idéal de A qui soit primaire pour l'idéal maximal de A . Les deux conditions suivantes sont alors équivalentes :

(i) α peut être engendré par deux éléments ;

(ii) α est irréductible.

On applique le corollaire à la proposition 2. Comme A est local, il vérifie L_1 et L_2 . Comme il est régulier de dimension 2 , on a $\mathrm{dh}(\alpha) \leq 1$. Enfin, le lemme 10 montre que la condition "$\mathrm{Ext}^1_A(\alpha , A)$ est monogène" peut être remplacée par la condition (ii).

REMARQUE. - Le résultat précédent avait été démontré par MACAULAY [6] dans le cas particulier de la géométrie algébrique.

Passons maintenant au cas global. Soit C un anneau principal, ayant une infinité d'idéaux premiers, et soit $A = C[X]$. D'après le théorème de Seshadri, A vérifie L_1 et L_2 . On peut en outre démontrer que tout anneau local A_m , où m est un idéal maximal de A , est un anneau local régulier de dimension 2 .

PROPOSITION 4. - Sous les hypothèses précédentes, soit α un idéal de A dont tous les idéaux premiers associés soient maximaux. Soit

$$\alpha = q_1 \cap \ldots \cap q_h$$

la décomposition primaire de $\mathfrak{a}$ dans A. Alors, pour que $\mathfrak{a}$ puisse être engendré par deux éléments, il faut et il suffit que tous les $\mathfrak{q}_i$ soient irréductibles.

Soient $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_h$ les idéaux maximaux correspondant aux $\mathfrak{q}_i$, et posons $A_i = A_{\mathfrak{m}_i}$. En localisant en $\mathfrak{m}_i$, on voit facilement que $\mathrm{Ext}^1_A(\mathfrak{a}, A)$ est somme directe des modules $Q_i = \mathrm{Ext}^1_{A_i}(\mathfrak{q}_i, A_i)$, lesquels sont de longueur finie sur A_i. On en conclut que $\mathrm{Ext}^1_A(\mathfrak{a}, A)$ est monogène si et seulement si tous les Q_i le sont, c'est-à-dire (proposition 3) si et seulement si les $\mathfrak{q}_i$ sont irréductibles. La proposition résulte alors du corollaire à la proposition 2.

REMARQUE. - La proposition précédente s'applique notamment à l'anneau $\mathbf{Z}[X]$, ainsi qu'aux anneaux de polynômes $k[X, Y]$, où k est un corps.

6. Formes différentielles et foncteurs $\mathbf{Ext}$.

A partir de maintenant, nous nous bornons au cas géométrique, autrement dit, nous considérons des variétés algébriques sur un corps algébriquement clos k ; les notations employées seront celles de FAC [8].

Soit V une variété non singulière de dimension r ; nous noterons Ω_V le faisceau des formes différentielles de degré r sur V. C'est un faisceau localement libre de rang 1. Soit maintenant W une sous-variété de V. Supposons W de codimension h en tous ces points. Si W est non singulière, le faisceau Ω_W est défini, et l'on construit facilement un isomorphisme canonique :

$$\mathbf{Ext}^h_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_W, \Omega_V) = \Omega_W,$$

(cf. [5]).

Lorsque W n'est plus non singulière, on prend la formule précédente comme définition du faisceau Ω_W. Lorsque par exemple W est une courbe, GROTHENDIECK a vérifié que le faisceau Ω_W ainsi défini coïncide avec le faisceau des "formes différentielles régulières" de W, au sens de ROSENLICHT (c'est le faisceau noté Ω' dans [12], chap. IV, § 3).

Nous dirons que W est une variété de Cohen-Macaulay si les anneaux locaux de W sont de Cohen-Macaulay, c'est-à-dire si leur codimension homologique est égale à leur dimension. Toute courbe est une variété de Cohen-Macaulay. Nous dirons que W est une variété de Gorenstein si c'est une variété de Cohen-Macaulay, et si Ω_W est localement libre de rang 1 . Pour une courbe, cela signifie que, pour tout $Q \in W$, on a l'égalité "$n_Q = 2\delta_Q$ " , cf. [12], p. 80-81. Nous dirons que W est une intersection complète en Q (resp. sur une variété affine V) si l'idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}_Q(V)$ (resp. de l'algèbre affine de V) défini par W peut être engendré par h éléments. On démontre aisément que, si W est une intersection complète en Q , c'est une variété de Gorenstein en Q .

