

# SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MARIE-PAULE BRAMERET

## Sur les Baer-demi-groupes

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 14, n° 1 (1960-1961), exp. n° 14,  
p. 1-12

[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1960-1961\\_\\_14\\_1\\_A13\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_1_A13_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LES BAER\*-DEMI-GROUPES

par Mlle Marie-Paule BRAMERET

Dans [4], KAPLANSKY introduit une classe d'anneaux avec involution, les Baer\*-anneaux. Prenant comme point de départ le demi-groupe multiplicatif d'un Baer\*-anneau, FOULIS détermine, en posant certains axiomes, un Baer\*-demi-groupe [1]. Il établit une correspondance entre ces demi-groupes et les treillis orthocomplémentés, faiblement modulaires, utilisés par LOOMIS [5].

I. Baer\*-demi-groupe.

Une involution dans un demi-groupe (multiplicatif)  $D$  est une application  $x \rightarrow x^*$  telle que  $(x^*)^* = x^{**} = x$  et  $(xy)^* = y^* x^*$  quels que soient  $x$  et  $y$  dans  $D$ ; il suit de  $x^{**} = x$  que l'application  $*$  est bijective.

Un élément  $e \in D$  est une projection si  $e = e^2 = e^*$ .

Soit  $K$  un idéal bilatère non vide du demi-groupe  $D$ ;  $K$  est appelé idéal focal si, pour chaque élément  $x \in D$ , le quotient à droite  $K \cdot x = \{y, y \in S, xy \in K\}$  est un idéal principal à droite engendré par une projection.

Un Baer\*-demi-groupe est le couple  $(D, K)$  formé par un demi-groupe avec involution  $D$  et un idéal focal  $K$  de  $D$ . Lorsqu'aucune confusion ne peut en résulter, on désignera par  $D$  le Baer\*-demi-groupe  $(D, K)$ .

Notons  $P = P(D)$  l'ensemble, supposé non vide, de toutes les projections de  $D$ . Cet ensemble est partiellement ordonné par la relation :

$$e, f \in P, e \leq f \iff ef = e \text{ (équivalent à } fe = e) \quad .$$

Si un idéal principal à droite  $I$  de  $D$ , est engendré par une projection  $e$ , il est évident que la projection  $e$  est uniquement déterminée par l'idéal  $I$ . Par conséquent, chaque élément  $x \in D$  détermine une projection unique  $x'$  telle que  $K \cdot x = x'D$ . L'application  $\prime : D \rightarrow P$  est appelée application focale.

L'idéal focal  $K$  possède la propriété suivante : les relations  $a \in D$  et  $aa^* \in K$  entraînent  $a \in K$  (en effet, si  $aa^* \in K$ , alors  $a^* = a!a^*$  et  $a = aa! \in K$ ). Par conséquent  $K = K^*$ , car de  $a \in K$  suit  $a^* a = a^*(a^*)^* \in K$  et  $a^* \in K$ .

On vérifie aisément que l'application focale possède les propriétés suivantes :

(1) Quel que soit  $a \in D$ ,  $a = aa''$  ; en particulier pour tout élément  
 $e \in P$ ,  $e \leq e''$ .

(2) Si les éléments  $a, b \in D$  vérifient l'égalité  $ab = a$ , alors  $b' \leq a'$ ,  
en particulier si  $e, f \in P$ ,  $e \leq f$  entraîne  $f' \leq e'$ .

(3) Quel que soit  $a \in D$ ,  $a' = a'''$ .

On utilisera souvent, dans la suite, le fait que si un élément  $a \in D$  commute  
avec une projection  $e \in P$ ,  $a$  commute aussi avec  $e'$ . En effet si  $ae = ea$ ,  
alors  $ea e' = a e e' \in K$ , donc  $ae' = e' a e'$ . De  $ae = ea$  suit  $a^* e = e a^*$ , d'où  
 $a^* e' = e' a^* e'$  et  $e' a = e' a e'$ . Par conséquent  $ae' = e' a$ .

Une projection  $e \in P$  est dite K-close, si  $e = e''$ . Notons  $P' = P'(D)$  l'en-  
semble de toutes les projections K-closes de  $D$ .  $P'$  est l'image de  $D$  dans  
l'application focale ; si  $f \in P$ ,  $f''$  est la plus petite projection K-close  
contenant  $f$ .

