Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Julian Petresco

Problème des mots appartenant au sous-groupe d'un groupe libre

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, nº 1 (1960-1961), exp. nº 13, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_1_A12_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
14e année, 1960/61, n° 13

20 février 1961

PROBLÈME DES MOTS APPARTENANT AU SOUS-GROUPE D'UN GROUPE LIBRE

par Julian PETRESCO

Soient $G = [[A]]$ un groupe libre et H un sous-groupe de G.

On démontre [1] que H admet une <u>base libre progressive</u> X, c'est-à-dire que :

(1) $\quad H = [[X]]$; X est progressif $\iff [X](\lambda) \subseteq [X(\lambda)]$

ce qui équivaut à :

(2) $\quad \lambda(\prod x_i) \geqslant \lambda(x_i)$, pour tout mot irréductible $\prod x_i$ avec $x_i \in X \cup X^{-1}$.

Soit d'autre part $b \in G$ et

$$b = \bar{B} = \prod_t^{\nu} \alpha_t \ , \quad \alpha_t \in A \cup A^{-1}$$

sa représentation irréductible dans la base A.

On se propose de décrire un algorithme permettant de décider de la valabilité de

(3) $\qquad b \in H = [[X]]$ où X est progressif

(en connaissant par conséquent une base libre progressive de H).

Si l'on a (3), il existe un mot irréductible unique

$$\bar{R} = \prod_i^{n} r_i \ , \quad r_i \in X \cup X^{-1}$$

tel que $b = \bar{R}^{-1}$, ou encore

$$b\bar{R} = 1 \quad .$$

Soit

$$r_i = \bar{R}_i = \prod_j^{n_i} a_{ij} \ , \quad a_{ij} \in A \cup A^{-1}$$

la représentation irréductible de r_i dans la base A ; puisque $G = [[A]]$:

---

[1] PETRESCO (Julian). - Sur les groupes libres, Bull. Sc. math., t. 80, 1956, 1re partie, p. 6-32.
On trouvera dans ce même article les définitions qui ne sont pas données ici.

(4) $$\prod \alpha_t \cdot \prod_i \prod_j a_{ij} = 1 \quad \text{ou encore} \quad \bar{B}\bar{R}_1 \ldots \bar{R}_n = 1 \quad .$$

Si maintenant $\bar{B}$ et $\bar{R}_1$ sont deux mots de G irréductibles dans la base A, un segment S_0 de $\{B , R_1\}$, avec $\bar{S}_0 = 1$, est caractérisé par :

(5) $$S_0 = S_0(\alpha_t\, a_{1j}) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \nu - t + 1 = j \\ \alpha_{t+r}\, a_{1,j-r} = 1 \quad \text{pour tout} \quad 0 \leqslant r \leqslant \nu - t = j - 1 \end{cases} \quad .$$

Un couple (α_t , a_{1j}) de $\{B , R_1\}$, satisfaisant à (5), est dit <u>couple de réduction</u>, et on note ρ_1 l'ensemble des couples de réduction de $\{B , R_1\}$. On appelle <u>réduite</u> B_1 de $\{B , R_1\}$, la suite obtenue de celle-ci en éliminant les couples de ρ_1. Il existe un segment $S_0(\alpha_t\, a_{1j})$ de $\{B , R_1\}$ <u>maximum</u>, satisfaisant à (5), et on dira dans ce cas que $(\alpha_t\, a_{1j})$ est le couple de réduction maximum ; on peut obtenir B_1 en éliminant de $\{B , R_1\}$ les éléments du segment maximum $S_0(\alpha_t\, a_{1j})$; B_1 est donc un mot de G irréductible dans la base A et $\bar{B}_1 = \bar{B}\bar{R}_1$.

Considérons alors une suite finie ou infinie de mots de G

(6) $$\bar{B} , \bar{R}_1 , \ldots , \bar{R}_i , \ldots \quad \text{avec} \quad \bar{R}_{i-1}\, \bar{R}_i \neq 1$$

irréductibles dans la base A.

