Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Marie-Paule Brameret

Sur les Baer-demi-groupes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, nº 1 (1960-1961), exp. nº 14,
p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_1_A13_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
14e année, 1960/61, n° 14

27 février 1961

SUR LES BAER*-DEMI-GROUPES

par Mlle Marie-Paule BRAMERET

Dans [4], KAPLANSKY introduit une classe d'anneaux avec involution, les Baer*-anneaux. Prenant comme point de départ le demi-groupe multiplicatif d'un Baer*-anneau, FOULIS détermine, en posant certains axiomes, un Baer*-demi-groupe [1]. Il établit une correspondance entre ces demi-groupes et les treillis orthocomplémentés, faiblement modulaires, utilisés par LOOMIS [5].

I. Baer*-demi-groupe.

Une involution dans un demi-groupe (multiplicatif) D est une application $x \to x^*$ telle que $(x^*)^* = x^{**} = x$ et $(xy)^* = y^* x^*$ quels que soient x et y dans D ; il suit de $x^{**} = x$ que l'application $*$ est bijective.

Un élément $e \in D$ est une projection si $e = e^2 = e^*$.

Soit K un idéal bilatère non vide du demi-groupe D ; K est appelé idéal focal si, pour chaque élément $x \in D$, le quotient à droite $K \cdot\!\cdot\, x = \{y \ , \ y \in S \ , \ xy \in K\}$ est un idéal principal à droite engendré par une projection.

Un Baer*-demi-groupe est le couple $(D \ , K)$ formé par un demi-groupe avec involution D et un idéal focal K de D . Lorsqu'aucune confusion ne peut en résulter, on désignera par D le Baer*-demi-groupe $(D \ , K)$.

Notons $P = P(D)$ l'ensemble, supposé non vide, de toutes les projections de D . Cet ensemble est partiellement ordonné par la relation :

$$e \ , \ f \in P \ , \ e \leqslant f \iff ef = e \ \text{(équivalent à } fe = e\text{)} \quad .$$

Si un idéal principal à droite I de D , est engendré par une projection e , il est évident que la projection e est uniquement déterminée par l'idéal I . Par conséquent, chaque élément $x \in D$ détermine une projection unique x' telle que $K \cdot\!\cdot\, x = x' D$. L'application $' : D \to P$ est appelée application focale.

L'idéal focal K possède la propriété suivante : les relations $a \in D$ et $aa^* \in K$ entraînent $a \in K$ (en effet, si $aa^* \in K$, alors $a^* = a' a^*$ et $a = aa' \in K$). Par conséquent $K = K^*$, car de $a \in K$ suit $a^* a = a^*(a^*)^* \in K$ et $a^* \in K$.

On vérifie aisément que l'application focale possède les propriétés suivantes :

(1) Quel que soit $a \in D$, $a = aa''$; en particulier pour tout élément $e \in P$, $e \leqslant e''$.

(2) Si les éléments a, $b \in D$ vérifient l'égalité $ab = a$, alors $b' \leqslant a'$, en particulier si e, $f \in P$, $e \leqslant f$ entraîne $f' \leqslant e'$.

(3) Quel que soit $a \in D$, $a' = a'''$.

On utilisera souvent, dans la suite, le fait que si un élément $a \in D$ commute avec une projection $e \in P$, a commute aussi avec e'. En effet si $ae = ea$, alors $eae' = aee' \in K$, donc $ae' = e'ae'$. De $ae = ea$ suit $a^* e = ea^*$, d'où $a^* e' = e'a^* e'$ et $e'a = e'ae'$. Par conséquent $ae' = e'a$.

Une projection $e \in P$ est dite K-close, si $e = e''$. Notons $P' = P'(D)$ l'ensemble de toutes les projections K-closes de D. P' est l'image de D dans l'application focale ; si $f \in P$, f'' est la plus petite projection K-close contenant f.

THÉORÈME 1. – La condition nécessaire et suffisante pour que P' soit contenu dans le centre de D est que l'idéal K soit semi-premier.