THÉORÈME 1. - La condition nécessaire et suffisante pour que  $P'$  soit contenu  
dans le centre de  $D$  est que l'idéal  $K$  soit semi-premier.

DÉMONSTRATION. - La condition est nécessaire. Soit  $y^{p+1} \in K$ ,  $p$  entier  $\geq 1$ .  
Donc  $y' y^p = y^p \in y'' D$  et  $y'' y^p \in K$ . Puisque  $y'' \in P'$ ,  $y = y y'' = y'' y$  et  
 $y^p = y'' y^p \in K$ .

La condition est suffisante. Soit  $e \in P'$ . Pour tout  $x \in D$ ,  $(xe) e' = x(ee') \in K$   
donc  $(e'xe)^2 = e'$ ,  $(xee') xe \in K$  et  $e'xe \in K$ , c'est-à-dire  $exe = xe$ . On  
a aussi  $ex^* e = x^* e$  c'est-à-dire  $exe = ex$ , donc  $ex = xe$ .

Dans le théorème suivant, on montre que  $D$  possède un élément unité. Remarquons,  
pour cela, que si  $u$  est un élément unité à droite (ou à gauche) d'un demi-groupe  
avec involution, alors  $u = u^*$  est l'élément unité (bilatère) du demi-groupe.

THÉORÈME 2. - Si  $(D, K)$  est un Baer\*-demi-groupe, alors  $D$  possède un élé-  
ment unité  $1$ , et  $1$  est la plus grande projection de  $P'(D)$ . De plus,  $1'$  est  
la plus petite projection de  $P'$  ;  $1'$  appartient au centre de  $D$  et  $K = 1'D = D1'$ .  
Par conséquent si un demi-groupe avec involution possède un idéal focal, celui-ci  
est unique.

DÉMONSTRATION. - Soit  $k$  un élément de  $K$  ; pour tout élément  $e \in P$ ,  $ke \in K$ , et donc  $e = k'e = ek'$ .

Quel que soit  $a \in D$ ,  $a = aa''$  avec  $a'' \in P'$ , donc  $ak' = a$ . Il en résulte que  $k'$  est l'élément unité de  $D$ . On pose  $k' = 1$ . Le reste de la démonstration est évidente du fait que  $1' = 1.1' \in K$ .

Nous nous proposons d'étudier la question de l'existence de la borne inférieure dans  $P'$  de deux éléments  $e, f \in P'$ . Dans le cas particulier où  $e$  et  $f$  commutent, il est évident que  $\inf_{P'}\{e, f\}$  existe, et est égal à  $ef$ . Dans le cas général, de  $f'ee' \in K$  suit  $e' \leq (f'e)'$  donc  $e'$  et  $e = e''$  commutent avec  $(f'e)'$ . Par conséquent  $\inf_{P'}\{(f'e)', e\}$  existe et est égal à  $(f'e)'e$ . Puisque  $f'(f'e)'e = f'e(f'e)' \in K$ , on a  $(f'e)'e \leq f$ , et  $(f'e)'e$  est un mino- rant dans  $P'$  de  $\{e, f\}$ . Soit  $q \in P'$ , si  $q \leq e, f$ ,  $f'eq = f'q = f'fq \in K$ , c'est-à-dire  $q \leq (f'e)'$ . Par conséquent  $q \leq (f'e)'e$ . On a montré que  $\inf_{P'}\{e, f\}$  existe, et est égale à  $(f'e)'e$ .

Posons  $e \wedge f = (f'e)'e$ . Il est immédiat que si  $e, f \in P'$ , la projection  $(e' \wedge f) = [(fe)'e']'$  est la borne supérieure dans  $P'$  de  $e$  et  $f$ . On la désignera par  $e \vee f = (e' \wedge f)'$ .

En résumé,  $P'$  est un treillis avec élément maximum  $1$  et un élément minimum  $1'$ . L'application  $e \rightarrow e'$  de  $P'$  sur  $P'$  est une orthocomplémentation [6]. (En effet si  $e \in P'$ ,  $e \wedge e' = ee' = [(1')'e']'e' = 1' \wedge e' = 1'$  et  $e \vee e' = 1$ ). Dans [5], LOOMIS définit un treillis orthocomplémenté faiblement modulaire comme étant un treillis dans lequel l'inégalité  $e \leq f$  implique

$$f = e \vee (f \wedge e') \quad .$$

On remarque que le treillis  $P'$  est faiblement modulaire. En effet, pour  $e, f \in P'$  avec  $e \leq f$ , nous avons