On appelle <u>réduction</u> de $\{B , R_1 , \ldots , R_i , \ldots\}$, les deux suites :

$\{\rho_i\}$, d'ensembles de couples

$\{B_i\}$, de sous-suites

construites, par récurrence, comme suit :

(a') ρ_1 est l'ensemble des couples de réduction de $\{B , R_1\}$

(b') B_1 est la réduite de $\{B , R_1\}$

(a) ρ_i est l'ensemble des couples de réduction de $\{B_{i-1} , R_i\}$

(b) B_i est la réduite de $\{B_{i-1} , R_i\}$.

Un couple de $\rho_1 \cup \ldots \cup \rho_i \cup \ldots$ est dit <u>couple de réduction</u> de $\{B , R_1 , \ldots , R_i , \ldots\}$. D'après la construction, deux couples de réduction sont disjoints ; il s'ensuit que les ρ_i sont deux à deux disjoints. B_i sera dit par ailleurs <u>i-réduite</u> de $\{B , R_1 , \ldots , R_i , \ldots\}$.

Si (α , a) est un couple de réduction, on a nécessairement $(\alpha , a) \in \rho_i$ pour un certain i , de sorte que

$$\alpha , a \in \{B_{i-1} , R_i\} \subseteq \{B , R_1 , \dots , R_i\}$$

et par conséquent :

$$(7) \qquad (\alpha , a) \in \rho_1 \cup \dots \cup \rho_i \iff \alpha , a \in \{B , R_1 , \dots , R_i\} \quad .$$

On note $S(\alpha , a)$ le segment de $\{B , R_1 , \dots , R_i , \dots\}$ d'extrémités α et a : deux couples (α , a) et (α' , a') sont <u>concordants</u> si $S(\alpha , a)$ et $S(\alpha' , a')$ sont concordants.

THÉORÈME 1. - <u>Les réduites</u> B_i <u>sont irréductibles et</u> :

$$\bar{B}_i = \bar{B}_{i-1} \bar{R}_i = \bar{B}\bar{R}_1 \dots \bar{R}_i \quad .$$

D'après (5), l'hypothèse que B_{i-1} est irréductible entraîne que B_i , la réduite de $\{B_{i-1} , R_i\}$, est irréductible, et de plus $\bar{B}_i = \bar{B}_{i-1} \bar{R}_i$. Si maintenant l'on suppose que $\bar{B}_{i-1} = \bar{B}\bar{R}_1 \dots \bar{R}_i$, il s'ensuit que

$$\bar{B}_i = \bar{B}_{i-1} \bar{R}_i = \bar{B}\bar{R}_1 \dots \bar{R}_{i-1} \bar{R}_i \quad .$$

THÉORÈME 2. - B_i <u>s'obtient de</u> $\{B , R_1 , \dots , R_i\}$ <u>en éliminant les couples</u> de $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_i$ (<u>autrement dit, d'après</u> (7), <u>les couples de réduction</u> (α , a) avec $\alpha , a \in \{B , R_1 , \dots , R_i\}$).

En supposant que B_{i-1} s'obtient de $\{B , R_1 , \dots , R_{i-1}\}$ en éliminant les couples de $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_{i-1}$, B_i s'obtient de $\{B_{i-1} , R_i\}$ en éliminant les couples de ρ_i , donc de $\{B , R_1 , \dots , R_{i-1} , R_i\}$ en éliminant les couples de $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_{i-1} \cup \rho_i$.

THÉORÈME 3. - <u>Deux couples de réduction sont concordants.</u>

Considérons

$$(\alpha , a) \in \rho_i , \quad (\alpha' , a') \in \rho_k \quad .$$

Si $i = k$, (α , a) et (α' , a') sont concordants d'après (5).