DÉMONSTRATION. – La condition est nécessaire. Soit $y^{p+1} \in K$, p entier $\geqslant 1$. Donc $y'y^p = y^p \in y''' D$ et $y''y^p \in K$. Puisque $y'' \in P'$, $y = yy'' = y''y$ et $y^p = y''y^p \in K$.

La condition est suffisante. Soit $e \in P'$. Pour tout $x \in D$, $(xe)\, e' = x(ee') \in K$ donc $(e'xe)^2 = e'$, (xee') $xe \in K$ et $e'xe \in K$, c'est-à-dire $exe = xe$. On a aussi $ex^* e = x^* e$ c'est-à-dire $exe = ex$, donc $ex = xe$.

Dans le théorème suivant, on montre que D possède un élément unité. Remarquons, pour cela, que si u est un élément unité à droite (ou à gauche) d'un demi-groupe avec involution, alors $u = u^*$ est l'élément unité (bilatère) du demi-groupe.

THÉORÈME 2. – Si (D, K) est un Baer*-demi-groupe, alors D possède un élément unité 1, et 1 est la plus grande projection de $P'(D)$. De plus, $1'$ est la plus petite projection de P' ; $1'$ appartient au centre de D et $K = 1'D = D1'$. Par conséquent si un demi-groupe avec involution possède un idéal focal, celui-ci est unique.

DÉMONSTRATION. - Soit k un élément de K ; pour tout élément $e \in P$, $ke \in K$, et donc $e = k'e = ek'$.

Quel que soit $a \in D$, $a = aa''$ avec $a'' \in P'$, donc $ak' = a$. Il en résulte que k' est l'élément unité de D. On pose $k' = 1$. Le reste de la démonstration est évidente du fait que $1' = 1.1' \in K$.

Nous nous proposons d'étudier la question de l'existence de la borne inférieure dans P' de deux éléments e, $f \in P'$. Dans le cas particulier où e et f commutent, il est évident que $\inf_{P'}\{e , f\}$ existe, et est égal à ef. Dans le cas général, de $f'ee' \in K$ suit $e' \leqslant (f'e)'$ donc e' et $e = e''$ commutent avec $(f'e)'$. Par conséquent $\inf_{P'}\{(f'e)' , e\}$ existe et est égal à $(f'e)'e$. Puisque $f'(f'e)'e = f'e(f'e)' \in K$, on a $(f'e)'e \leqslant f$, et $(f'e)'e$ est un minorant dans P' de $\{e , f\}$. Soit $q \in P'$, si $q \leqslant e , f$, $f'eq = f'q = f'fq \in K$, c'est-à-dire $q \leqslant (f'e)'$. Par conséquent $q \leqslant (f'e)'e$. On a montré que $\inf_{P'}\{e , f\}$ existe, et est égale à $(f'e)'e$.

Posons $e \wedge f = (f'e)'e$. Il est immédiat que si $e , f \in P'$, la projection $(e' \wedge f')' = [(fe')'e']'$ est la borne supérieure dans P' de e et f. On la désignera par $e \vee f = (e' \wedge f')'$.

En résumé, P' est un treillis avec élément maximum 1 et un élément minimum $1'$. L'application $e \to e'$ de P' sur P' est une orthocomplémentation [6]. (En effet si $e \in P'$, $e \wedge e' = ee' = [(1')'e']'e' = 1' \wedge e' = 1'$ et $e \vee e' = 1$). Dans [5], LOOMIS définit un treillis orthocomplémenté <u>faiblement modulaire</u> comme étant un treillis dans lequel l'inégalité $e \leqslant f$ implique

$$f = e \vee (f \wedge e') \quad .$$

On remarque que le treillis P' est faiblement modulaire. En effet, pour e, $f \in P'$ avec $e \leqslant f$, nous avons

$$f = [(fe')'e']' = [(fe')' \wedge e']' = (fe')'' \vee e \quad .$$

Puisque f commute avec e, il commute avec e'. Donc

$$fe' = f \wedge e' = (fe')''$$

d'où

$$f = (f \wedge e') \vee e \quad .$$

THÉORÈME 3. - Soit (D , K) un Baer*-demi-groupe. L'ensemble P' des projections K-closes de D est un treillis orthocomplémenté faiblement modulaire, l'orthocomplémentation coïncidant avec la restriction dans P' de l'application focale.