$$f = [(fe)'e']' = [(fe)' \wedge e']' = (fe)'' \vee e \quad .$$

Puisque  $f$  commute avec  $e$ , il commute avec  $e'$ . Donc

$$fe' = f \wedge e' = (fc)''$$

d'où

$$f = (f \wedge e') \vee e \quad .$$

**THÉORÈME 3.** - Soit  $(D, K)$  un Baer\*-demi-groupe. L'ensemble  $P'$  des projections  $K$ -closes de  $D$  est un treillis orthocomplémenté faiblement modulaire, l'orthocomplémentation coïncidant avec la restriction dans  $P'$  de l'application focale.

Remarquons qu'un sous-ensemble (non vide) de  $P'$  possède une borne inférieure dans  $P$ , si et seulement s'il possède une borne inférieure dans  $P'$ , et que ces deux bornes inférieures, si elles existent, coïncident. Cette remarque n'est pas valable pour les bornes supérieures.

**THÉORÈME 4.** - Soit  $M$  un complexe de  $D$ . L'ensemble  $K \circ M = \{y, y \in D, my \in D\}$  est un idéal principal à droite engendré par une projection si et seulement si  $\{m', m \in M\}$  possède une borne inférieure dans  $P$ . De plus, si  $f = \inf_P \{m', m \in M\}$  alors  $f \in P'$  et  $K \circ M = fD$ .

**DÉMONSTRATION.** - Il est immédiat que  $K \circ M = fD$  entraîne  $f = \inf_P \{m', m \in M\}$  si  $f \in P$  est la borne inférieure de  $\{m', m \in M\}$ , alors  $f \in P'$ . On en déduit  $f \in K \circ M$  et  $fD \subseteq K \circ M$ .

Soit  $y \in K \circ M$ , c'est-à-dire  $my \in K$ , quel que soit  $m \in M$ . Donc  $y^* m^* \in K$  et  $m = m(y^*)'$ . Par suite  $(y^*)'' \leq m'$ , d'où  $(y^*)'' \leq f$ .

De  $y^* = y^*(y^*)$  résulte  $y^* f = y^*$  et  $y = fy \in fD$ . Par conséquent  $K \circ M = fS$ .

Si pour tout complexe  $M$  de  $D$ , l'ensemble  $K \circ M$  est un idéal principal à droite engendré par une projection l'idéal focal  $K$  sera dit complet.

Du théorème 4 suit immédiatement :

**THÉORÈME 5.** - Pour que le treillis  $P'$  soit complet, il faut et il suffit que l'idéal focal  $K$  soit complet.

**EXEMPLE.** - Soit  $D$  le demi-groupe  $\{1, 1', e, f, a, b, c\}$  dont la multiplication est donnée par la table.

	$1'$	$1$	$e$	$f$	$a$	$b$	$c$
$1'$	$1'$	$1'$	$1'$	$1'$	$1'$	$1'$	$1'$
$1$	$1'$	$1$	$e$	$f$	$a$	$b$	$c$
$e$	$1'$	$e$	$e$	$1'$	$c$	$1'$	$c$
$f$	$1'$	$f$	$1'$	$f$	$b$	$b$	$1'$
$a$	$1'$	$a$	$b$	$c$	$1$	$e$	$f$
$b$	$1'$	$b$	$b$	$1'$	$f$	$1'$	$f$
$c$	$1'$	$c$	$1'$	$c$	$e$	$f$	$f$

L'application  $1' \rightarrow 1'$ ,  $1 \rightarrow 1$ ,  $e \rightarrow e$ ,  $f \rightarrow f$ ,  $a \rightarrow a$ ,  $b \rightarrow c$  et  $c \rightarrow b$  est une involution.  $1'$  est élément zéro de  $D$ , et  $(1')$  est l'idéal focal de  $D$ .

$$P'(D) = P(D) = \{1', 1, e, f\} \quad .$$

Dans le paragraphe suivant, on montre qu'étant donné un treillis  $L$  orthocomplémenté faiblement modulaire  $L$ , on peut trouver un Baer\*-demi-groupe  $(D, K)$  dont le treillis des projections  $K$ -closes est isomorphe à  $L$ . Il s'ensuit donc qu'un treillis orthocomplémenté faiblement modulaire peut être défini comme étant le treillis des projections closes pour l'idéal focal d'un Baer\*-demi-groupe.