7. Dimension supérieure.

Commençons par le cas local :

PROPOSITION 5. - Soit V une variété non singulière, soit $Q \in V$, et soit W une sous-variété de V de codimension 2 passant par Q . Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) W est une intersection complète en Q .

(ii) W est de Gorenstein en Q .

On sait déjà que (i) $\Longrightarrow$ (ii). Inversement, soit A l'anneau local de Q sur V , et soit $\mathfrak{a}$ l'idéal de A défini par W . L'hypothèse (ii) équivaut à dire que $\mathrm{Ext}^2_A(A/\mathfrak{a}, A)$ est isomorphe à $A/\mathfrak{a}$, donc est monogène ; la proposition résulte alors du corollaire à la proposition 2.

COROLLAIRE. - Dans une variété non singulière de dimension 3 , toute courbe de Gorenstein est localement une intersection complète.

Dans le cas global, il nous faut faire davantage d'hypothèses :

PROPOSITION 6. - Soit V une variété affine non singulière sur laquelle tout fibré vectoriel de rang 1 est trivial. Soit W une sous-variété de Cohen-Macaulay de V , de codimension 2 en chacun de ses points. La condition

(i) W est une intersection complète dans V ,

entraîne alors :

(ii) Le faisceau Ω_W est isomorphe au faisceau $\mathcal{O}_W$.

Réciproquement, si tout fibré vectoriel de rang 2 sur V est trivial, la condition (ii) entraîne la condition (i).

Le faisceau Ω_V est localement libre de rang 1 , donc isomorphe à $\mathcal{O}_V$ d'après l'hypothèse faite sur V . Si W est une intersection complète, on en déduit une résolution explicite de $\mathcal{O}_W$ qui montre tout de suite que (ii) est vérifiée. Inversement, si A (resp. α) désigne l'anneau de coordonnées de V (resp. l'idéal défini par W), le faisceau associé à $\mathrm{Ext}^2_A(A/\alpha , A)$ est isomorphe à Ω_W ; si (ii) est vérifié, on en déduit que $\mathrm{Ext}^2_A(A/\alpha , A)$ est monogène (en fait isomorphe à A/α). D'autre part, puisque A/α est localement un anneau de Cohen-Macaulay, on a $\mathrm{dh}(\alpha) \leq 1$. On peut donc appliquer le corollaire à la proposition 2,

C. Q. F. D.

EXEMPLE. - Prenons pour V l'espace affine de dimension 3 , et pour W une courbe de cet espace affine. On en déduit que, pour que W soit une intersection complète, il faut que ce soit une courbe de Gorenstein, et que son fibré tangent (correspondant au dual du faisceau Ω_W) soit trivial. On ne pourrait affirmer la réciproque que si l'on savait que tout fibré vectoriel de rang 2 sur l'espace affine k^3 est trivial (en particulier si l'on pouvait étendre le théorème de Seshadri à la dimension 3).

COROLLAIRE. - Supposons que tout fibré vectoriel de rang 2 sur l'espace affine k^3 soit trivial. Soit W une courbe non singulière de k^3 de genre 0 ou 1 . Alors W est une intersection complète.

Puisque W est non singulière, elle est de GORENSTEIN, et il nous faut voir que son fibré tangent est trivial. C'est clair pour le genre 1 (car le fibré tangent d'une courbe elliptique est trivial). Pour le genre 0 , cela résulte du fait que tout fibré vectoriel sur la courbe est trivial.

[Ainsi, pour mettre en défaut le théorème de Seshadri en dimension 3 , il suffirait de construire une courbe non singulière de k^3 , de genre 0 ou 1 , qui ne soit pas une intersection complète... Malheureusement, il est difficile de prouver qu'une courbe, donnée explicitement par des équations, n'est pas une intersection complète.]