Si $i < k$ et si (α , a) et (α' , a') ne sont pas concordants, on a par exemple

$$\alpha' \in S(\alpha , a) \subseteq \{B , R_1 , \dots , R_{i-1} , R_i\}$$

mais alors d'après le théorème 2 :

$$\alpha' \in S_0(\alpha , a) \subseteq \{B_{i-1} , R_i\}$$

puisque (α' , a') est disjoint des couples de $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_{i-1}$. Il existerait donc, d'après (5), un couple $(\alpha' , a'_0) \in \rho_i$, ce qui est contradictoire.

THÉORÈME 4. - <u>Si</u> $(\alpha , a) \in \rho_i$, <u>tout élément de</u> $S(\alpha , a)$ <u>est dans un couple de</u> $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_i$.

Soit

$$\alpha' \in S(\alpha , a) \subseteq \{B , R_1 , \dots , R_{i-1} , R_i\} \quad .$$

Si $\alpha' \in \{B_{i-1} , R_i\}$, α' est dans un couple de ρ_i , d'après (5).

Si $\alpha' \in \{B , R_1 , \dots , R_{i-1}\}$, mais $\alpha' \notin B_{i-1}$, α' est dans un couple de $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_{i-1}$, d'après le théorème 2.

THÉORÈME 5. - <u>Si</u> (α , a) <u>est un couple de réduction, on a l'identité</u> $\bar{S}(\alpha , a) = 1$.

Considérons en particulier une suite (7) finie de mots irréductibles de G

$$(7') \qquad \bar{B} , \bar{R}_1 , \dots , \bar{R}_n$$

avec

$$(4) \qquad \bar{B}\bar{R}_1 \dots \bar{R}_n = 1 \quad .$$

On notera ρ , l'ensemble des segments $S(\alpha , a)$ avec (α , a) couple de réduction de $\{B , R_1 , \dots , R_n\}$.

THÉORÈME 6. - ρ <u>est une segmentation concordante et unitaire de</u> $\{B , R_1 , \dots , R_n\}$. D'après (5) et le théorème 3, les segments de ρ sont unitaires, et deux à deux concordants.

On a d'autre part, d'après le théorème 1

$$1 = \bar{B}\bar{R}_1 \dots \bar{R}_{n-1} \bar{R}_n = \bar{B}_{n-1} \bar{R}_n$$

avec B_{n-1} irréductible, et puisque B_n est la réduite de $\{B_{n-1} , R_n\}$

$$B_n = \emptyset \quad .$$

Mais alors, d'après le théorème 2, tout élément de $\{B , R_1 , \dots , R_n\}$ appartient à un couple de $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_n$, c'est-à-dire à un couple de réduction de $\{B , R_1 , \dots , R_n\}$, et à un seul.

ρ est bien une segmentation concordante et unitaire, qu'on appelera <u>segmentation de réduction</u> de $\{B , R_1 , \dots , R_n\}$.

Considérons maintenant une suite de mots irréductibles (7) avec $\bar{R}_i = r_i \in X \cup X^{-1}$ où X est une base progressive de G . Soit a le centre à gauche de R_i , et supposons que a est dans un couple de réduction (α , a) .

THÉORÈME 7.

1. <u>Si</u> $n_i = 2m + 1$, $\alpha \in B$

2. <u>Si</u> $n_i = 2m$, <u>on a, soit</u> $\alpha \in B$, <u>soit</u> $\alpha \in R_k$ <u>où</u> R_k <u>est le dernier élément de</u> (7) <u>avec</u> $k < i$, $n_k \geqslant n_i$; <u>dans ce dernier cas, et si</u> $n_k = n_i$, α <u>est le centre à droite de</u> R_k .