## II. Treillis orthocomplémenté faiblement modulaire.

Soit  $L$  un treillis avec élément maximum  $1$  et élément minimum  $0$  orthocomplémenté ( $e \rightarrow c'$ ) faiblement modulaire.

On notera  $M(L)$  le demi-groupe (par rapport à la composition des fonctions) des applications isotones de  $L$  dans  $L$ .

On appelle hemimorphisme [3] de  $L$ , une application  $\Phi : L \rightarrow L$  qui vérifie :

$$(e \vee f) \Phi = e\Phi \vee f\Phi \quad \text{quels que soient } e, f \in L$$

et

$$0\Phi = 0 \quad .$$

Etant donné un élément  $\phi \in M(L)$ , une fonction isotone  $\phi^*$  de  $L$  dans  $L$  est dite adjointe à  $\phi$  si les inégalités

$$(e'\Phi)'\Phi^* \leq e \text{ et } (e'\Phi^*)'\Phi \leq e$$

sont satisfaites par tout élément  $e \in L$ .

Il existe au plus une fonction adjointe à  $\Phi$ . S'il en existait deux, soient  $\Phi^*$  et  $\Phi^+$ , en posant  $f = e\Phi^*$ ,  $e \in L$ , on aurait  $f'\Phi \leq e'$ , donc  $e \leq (f'\Phi)'$  et  $e\Phi^+ \leq (f'\Phi)'\Phi^+ \leq f = e\Phi^*$ . De même  $e\Phi^* \leq e\Phi^+$  et  $e\Phi^* = e\Phi^+$ ; d'où  $\Phi^* = \Phi^+$ .

Notons  $D(L)$  l'ensemble des fonctions isotones de  $L$  dans  $L$  qui possèdent une fonction adjointe.

Il est évident que si  $\Phi \in D(L)$ ,  $\Phi^* \in D(L)$  et  $\Phi^{**} = \Phi$ .

THÉOREME 6. -  $D(L)$  est un demi-groupe (pour la composition des fonctions) avec involution  $\Phi \rightarrow \Phi^*$ ; il possède un élément zéro, et tous ses éléments sont des hémimorphismes du treillis  $L$ .

DÉMONSTRATION. - Soient  $\Phi, \Psi \in D(L)$ , et soit  $e \in L$ . Les inégalités

$$(e\Phi\Psi)'\Psi^*\Phi^* \leq (e\Phi)'\Phi^* \leq e'$$

$$(e\Psi^*\Phi^*)'\Phi\Psi \leq (e\Psi^*)'\Psi \leq e'$$

entraînent

$$(\Phi\Psi)^* = \Psi^*\Phi^* .$$

Soient  $e, f$  deux éléments arbitraires de  $L$ . Posons  $g = e \vee f$ . Si  $\Phi \in D(L)$ ,

$$e\Phi \leq g\Phi \text{ et } f\Phi \leq g\Phi .$$

Si l'élément  $h \in L$  majore  $e\Phi$  et  $f\Phi$ ,

$$h' \leq (e\Phi)' \text{ et } (f\Phi)'$$

d'où

$$h'\Phi^* \leq (e\Phi)'\Phi^* \text{ et } (f\Phi)'\Phi^* .$$

Il suit que  $h'\Phi^* \leq e'$ ,  $f'$ , c'est-à-dire  $e, f \leq (h'\Phi^*)'$ . Par conséquent  $g \leq (h'\Phi^*)'$ , d'où  $g\Phi \leq (h'\Phi^*)'\Phi \leq h$ . Ceci montre que

$$(e \vee f)\Phi = e\Phi \vee f\Phi .$$

Si  $e \in L$ , pour que  $e\Phi = 0$ , il faut et il suffit que  $e \leq (1\Phi^*)'$ . En effet,

si  $e\Phi = 0$ , alors

$$1\Phi^* = (e\Phi)' \quad \Phi^* \leq e'$$

d'où

$$e \leq (1\Phi^*)'$$

Inversement,

$$e \leq (1\Phi^*)' \text{ entraîne } e\Phi \leq (1\Phi^*)' \Phi \leq 1' = 0$$

donc

$$e\Phi = 0$$

En particulier,  $0\Phi = 0$  et  $\Phi$  est un hémimorphisme.

L'application constante  $\Theta : e \rightarrow 0$  est l'élément zéro de  $D(L)$ .