Remarquons qu'un sous-ensemble (non vide) de P' possède une borne inférieure dans P , si et seulement s'il possède une borne inférieure dans P' , et que ces deux bornes inférieures, si elles existent, coïncident. Cette remarque n'est pas valable pour les bornes supérieures.

THÉORÈME 4. - Soit M un complexe de D . L'ensemble $K .\cdot M = \{y , \ y \in D , My \in D\}$ est un idéal principal à droite engendré par une projection si et seulement si $\{m' , \ m \in M\}$ possède une borne inférieure dans P . De plus, si $f = \inf_P\{m' , \ m \in M\}$ alors $f \in P'$ et $K .\cdot M = fD$.

DÉMONSTRATION. - Il est immédiat que $K .\cdot M = fD$ entraîne $f = \inf_P\{m' , \ m \in M\}$ si $f \in P$ est la borne inférieure de $\{m' , \ m \in M\}$, alors $f \in P'$. On en déduit $f \in K .\cdot M$ et $fD \subseteq K .\cdot M$.

Soit $y \in K .\cdot M$, c'est-à-dire $my \in K$, quel que soit $m \in M$. Donc $y^* m^* \in K$ et $m = m(y^*)'$. Par suite $(y^*)'' \leqslant m'$, d'où $(y^*)'' \leqslant f$.

De $y^* = y^*(y^*)$ résulte $y^* f = y^*$ et $y = fy \in fD$. Par conséquent $K .\cdot M = fS$.

Si pour tout complexe M de D , l'ensemble $K .\cdot M$ est un idéal principal à droite engendré par une projection l'idéal focal K sera dit complet.

Du théorème 4 suit immédiatement :

THÉORÈME 5. - Pour que le treillis P' soit complet, il faut et il suffit que l'idéal focal K soit complet.

EXEMPLE. - Soit D le demi-groupe $\{1 , 1' , e , f , a , b , c\}$ dont la multiplication est donnée par la table.

	1'	1	e	f	a	b	c
1'	1'	1'	1'	1'	1'	1'	1'
1	1'	1	e	f	a	b	c
e	1'	e	e	1'	c	1'	c
f	1'	f	1'	f	b	b	1'
a	1'	a	b	c	1	e	f
b	1'	b	b	1'	f	1'	f
c	1'	c	1'	c	e	f	f

L'application $1' \to 1'$, $1 \to 1$, $e \to e$, $f \to f$, $a \to a$, $b \to c$ et $c \to b$ est une involution. $1'$ est élément zéro de D , et $(1')$ est l'idéal focal de D .

$$P'(D) = P(D) = \{1' , 1 , e , f\} .$$

Dans le paragraphe suivant, on montre qu'étant donné un treillis L orthocomplémenté faiblement modulaire L , on peut trouver un Baer*-demi-groupe (D , K) dont le treillis des projections K-closes est isomorphe à L . Il s'ensuit donc qu'un treillis orthocomplémenté faiblement modulaire peut être défini comme étant le treillis des projections closes pour l'idéal focal d'un Baer*-demi-groupe.

II. Treillis orthocomplémenté faiblement modulaire.

Soit L un treillis avec élément maximum 1 et élément minimum 0 orthocomplémenté $(e \to e')$ faiblement modulaire.

On notera $M(L)$ le demi-groupe (par rapport à la composition des fonctions) des applications isotones de L dans L .