1° On a $a = a_{i,m+1}$. Supposons que, contrairement à l'énoncé, $\alpha \in R_k$ donc $\alpha = a_{kh}$ avec, par exemple $i < k$. Deux cas également contradictoires à (2) peuvent se présenter :

a. $h \leqslant m$, $\lambda[\bar{S}(r_i\, r_{k-1})] = \lambda(a_{i1} \dots a_{im}\, a_{kh}^{-1} \dots a_{k1}^{-1}) \leqslant m + h \leqslant 2m < n_i = \lambda(r_i)$

b. $h \geqslant m+1$, $\lambda[\bar{S}(r_i\, r_k)] = \lambda(a_{i1} \dots a_{im}\, a_{k,h+1} \dots a_{k,n_k})$

$$\leqslant m + n_k - h \leqslant n_k - 1 < n_k = \lambda(r_k)$$

car d'après le théorème 5 :

$$\bar{S}(a_{i,m+1}\, a_{kh}) = \bar{S}(a , \alpha) = 1 \quad .$$

2° On a $a = a_{im}$. Supposons que $\alpha \in R_k$, donc $\alpha = a_{kh}$, et tout d'abord que $i < k$. Deux cas contradictoires à (2) peuvent se présenter :

a. $h \leqslant m$; $\lambda[\bar{S}(r_i\, r_{k-1})] = \lambda(a_{i1} \dots a_{i,m-1}\, a_{kh}^{-1} \dots a_{k1}^{-1})$

$$\leqslant m - 1 + h \leqslant 2m - 1 < n_i = \lambda(r_i)$$

b. $h \geqslant m + i$; $\lambda[\bar{S}(r_i\, r_k)] = \lambda(a_{i1} \dots a_{i,m-1}\, a_{k,h+1} \dots a_{k,n_k})$

$$\leqslant m - 1 + n_k - h \leqslant n_k - 2 < n_k = \lambda(r_k) \ .$$

Si maintenant $k < i$ on a nécessairement :

$$n_k - h + 1 = m \quad .$$

Les deux cas suivants sont en effet contradictoires à (2) :

a. $n_k - h + 1 < m$; $\lambda[\bar{S}(r_{k+1}\ r_i)] = \lambda(a^{-1}_{k,n_k} \cdots a^{-1}_{kh}\ a_{i,m+1} \cdots a_{i,2m})$

$$\leqslant n_k - h + 1 + m < 2m = n_i = \lambda(r_i)$$

b. $n_k - h + 1 > m$; $\lambda[\bar{S}(r_k\ r_i)] = \lambda(a_{k1} \cdots a_{k,h-1}\ a_{i,m+1} \cdots a_{i,2m})$

$$\leqslant h - 1 + m < n_k = \lambda(r_k) \ .$$

Il s'ensuit que si $n_k = n_i = 2m$, on a $h = m + 1$ de sorte que $\alpha = a_{k,m+1}$ est le centre à droite de R_k .

D'autre part, l'existence d'un R_j avec $k < j < i$ et $n_j \geqslant n_i$ est contradictoire à (2), car :

$$\lambda[\bar{S}(r_{k+1}\ r_{i-1})] = \lambda(a^{-1}_{k,n_k} \cdots a^{-1}_{k,h+1}\ a^{-1}_{kh}\ a^{-1}_{im}\ a^{-1}_{i,m-1} \cdots a^{-1}_{i1})$$

$$= n_{k-h} + m - 1 = 2m - 2 < \nu_i \leqslant \nu_j = \lambda(r_j)$$

puisque d'après (5) $a^{-1}_{kh}\ a^{-1}_{im} = \alpha^{-1}\ a^{-1} = 1$.

On voit d'autre part facilement en considérant B_i comme réduite de $\{B_{i-1}\ ,\ R_i\}$, et en utilisant (5) que :

THÉORÈME 8.

1° <u>Si</u> $n_i = 2m + 1$, <u>on a</u> :

$\lambda(B_{i-1}) > \lambda(B_i)$ <u>si</u> a <u>se trouve dans un couple de réduction de</u> $\{B_{i-1}\ ,\ R_i\}$

$\lambda(B_{i-1}) < \lambda(B_i)$ <u>si</u> a <u>ne se trouve pas dans un tel couple</u>.

2° <u>Si</u> $n_i = 2m$, <u>on a</u> :

$\lambda(B_{i-1}) > \lambda(B_i)$ <u>si</u> a <u>se trouve dans un couple de réduction de</u> $\{B_{i-1}\ ,\ R_i\}$ <u>qui n'est pas le maximum</u>

$\lambda(B_{i-1}) = \lambda(B_i)$ <u>si</u> a <u>se trouve dans le couple maximum</u>

$\lambda(B_{i-1}) < \lambda(B_i)$ <u>si</u> a <u>ne se trouve pas dans un tel couple</u>.