8. Intersections complètes de codimension 2 dans l'espace projectif.

LEMME 11. - Soit A un anneau local régulier de dimension m , et soit E un A-module de Cohen-Macaulay de dimension $m - h$ (autrement dit, on a $\dim(E) = m - h = \mathrm{cod\,h}(E)$). On a alors $\mathrm{Ext}^i_A(E , A) = 0$ pour $i \neq h$, et le module $E' = \mathrm{Ext}^h_A(E , A)$ est un module de Cohen-Macaulay de dimension $m - h$.

Ce résultat est bien connu (cf. par exemple [5], page 8) ; rappelons rapidement la démonstration :

Lorsque $h = m$, E est de longueur finie, et le lemme se démontre immédiatement par récurrence sur la longueur de E. On raisonne ensuite par récurrence sur $m - h = \mathrm{codh}(E)$. Si x est un élément de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A qui fait partie d'une "E-suite", on a la suite exacte :

$$0 \to E \xrightarrow{x} E \to E/xE \to 0 \quad .$$

D'où la suite exacte des Ext :

$$\mathrm{Ext}^i_A(E/xE , A) \to \mathrm{Ext}^i_A(E , A) \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}^i_A(E , A) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_A(E/xE , A) \quad .$$

Comme E/xE est un module de Cohen-Macaulay de dimension $m - h - 1$, l'hypothèse de récurrence montre que $x : \mathrm{Ext}^i_A(E , A) \to \mathrm{Ext}^i_A(E , A)$ est surjectif pour $i \neq h$, d'où la nullité de $\mathrm{Ext}^i_A(E , A)$ pour $i \neq h$. Pour $i = h$, on voit que x est non diviseur de zéro dans E', et que E'/xE' s'identifie à $\mathrm{Ext}^{k+1}_A(E/xE , A)$; comme ce dernier module est un module de Cohen-Macaulay de dimension $m - h - 1$, cela achève la démonstration.

REMARQUE. - Le résultat ci-dessus (comme d'ailleurs tous les résultats locaux de cet exposé) reste valable lorsqu'on remplace A par l'algèbre graduée $k[X_1 , \dots , X_m]$ (k étant un corps), et E par un A-module gradué. Cela se voit, soit en refaisant la démonstration dans ce nouveau cadre, soit tout simplement en passant au localisé de $k[X_1 , \dots , X_m]$ par rapport à l'idéal maximal engendré par les X_i.

PROPOSITION 7. - <u>Soit</u> r <u>un entier</u> $\geqslant 3$, <u>et soit</u> W <u>une sous-variété de l'espace projectif</u> $\underset{\sim}{P}_r(k)$ <u>qui est de codimension</u> 2 <u>en chacun de ses points. Pour que</u> W <u>soit une intersection complète, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites</u> :

(a) W <u>est une variété de première espèce au sens de</u> DUBREIL (cf. [4], ainsi que FAC, [8], n° 77).

(b) <u>Il existe un entier</u> N <u>tel que le faisceau</u> Ω_W <u>soit isomorphe à</u> $\mathcal{O}_W(N)$.

Soit $A = k[T_0 , \dots , T_r]$, et soit $\mathfrak{a}$ l'idéal de A défini par W. Dire que W est une intersection complète signifie que $\mathfrak{a}$ peut être engendré par deux polynômes homogènes. Si tel est le cas, on sait que $\mathrm{dh}(A/\mathfrak{a}) = 2$, ce qui signifie que W est de première espèce (cf. FAC, n° 77 et 78). De plus, si l'on désigne par d_1 et d_2 les degrés de ces polynômes, on a une suite exacte de faisceaux :

$$0 \to \mathcal{O}(-d_1-d_2) \to \mathcal{O}(-d_1) \oplus \mathcal{O}(-d_2) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_W \to 0 \quad .$$

Cette suite permet de calculer Ω_W, en tenant compte de ce que $\Omega_V = \mathcal{O}(-r-1)$. On trouve :

$$\Omega_W = \mathcal{O}_W(N) \; , \text{ avec } N = d_1 + d_2 - r - 1 \; , \text{ (cf. \underline{loc. cit.}, proposition 5)} .$$