On appelle hemimorphisme [3] de L , une application $\Phi : L \to L$ qui vérifie :

$$(e \vee f)\Phi = e\Phi \vee f\Phi \quad \text{quels que soient } e , f \in L$$

et

$$0\Phi = 0 .$$

Etant donné un élément $\Phi \in M(L)$, une fonction isotone Φ^* de L dans L est dite adjointe à Φ si les inégalités

$$(e'\Phi)'\,\Phi^* \leqslant e \quad \text{et} \quad (e'\Phi^*)'\,\Phi \leqslant e$$

sont satisfaites par tout élément $e \in L$.

<u>Il existe au plus une fonction adjointe à</u> Φ . S'il en existait deux, soient Φ^* et Φ^+ , en posant $f = e\Phi^*$, $e \in L$, on aurait $f'\Phi \leqslant e'$, donc $e \leqslant (f'\Phi)'$ et $e\Phi^+ \leqslant (f'\Phi)'\,\Phi^+ \leqslant f = e\Phi^*$. De même $e\Phi^* \leqslant e\Phi^+$ et $e\Phi^* = e\Phi^+$; d'où $\Phi^* = \Phi^+$.

Notons $D(L)$ l'ensemble des fonctions isotones de L dans L qui possèdent une fonction adjointe.

Il est évident que si $\Phi \in D(L)$, $\Phi^* \in D(L)$ et $\Phi^{**} = \Phi$.

THÉORÈME 6. - $D(L)$ <u>est un demi-groupe (pour la composition des fonctions) avec involution</u> $\Phi \to \Phi^*$; <u>il possède un élément zéro, et tous ses éléments sont des hémimorphismes du treillis</u> L .

DÉMONSTRATION. - Soient Φ , $\Psi \in D(L)$, et soit $e \in L$. Les inégalités

$$(e\Phi\Psi)'\,\Psi^*\,\Phi^* \leqslant (e\Phi)'\,\Phi^* \leqslant e'$$

$$(e\Psi^*\,\Phi^*)'\,\Phi\Psi \leqslant (e\Psi^*)'\,\Psi \leqslant e'$$

entraînent

$$(\Phi\Psi)^* = \Psi^*\,\Phi^* \qquad .$$

Soient e , f deux éléments arbitraires de L . Posons $g = e \vee f$. Si $\Phi \in D(L)$,

$$e\Phi \leqslant g\Phi \quad \text{et} \quad f\Phi \leqslant g\Phi \qquad .$$

Si l'élément $h \in L$ majore $e\Phi$ et $f\Phi$,

$$h' \leqslant (e\Phi)' \quad \text{et} \quad (f\Phi)'$$

d'où

$$h'\Phi^* \leqslant (e\Phi)'\,\Phi^* \quad \text{et} \quad (f\Phi)'\,\Phi^* \qquad .$$

Il suit que $h'\Phi^* \leqslant e'$, f' , c'est-à-dire e , $f \leqslant (h'\Phi^*)'$. Par conséquent $g \leqslant (h'\Phi^*)'$, d'où $g\Phi \leqslant (h'\Phi^*)'\,\Phi \leqslant h$. Ceci montre que

$$(e \vee f)\,\Phi = e\Phi \vee f\Phi \qquad .$$

Si $e \in L$, pour que $e\Phi = 0$, il faut et il suffit que $e \leqslant (1\Phi^*)'$. En effet, si $e\Phi = 0$, alors

$$1\Phi^* = (e\Phi)' \Phi^* \leq e'$$

d'où

$$e \leq (1\Phi^*)' \quad .$$

Inversement,

$$e \leq (1\Phi^*)' \text{ entraîne } e\Phi \leq (1\Phi^*)' \Phi \leq 1' = 0$$

donc

$$e\Phi = 0 \quad .$$

En particulier, $0\Phi = 0$ et Φ est un hémimorphisme.

L'application constante $\Theta : e \to 0$ est l'élément zéro de $D(L)$.