Soit maintenant X_0 un sous-ensemble <u>fini</u> de X .

THÉORÈME 9. - <u>Il n'existe pas de suite infinie</u> $\{B , R_1 , \dots , R_i , \dots\}$ <u>avec</u> :

(a) $$\bar{R}_i = r_i \in X_0 \cup X_0^{-1}$$

(b) <u>à partir d'un certain</u> i : $\lambda(B_{i-1}) = \lambda(B_i) \neq 0$.

Soit en effet

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$$

la suite finie des nombres $\lambda(x)$ avec $x \in X_0 \cup X_0^{-1}$, et supposons que $\{B , R_1 , \dots , R_i , \dots\}$ satisfait aux conditions (a), (b).

On a par conséquent, pour $i \geqslant k$:

$$\lambda(B_{k-1}) = \lambda(B_k) = \dots = \lambda(B_{i-1}) = \lambda(B_i) = \dots \quad .$$

D'après le théorème 8, on a pour tout $i \geqslant k$, $\lambda(R_i)$ paire.

Puisque $\{B , R_1 , \dots , R_i , \dots\}$ est <u>infinie</u>, il existe pour un certain λ_r $(1 \leqslant r \leqslant p)$ une infinité de R_i avec

$$i \geqslant k , \quad \lambda(\bar{R}_i) = \lambda_r = 2m \quad .$$

Puisque $\{\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_p\}$ est <u>fini</u>, on peut supposer que λ_r est maximum à satisfaire cette condition, et par conséquent que les R_i avec $\lambda(R_i) > \lambda_r$ sont en nombre fini.

Soit

(7") $$\{R_{i_1} , R_{i_2} , \dots , R_{i_s} , \dots\}$$

la sous-suite de $\{B , R_1 , \dots , R_i , \dots\}$, infinie, des R_i avec $i \geqslant k$ et $\lambda(\bar{R}_i) = \lambda_r$.

D'après le théorème 8, a , le centre à gauche de R_{i_s} se trouve dans un couple de réduction (α , a) de $\{B , R_1 , \dots , R_i , \dots\}$, et, puisque B est <u>finie</u>, on peut supposer que $\alpha \notin B$.

Puisqu'enfin les R_i avec $\lambda(\bar{R}_i) > \lambda_r$ sont en nombre <u>fini</u>, on peut supposer que $\lambda(\bar{R}_i) \leqslant \lambda_r$ pour tout $i \geqslant i_1$.

Mais alors, d'après le théorème 7, (α , a) est tel que :

a est le centre à gauche de R_{i_s}

α est le centre à droite de $R_{i_{s-1}}$

et puisque d'après le théorème 5, $\bar{S}(\alpha , a) = 1$, on a pour tout $s \geqslant 2$:

$$\bar{S}(a_{i_{s-1},m+1}\ a_{i_s,m}) = 1 \quad .$$

Puisque $X_0 \cup X_0^{-1}$ est fini, il existe $x \in X_0 \cup X_0^{-1}$ figurant une infinité de fois dans (7"), donc au moins deux fois, soit par exemple $\bar{R}_{i_1} = \bar{R}_{i_s} = r_{i_1} = r_{i_s} = x$, de sorte que :

$$S(r_{i_1}\ r_{i_{s-1}}) = a_{i_1,1} \cdots a_{i_1,m}\ a^{-1}_{i_j,m} \cdots a^{-1}_{i_s,1} = 1$$

car : $r_{i_1} = r_{i_s}$ entraîne $a_{i_1,j} = a_{i_s,j}$.

Dans les deux cas, on peut donc trouver R_i avec $\bar{R}_{i-1}\ \bar{R}_i = 1$, car X_0 est libre, ce qui contredit (7).