Soient  $\Phi, \Psi \in D(L)$ . Pour que  $\Phi\Psi = \Theta$ , il faut et il suffit que  $1\Phi \leq (1\Psi)'$ .  
En effet, si  $1\Phi \leq (1\Psi)'$ , quel que soit  $e \in L$ ,

$$e\Phi\Psi \leq 1\Phi\Psi = 0$$

donc

$$\Phi\Psi = \Theta$$

Inversement, si  $\Phi\Psi = 0$ , alors

$$(1\Phi)\Psi = 0 \text{ et } 1\Phi \leq (1\Psi)'$$

A chaque élément  $g \in L$ , on fait correspondre l'application  $\varepsilon_g \in M(L)$  définie par :

$$e\varepsilon_g = (e \vee g') \wedge g \text{ quel que soit } e \in L$$

Remarquons que si  $h, g \in L$ ,  $h \leq g$  entraîne  $h = h\varepsilon_g$ , car de  $h \leq g$  suit  $g' \leq h'$  et la faible modularité de  $L$  permet d'écrire

$$h' = (h' \wedge g) \vee g'$$

c'est-à-dire

$$h = (h \vee g') \wedge g = h\varepsilon_g$$

Il en résulte que  $\varepsilon_g = \varepsilon_g^2$ . De plus, pour  $e \in L$ ,



$$\begin{aligned}
 (e \varepsilon_g)' : \varepsilon_g &= [(e \vee g') \wedge g]' \quad \varepsilon_g = [(e' \wedge g) \vee g'] \quad \varepsilon_g = [(e' \wedge g) \vee g'] \wedge g \\
 &= [e' \wedge g] \varepsilon_g = e' \wedge g \leq e' \quad ;
 \end{aligned}$$

donc  $\varepsilon_g^*$  existe et est égale à  $\varepsilon_g$ .

Par conséquent  $\varepsilon_g$  est une projection du demi-groupe avec involution  $D(L)$ .

**THÉORÈME 7.** - Si  $L$  est un treillis orthocomplémenté faiblement modulaire,  $(D(L), \{\Theta\})$  est un Baer\*-demi-groupe, et la correspondance  $g \leftrightarrow \varepsilon_g$  entre  $L$  et  $P[D(L)]$  est un isomorphisme de treillis respectant l'orthocomplémentation.

**DÉMONSTRATION.** - Soit  $\Phi \in D(L)$ . Posons  $g = (1\Phi)'$ . D'où  $\Phi \varepsilon_g = \Theta$ . D'autre part, supposons que la fonction  $\Psi \in D(L)$  vérifie l'égalité  $\Phi \Psi = \Theta$ . Il s'ensuit que  $1\Psi^* \leq g$ ; donc, pour tout  $e \in L$ ,

$$e\Psi^* \leq g \quad \text{et} \quad e\Psi^* \varepsilon_g = e\Psi^* \quad ,$$

et par conséquent,

$$\Psi^* \varepsilon_g = \Psi^*$$

c'est-à-dire

$$\Psi = \varepsilon_g^* \Psi = \varepsilon_g \Psi \quad .$$

Donc,  $(\Theta) : \Phi$  est l'idéal principal à droite de  $D(L)$  engendré par la projection  $\varepsilon_g$  et  $(\Theta)$  est l'idéal focal de  $D(L)$ . Il est évident que, pour  $e, f \in L$ , l'inégalité  $e \leq f$  est vérifiée si et seulement si  $\varepsilon_e \varepsilon_f = \varepsilon_e$ , donc la correspondance  $g \leftrightarrow \varepsilon_g$  entre  $L$  et  $P[D(L)]$  est un isomorphisme de treillis. De plus  $(\varepsilon_g)' = \varepsilon_g$ , donc cet isomorphisme respecte l'orthocomplémentation.

Dans [6], von NEUMANN a montré que si  $L$  est un treillis modulaire complémenté possédant au moins 4 éléments perspectifs indépendants, il existe un anneau régulier  $R$ , déterminé à un isomorphisme près, appelé anneau coordonné de  $R$ , dont le treillis des idéaux principaux à droite est isomorphe à  $L$ .

On définit un Baer\*-demi-groupe coordonné, pour un treillis  $L$  orthocomplémenté faiblement modulaire, comme étant un Baer\*-demi-groupe  $(D, \{\Theta\})$  tel que le treillis  $P(D)$  soit isomorphe au treillis  $L$  dans un isomorphisme respectant l'orthocomplémentation.