Soient $\Phi, \Psi \in D(L)$. Pour que $\Phi\Psi = \Theta$, il faut et il suffit que $1\Phi \leq (1\Psi^*)'$.
En effet, si $1\Phi \leq (1\Psi^*)'$, quel que soit $e \in L$,

$$e\Phi\Psi \leq 1\Phi\Psi = 0$$

donc

$$\Phi\Psi = \Theta \quad .$$

Inversement, si $\Phi\Psi = 0$, alors

$$(1\Phi)\Psi = 0 \text{ et } 1\Phi \leq (1\Psi^*)' \quad .$$

A chaque élément $g \in L$, on fait correspondre l'application $\varepsilon_g \in M(L)$ définie par :

$$e\varepsilon_g = (e \vee g') \wedge g \text{ quel que soit } e \in L \quad .$$

Remarquons que si $h, g \in L$, $h \leq g$ entraîne $h = h\varepsilon_g$, car de $h \leq g$ suit $g' \leq h'$ et la faible modularité de L permet d'écrire

$$h' = (h' \wedge g) \vee g'$$

c'est-à-dire

$$h = (h \vee g') \wedge g = h\varepsilon_g \quad .$$

Il en résulte que $\varepsilon_g = \varepsilon_g^2$. De plus, pour $e \in L$,

$$(e\varepsilon_g)' \ \varepsilon_g = [(e \vee g') \wedge g]' \ \varepsilon_g = [(e' \wedge g) \vee g'] \ \varepsilon_g = [(e' \wedge g) \vee g'] \wedge g$$
$$= [e' \wedge g] \ \varepsilon_g = e' \wedge g \leqslant e' \quad ;$$

donc ε_g^* existe et est égale à ε_g.

Par conséquent ε_g est une projection du demi-groupe avec involution $D(L)$.

THÉORÈME 7. - Si L est un treillis orthocomplémenté faiblement modulaire, $(D(L), \{\Theta\})$ est un Baer*-demi-groupe, et la correspondance $g \leftrightarrow \varepsilon_g$ entre L et $P'[D(L)]$ est un isomorphisme de treillis respectant l'orthocomplémentation.

DÉMONSTRATION. - Soit $\Phi \in D(L)$. Posons $g = (1\Phi)'$. D'où $\Phi\varepsilon_g = \Theta$. D'autre part, supposons que la fonction $\Psi \in D(L)$ vérifie l'égalité $\Phi\Psi = \Theta$. Il s'ensuit que $1\Psi^* \leqslant g$; donc, pour tout $e \in L$,

$$e\Psi^* \leqslant g \quad \text{et} \quad e\Psi^* \varepsilon_g = e\Psi^* \quad ,$$

et par conséquent,

$$\Psi^* \ \varepsilon_g = \Psi^*$$

c'est-à-dire

$$\Psi = \varepsilon_g^* \Psi = \varepsilon_g \Psi \quad .$$

Donc, $(\Theta) : \Phi$ est l'idéal principal à droite de $D(L)$ engendré par la projection ε_g et (Θ) est l'idéal focal de $D(L)$. Il est évident que, pour e, $f \in L$, l'inégalité $e \leqslant f$ est vérifiée si et seulement si $\varepsilon_e \varepsilon_f = \varepsilon_e$, donc la correspondance $g \leftrightarrow \varepsilon_g$ entre L et $P'[D(L)]$ est un isomorphisme de treillis. De plus $(\varepsilon_g)' = \varepsilon_{g'}$, donc cet isomorphisme respecte l'orthocomplémentation.

Dans [6], von NEUMANN a montré que si L est un treillis modulaire complémenté possédant au moins 4 éléments perspectifs indépendants, il existe un anneau régulier R, déterminé à un isomorphisme près, appelé anneau coordonné de R, dont le treillis des idéaux principaux à droite est isomorphe à L.

On définit un Baer*-demi-groupe coordonné, pour un treillis L orthocomplémenté faiblement modulaire, comme étant un Baer*-demi-groupe $(D, \{\Theta\})$ tel que le treillis $P'(D)$ soit isomorphe au treillis L dans un isomorphisme respectant l'orthocomplémentation.