THÉORÈME 10. - <u>Si</u> $\bar{B}\bar{R}_1 \cdots \bar{R}_n = 1$, <u>on a</u> :

$$\lambda(B) \geqslant \lambda(B_1) \geqslant \cdots \geqslant \lambda(B_{i-1}) \geqslant \lambda(B_i) \geqslant \cdots \geqslant \lambda(B_{n-1}) \geqslant \lambda(B_n) = 0 \quad .$$

<u>Si de plus</u> $\lambda(R_i)$ <u>est impaire</u> : $\lambda(B_{i-1}) > \lambda(B_i)$.

D'après le théorème 6, tout élément de $\{B , R_1 , \ldots , R_n\}$ se trouve dans un couple de réduction, donc en particulier a , le centre à gauche de R_i . Mais alors, d'après le théorème 7, a se trouve dans un couple de réduction de $\{B_{i-1} , R_i\}$ donc d'après le théorème 8, $\lambda(B_{i-1}) \geqslant \lambda(B_i)$ et, si $\lambda(R_i)$ est impaire, $\lambda(B_{i-1}) > \lambda(B_i)$.

Soient maintenant $G = [[A]]$ avec A <u>fini</u>, $H = [[X]]$ avec X progressif et $\bar{B} = b \in G$ avec B irréductible ; soit d'autre part X_0 , le sous-ensemble des $x \in X$ avec $\lambda(x) \leqslant \lambda(B)$.

A étant fini, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de G de longueur $\leqslant \lambda(B)$, et par conséquent X_0 est <u>fini</u>.

Considérons alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites <u>finies</u> $\{B , R_1 , \ldots , R_n\}$ où les $\bar{R}_i = r_i \in X_0 \cup X_0^{-1}$ avec R_i irréductibles et $\bar{R}_{i-1}\ \bar{R}_i \neq 1$ satisfont aux relations

$$(8)\quad \begin{cases} \bar{B}\bar{R}_1 = \bar{B}_1 \text{ avec } \bar{B}_1 \neq 1 \text{ irréductible et } \lambda(B) \geqslant \lambda(B_1) \\ \bar{B}_1 \bar{R}_2 = \bar{B}_2 \text{ avec } \bar{B}_2 \neq 1 \text{ irréductible et } \lambda(B_1) \geqslant \lambda(B_2) \\ \dots \\ \bar{B}_{i-1} \bar{R}_i = \bar{B}_i \text{ avec } \bar{B}_i \neq 1 \text{ irréductible et } \lambda(B_{i-1}) \geqslant \lambda(B_i) \\ \dots \\ \bar{B}_{n-1} \bar{R}_n = \bar{B}_n \text{ avec } \bar{B}_n \text{ irréductible et } \lambda(B_{n-1}) \geqslant \lambda(B_n) \end{cases} .$$

Il est évident que :

$$(9)\qquad \{B , R_1 , \dots , R_n\} \in \mathcal{S} \implies \{B , R_1 , \dots , R_i\} \in \mathcal{S} , \quad 1 \leqslant i \leqslant n .$$

THÉORÈME 11. - $b \in H \iff \exists$ <u>suite</u> $\{B , R_1 , \dots , R_n\}$ <u>avec</u> $\bar{B}_n = 1$.

D'après (2), si $b \in H$ alors $b \in [X_0]$, et par conséquent il existe $\{B , R_1 , \dots , R_n\}$ avec $\bar{R}_i = r_i \in X_0 \cup X_0^{-1}$ irréductible satisfaisant à

$$\bar{B}\bar{R}_1 \dots \bar{R}_n = 1 .$$

On a alors pour les réduites B_i de $\{B , R_1 , \dots , R_n\}$, d'après le théorème 1 :

$$\bar{B}_{i-1} \bar{B}_i = \bar{B}_i \text{ avec } B_i \text{ irréductibles}$$

et d'après le théorème 10

$$\lambda(B_{i-1}) \geqslant \lambda(B_i)$$

c'est-à-dire que $\{B , R_1 , \dots , R_n\} \in \mathcal{S}$, et d'autre part d'après le théorème 2 :