Il a donc été démontré que tout treillis L orthocomplémenté faiblement modulaire possède au moins un Baer\*-demi-groupe coordonné qui est  $[D(L), \{\Theta\}]$ .

EXEMPLE. - Soit L le treillis de Boole à 4 éléments  $(0, 1, a, a')$ ,  $P^*[D(L)]$  constitué par :

$$\varepsilon_1 : 0 \rightarrow 0, a \rightarrow a, a' \rightarrow a', 1 \rightarrow 1$$

$$\Theta = \varepsilon_0 : 0 \rightarrow 0, a \rightarrow 0, a' \rightarrow 0, 1 \rightarrow 0$$

$$\varepsilon_a : 0 \rightarrow 0, a \rightarrow a, a' \rightarrow 0, 1 \rightarrow a$$

$$\varepsilon_{a'} : 0 \rightarrow 0, a \rightarrow 0, a' \rightarrow a', 1 \rightarrow a'$$

est isomorphe au treillis L.

Les autres éléments de  $D(L)$  sont :

$$\Psi_1 = \Psi_1^* : 0 \rightarrow 0, a \rightarrow a', a' \rightarrow a, 1 \rightarrow 1$$

$$\Psi_2 : 0 \rightarrow 0, a \rightarrow 0, a' \rightarrow a, 1 \rightarrow a$$

$$\Psi_2^* : 0 \rightarrow 0, a \rightarrow a', a' \rightarrow 0, 1 \rightarrow a'$$

$$\Psi_3 : 0 \rightarrow 0, a \rightarrow a, a' \rightarrow a, 1 \rightarrow a$$

$$\Psi_3^* : 0 \rightarrow 0, a \rightarrow 1, a' \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1$$

$$\Psi_4 : 0 \rightarrow 0, a \rightarrow a', a' \rightarrow a', 1 \rightarrow a'$$

$$\Psi_4^* : 0 \rightarrow 0, a \rightarrow 0, a' \rightarrow 1, 1 \rightarrow 1$$

$$\Psi_5 : 0 \rightarrow 0, a \rightarrow 1, a' \rightarrow a', 1 \rightarrow 1$$

$$\Psi_5^* : 0 \rightarrow 0, a \rightarrow a, a' \rightarrow 1, 1 \rightarrow 1$$

$$\Psi_6 = \Psi_6^2 = \Psi_6^* : 0 \rightarrow 0, a \rightarrow 1, a' \rightarrow 1, 1 \rightarrow 1$$

$$\Psi_7 = \Psi_7^* : 0 \rightarrow 0, a \rightarrow 1, a' \rightarrow a, 1 \rightarrow 1$$

$$\Psi_8 = \Psi_8^* : 0 \rightarrow 0, a \rightarrow a', a' \rightarrow 1, 1 \rightarrow 1$$

L'application  $1' \rightarrow \Theta$ ,  $1 \rightarrow \varepsilon_1$ ,  $e \rightarrow \varepsilon_a$ ;  $f \rightarrow \varepsilon_{a'}$ ,  $a \rightarrow \Psi_1$ ,  $b \rightarrow \Psi_2$  et  $c \rightarrow \Psi_2^*$  est un homomorphisme du demi-groupe  $D$  (exemple 1) dans le demi-groupe  $D(L)$ , et cet homomorphisme respecte les involutions des deux demi-groupe.

### III. L'homomorphisme naturel de $D$ dans $D[P'(D)]$ .

Si  $D$  est un Baer\*-demi-groupe, et  $L = P'(D)$ , il existe un homomorphisme naturel de  $D$  dans le Baer\*-demi-groupe coordonné  $D(L)$ . Cet homomorphisme respecte les involutions. Pour le mettre en évidence, à chaque élément  $x \in D$ , on fait correspondre l'application  $\Phi_x : L \rightarrow L$  définie par

$$e\Phi_x = (ex)'' \text{ quel que soit } e \in L .$$

On vérifie aisément que  $1'\Phi = 1'$ , que  $e\Phi_x \leq x''$  pour tout  $x \in D$ , et que, si  $h$  et  $g \in L$  avec  $h \leq g^x$ ,  $h\Phi_g = h$ .

Le théorème suivant montre que  $\Phi_x$  est un hémimorphisme de  $L$ .