Il a donc été démontré que <u>tout treillis</u> L <u>orthocomplémenté faiblement modulaire possède au moins un Baer*-demi-groupe coordonné qui est</u> $[D(L), \{\Theta\}]$.

EXEMPLE. - Soit L le treillis de Boole à 4 éléments $(0, 1, a, a')$, $P'[D(L)]$ constitué par :

$$\varepsilon_{\mathbb{1}} : 0 \to 0 , a \to a , a' \to a' , 1 \to 1$$

$$\Theta = \varepsilon_0 : 0 \to 0 , a \to 0 , a' \to 0 , 1 \to 0$$

$$\varepsilon_a : 0 \to 0 , a \to a , a' \to 0 , 1 \to a$$

$$\varepsilon_{a'} : 0 \to 0 , a \to 0 , a' \to a' , 1 \to a'$$

est isomorphe au treillis L .

Les autres éléments de D(L) sont :

$$\Psi_1 = \Psi_1^* : 0 \to 0 , a \to a' , a' \to a , 1 \to 1$$

$$\Psi_2 : 0 \to 0 , a \to 0 , a' \to a , 1 \to a$$

$$\Psi_2^* : 0 \to 0 , a \to a' , a' \to 0 , 1 \to a'$$

$$\Psi_3 : 0 \to 0 , a \to a , a' \to a , 1 \to a$$

$$\Psi_3^* : 0 \to 0 , a \to 1 , a' \to 0 , 1 \to 1$$

$$\Psi_4 : 0 \to 0 , a \to a' , a' \to a' , 1 \to a'$$

$$\Psi_4^* : 0 \to 0 , a \to 0 , a' \to 1 , 1 \to 1$$

$$\Psi_5 : 0 \to 0 , a \to 1 , a' \to a' , 1 \to 1$$

$$\Psi_5^* : 0 \to 0 , a \to a , a' \to 1 , 1 \to 1$$

$$\Psi_6 = \Psi_6^2 = \Psi_6^* : 0 \to 0 , a \to 1 , a' \to 1 , 1 \to 1$$

$$\Psi_7 = \Psi_7^* : 0 \to 0 , a \to 1 , a' \to a , 1 \to 1$$

$$\Psi_8 = \Psi_8^* : 0 \to 0 , a \to a' , a' \to 1 , 1 \to 1 .$$

L'application $1' \to \Theta$, $1 \to \varepsilon_1$, $e \to \varepsilon_a$; $f \to \varepsilon_{a'}$, $a \to \Psi_1$, $b \to \Psi_2$ et $c \to \Psi_2^*$ est un homomorphisme du demi-groupe D (exemple 1) dans le demi-groupe $D(L)$, et cet homomorphisme respecte les involutions des deux demi-groupes.

III. L'homomorphisme naturel de D dans $D[P'(D)]$.

Si D est un Baer*-demi-groupe, et $L = P'(D)$, il existe un homomorphisme naturel de D dans le Baer*-demi-groupe coordonné $D(L)$. Cet homomorphisme respecte les involutions. Pour le mettre en évidence, à chaque élément $x \in D$, on fait correspondre l'application $\Phi_x : L \to L$ définie par

$$e\Phi_x = (ex)'' \text{ quel que soit } e \in L \quad .$$

On vérifie aisément que $1'\Phi = 1'$, que $e\Phi_x \leq x''$ pour tout $x \in D$, et que, si h et $g \in L$ avec $h \leq g^x$, $h\Phi_g = h$.

Le théorème suivant montre que Φ_x est un hémimorphisme de L .

THÉORÈME 8. - <u>Soit</u> $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset L$; <u>si</u> $e = \bigvee_{\alpha\in I} \{e_\alpha\}$ <u>existe dans</u> L , <u>pour tout</u> $x \in D$, $\bigvee_{\alpha\in I} (e_\alpha \Phi_x)$ <u>existe dans</u> L , <u>et est égale à</u> $e\Phi_x$.