Inversement, supposons les conditions (a) et (b) vérifiées et montrons que W est une intersection complète. Soit $F = \mathrm{Ext}^2_A(A/\alpha \, , A)$; d'après le corollaire à la proposition 2 (transposé au cas gradué), il nous suffit de prouver que F est un module gradué monogène. Le faisceau $\mathcal{F}$ associé à F n'est autre que le faisceau $\underset{\sim}{\mathrm{Ext}}^2_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_W \, , \mathcal{O})$, c'est-à-dire le faisceau $\Omega_W(r+1)$. Vu l'hypothèse (b), c'est le faisceau $\mathcal{O}_W(N+r+1)$. Notons alors $F^{\natural}$ le module gradué attaché au faisceau $\mathcal{F}$ (cf. FAC, n° 67). Puisque le module attaché à $\mathcal{O}_W$ est A/α (FAC, p. 273, proposition 5, (a)), on a $F^{\natural} = A/\alpha(N+r+1)$, et $F^{\natural}$ est un module monogène. Mais d'autre part, le lemme 11 montre que $dh(F) = 2$. On en déduit que l'application canonique $F \to F^{\natural}$ est bijective (cf. FAC, p. 271, proposition 2 - c'est ici qu'intervient l'hypothèse $r \geq 3$). Donc F est monogène,

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - Pour qu'une courbe non singulière W de $\underset{\sim}{P}_3(k)$ soit une intersection complète, il faut et il suffit que ce soit une courbe de première espèce et que sa classe canonique soit égale à un multiple entier de la classe des sections planes.

En effet, si K est un diviseur canonique, et si H est un diviseur découpé sur W par un plan, la relation "$K \sim N.H$" est équivalente à la relation "Ω_W est isomorphe à $\mathcal{O}_W(N)$".

EXEMPLE. - Soit W une courbe de genre 4, non hyperelliptique. Le système linéaire des diviseurs canoniques de W définit un plongement de W dans $\underset{\sim}{P}_3(k)$. Ce plongement vérifie les conditions (a) et (b), avec $N = 1$. On retrouve ainsi le fait que W est intersection complète de deux surfaces de degrés 2 et 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri) and EILENBERG (Samuel). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[2] DIEUDONNÉ (Jean). - La géométrie des groupes classiques. - Berlin, Springer-Verlag, 1955 (Ergebnisse der Mathematik, 5).

[3] GABRIEL (Pierre). - Objets injectifs dans les catégories abéliennes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 12, 1958/59, n° 17, 32 p.

[4] GAETA (Federico). - Quelques progrès récents dans la classification des variétés algébriques d'un espace projectif, Deuxième Colloque de Géométrie algébrique [1952. Liège] ; p. 145-183. - Liège, Georges Thone, 1952 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[5] GROTHENDIECK (Alexander). - Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents, Séminaire Bourbaki, 2e éd., t. 9, 1956/57, n° 149, 25 p.

[6] MACAULAY (F. S.). - On a method of dealing with the intersections of plane curves, Trans. Amer. math. Soc., t. 5, 1904, p. 385-410.

[7] SAMUEL (Pierre). - Sur les anneaux factoriels, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961.

[8] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.

[9] SERRE (Jean-Pierre). - Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens, Proceedings of the international Symposium on algebraic number theory [1955. Tokyo et Nikko] ; p. 175-189. - Tokyo, Science Council of Japan, 1956.

[10] SERRE (Jean-Pierre). - Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 11, 1957/58, n° 23, 18 p.

[11] SERRE (Jean-Pierre). - Classe des corps cyclotomiques, Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, n° 174, 11 p.

[12] SERRE (Jean-Pierre). - Groupes algébriques et corps de classes. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1264 ; Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 7).

[13] SESHADRI (C. S.). - Triviality of vector bundles over the affine space K^2, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 44, 1958, p. 456-458.

[14] SESHADRI (C. S.). - Algebraic vector bundles over the product of an affine curve and the affine line, Proc. Amer. math. Soc., t. 10, 1959, p. 670-673.

[15] VAN DER WAERDEN (Bartel L.). - Moderne Algebra, t. 1 et 2. - Berlin, Springer-Verlag, 1930 et 1931 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 33 et 34).