**THÉOREME 8.** - Soit  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset L$ ; si  $e = \bigvee_{\alpha \in I} \{e_\alpha\}$  existe dans  $L$ , pour tout  $x \in D$ ,  $\bigvee_{\alpha \in I} (e_\alpha \Phi_x)$  existe dans  $L$ , et est égale à  $e\Phi_x$ .

**DÉMONSTRATION.** - Soit  $K$  l'idéal focal de  $D$ . Pour tout  $\alpha \in I$ ,

$$e_\alpha x(ex)' = e_\alpha ex(ex)' \in K$$

donc

$$(ex)' \leq (e_\alpha x)' \text{ et } e_\alpha \Phi_x \leq e\Phi_x .$$

D'autre part, si  $q \in L$  majore  $e_\alpha \Phi_x$  pour tout  $\alpha \in I$ , alors  $e_\alpha xq' \in K$ , et  $q'x^*e \in K$ , donc  $e_\alpha \leq (q'x^*)'$ . Il suit que

$$e \leq (q'x^*)'$$

d'où

$$q'x^*e \in K \text{ et } exq' \in K .$$

Donc

$$q' \leq (ex)'$$

et par conséquent

$$e\Phi_x \leq q$$

THÉORÈME 9. - L'application de D dans D(L) qui, à x, fait correspondre la fonction  $\Phi_x$ , est un homomorphisme respectant l'involution. De plus, si  $g \in L$ ,  $\varepsilon_g = \Phi_g$ .

DÉMONSTRATION. - Il est immédiat que pour tout a et tout  $y \in D$ , l'égalité

$$(1) \quad (ay)'' = (a''y)''$$

est vérifiée.

Si l'on pose  $a = ex$ ,  $e \in L$ ,  $x \in D$ , on a donc

$$e\Phi_{xy} = e\Phi_x \Phi_y$$

d'où

$$\Phi_{xy} = \Phi_x \Phi_y \quad .$$

Si l'on pose  $(ex)' = a$  et  $x^* = y$ , l'égalité (1) devient

$$(e\Phi_x)' \Phi_{x^*} = [(ex)' x^*]'' \quad .$$

De  $(ex)(ex)' \in K$ , c'est-à-dire  $(ex)' x^* e \in K$  suit

$$((ex)' x^*)'' \leq e' \quad .$$

Par conséquent  $\Phi_x^*$  existe, donc  $\Phi_x \in D(L)$  et  $\Phi_x^* = \Phi_{x^*}$ .

Si  $e$  et  $g \in L$ , de  $(eg)'' \leq g'' = g$  suit  $e\Phi_g \varepsilon_g = e\Phi_g$ . Donc

$$\Phi_g \varepsilon_g = \Phi_g = \varepsilon_g \Phi_g \quad .$$

De  $e\varepsilon_g \leq g$  suit  $e\varepsilon_g \Phi_g = e\varepsilon_g$ , donc  $\varepsilon_g \Phi_g = \varepsilon_g$ . Par conséquent

$$\varepsilon_g = \Phi_g \quad .$$

La restriction de l'homomorphisme du théorème précédent au sous-ensemble L de D est un isomorphisme du treillis L sur le treillis des projections  $\{\Theta\}$ -closes de D(L). En conséquence, si e et f  $\in P^*(D)$ , e et f commutent dans D, si et seulement si  $\varepsilon_e$  et  $\varepsilon_f$  commutent dans D(L).

Par suite si L est un treillis orthocomplémenté faiblement modulaire, et si deux éléments de L commutent dans un Baer\*-demi-groupe de L, ils commutent dans tous les autres Baer\*-demi-groupes de L.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BIRKHOFF (G.). - Lattice theory. - New York, American mathematical Society, 1948 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 25).
  - [2] FOULIS (D. J.). - Baer\*-semi-groups, Proc. Amer. math. Soc., t. 11, 1960, p. 648-654.
  - [3] HALLOS (P. R.). - Algebraic logic, I : Monadic Boolean algebras, Compositio Math., t. 12, 1955, p. 217-249.
  - [4] KAPLANSKY (I.). - Rings of operators. - Chicago, University of Chicago, 1955.
  - [5] LOOMIS (L. H.). - The lattice theoretic background of the dimension theory of operator algebras. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Memoirs Amer. math. Soc., 18).
  - [6] von NEUMANN (J.). - Continuous geometry, Parts I, II, III. - Princeton, Princeton University, 1937 (Planographed notes).
-