DÉMONSTRATION. - Soit K l'idéal focal de D . Pour tout $\alpha \in I$,

$$e_\alpha x(ex)' = e_\alpha ex(ex)' \in K$$

donc

$$(ex)' \leq (e_\alpha x)' \text{ et } e_\alpha \Phi_x \leq e\Phi_x \quad .$$

D'autre part, si $q \in L$ majore $e_\alpha \Phi_x$ pour tout $\alpha \in I$, alors $e_\alpha xq' \in K$, et $q'x^* e \in K$, donc $e_\alpha \leq (q'x^*)'$. Il suit que

$$e \leq (q'x^*)'$$

d'où

$$q'x^* e \in K \text{ et } exq' \in K \quad .$$

Donc

$$q' \leq (ex)'$$

et par conséquent

$$e\Phi_x \leq q$$

THÉORÈME 9. – L'application de D dans $D(L)$ qui, à x, fait correspondre la fonction Φ_x, est un homomorphisme respectant l'involution. De plus, si $g \in L$, $\varepsilon_g = \Phi_g$.

DÉMONSTRATION. – Il est immédiat que pour tout a et tout $y \in D$, l'égalité

(1) $$(ay)'' = (a''y)''$$

est vérifiée.

Si l'on pose $a = ex$, $e \in L$, $x \in D$, on a donc

$$e\Phi_{xy} = e\Phi_x \Phi_y$$

d'où

$$\Phi_{xy} = \Phi_x \Phi_y \quad .$$

Si l'on pose $(ex)' = a$ et $x^* = y$, l'égalité (1) devient

$$(e\Phi_x)' \, \Phi_{x^*} = [(ex)' \, x^*]'' \quad .$$

De $(ex)(ex)' \in K$, c'est-à-dire $(ex)' x^* e \in K$ suit

$$((ex)' \, x^*)'' \leq e' \quad .$$

Par conséquent Φ_x^* existe, donc $\Phi_x \in D(L)$ et $\Phi_x^* = \Phi_{x^*}$.

Si e et $g \in L$, de $(eg)'' \leq g'' = g$ suit $e\Phi_g \varepsilon_g = e\Phi_g$. Donc

$$\Phi_g \varepsilon_g = \Phi_g = \varepsilon_g \Phi_g \quad .$$

De $e\varepsilon_g \leq g$ suit $e\varepsilon_g \Phi_g = e\varepsilon_g$, donc $\varepsilon_g \Phi_g = \varepsilon_g$. Par conséquent

$$\varepsilon_g = \Phi_g \quad .$$

La restriction de l'homomorphisme du théorème précédent au sous-ensemble L de D est un isomorphisme du treillis L sur le treillis des projections $\{\Theta\}$-closes de $D(L)$. En conséquence, si e et $f \in P'(D)$, e et f commutent dans D, si et seulement si ε_e et ε_f commutent dans $D(L)$.

Par suite si L est un treillis orthocomplémenté faiblement modulaire, et si deux éléments de L commutent dans un Baer*-demi-groupe de L, ils commutent dans tous les autres Baer*-demi-groupes de L.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIRKHOFF (G.). - Lattice theory. - New York, American mathematical Society, 1948 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 25).

[2] FOULIS (D. J.). - Baer*-semi-groups, Proc. Amer. math. Soc., t. 11, 1960, p. 648-654.

[3] HALMOS (P. R.). - Algebraic logic, I : Monadic Boolean algebras, Compositio Math., t. 12, 1955, p. 217-249.

[4] KAPLANSKY (I.). - Rings of operators. - Chicago, University of Chicago, 1955.

[5] LOOMIS (L. H.). - The lattice theoretic background of the dimension theory of operator algebras. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Memoirs Amer. math. Soc., 18).

[6] von NEUMANN (J.). - Continuous geometry, Parts I, II, III. - Princeton, Princeton University, 1937 (Planographed notes).