$$\bar{B}_n = \bar{B}\bar{R}_1 \dots \bar{R}_n = 1 .$$

Réciproquement si $\{B , R_1 , \dots , R_n\} \in \mathcal{S}$, les B_i définies par (8) sont ses réduites, de sorte que, si $B_n = 1$, d'après le théorème 1

$$\bar{B}\bar{R}_1 \dots \bar{R}_n = \bar{B}_n = 1$$

donc

$$b = \bar{B} = (\bar{R}_1 \dots \bar{R}_n)^{-1} \in [X_0] \subseteq H .$$

THÉORÈME 12. - $\mathbb{S}$ <u>est fini.</u>

Puisque $\bar{R}_i = r_i \in X_0 \cup X_0^{-1}$ avec X_0 fini, il n'y a qu'un nombre fini de solutions en R_i de

$$\bar{B}_{i-1}\,\bar{R}_i = \bar{B}_i \quad \text{avec} \quad \lambda(B_{i-1}) \geqslant \lambda(B_i)$$

et par conséquent, pour chaque n, qu'un nombre fini de suites $\{B, R_1, \dots, R_n\} \in \mathbb{S}$.

Si donc $\mathbb{S}$ est <u>infini</u>, pour une infinité d'entiers n, il existe une suite $s_n = \{B, R_1, \dots, R_n\} \in \mathbb{S}$. En tenant compte de (9) on peut affirmer en définitive que :

Pour chaque entier n, il existe une suite $s_n = \{B, R_1, \dots, R_n\} \in \mathbb{S}$.

Puisque $\bar{R}_1$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs de $X_0 \cup X_0^{-1}$, il existe R_1^0 tel qu'une infinité de s_n soient de la forme

$$s_n = \{B, R_1^0, R_2, \dots, R_n\} \quad .$$

Plus généralement, s'il existe une infinité de s_n de la forme

$$s_n = \{B, R_1^0, \dots, R_{i-1}^0, R_i, \dots, R_n\}$$

il existe alors, puisque $\bar{R}_i$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, R_i^0 tel qu'une infinité de s_n soit de la forme

$$s_n = \{B, R_1^0, \dots, R_{i-1}^0, R_i^0, R_{i+1}, \dots, R_n\}$$

Considérons donc la suite infinie $\{B, R_1^0, \dots, R_i^0, \dots\}$ définie par : R_i^0 est tel qu'une infinité de s_n sont de la forme :

$$s_n = \{B, R_1^0, \dots, R_i^0, R_{i+1}, \dots, R_n\} \quad .$$

Quel que soit i, on a dans ce cas, pour un certain $n > i$

$$\{B, R_1^0, \dots, R_i^0, R_{i+1}, \dots, R_n\} \in \mathbb{S}$$

donc en définitive :

$$\bar{B}\bar{R}_1^0 = \bar{B}_1^0 \quad \text{avec} \quad B_1^0 \neq 1 \quad \text{irréductible et} \quad \lambda(B) \geqslant \lambda(B_1^0)$$

$$\bar{B}_1^0\, \bar{R}_2^0 = \bar{B}_2^0 \quad \text{avec} \quad B_2^0 \neq 1 \quad \text{irréductible et} \quad \lambda(B_1^0) \geqslant \lambda(B_2^0)$$

...

$$\bar{B}_{i-1}^0\, \bar{R}_i^0 = \bar{B}_i^0 \quad \text{avec} \quad B_i^0 \neq 1 \quad \text{irréductible et} \quad \lambda(B_{i-1}^0) \geqslant \lambda(B_i^0)$$

...

Puisque $\lambda(B)$ est fini, on a cependant, à partir d'un certain i, $\lambda(B_{i-1}^0) = \lambda(B_i^0) \neq 0$, ce qui est exclu d'après le théorème 9.

$\mathcal{S}$ est donc bien fini, et par conséquent, il existe un entier p tel que pour toute suite $\{B, R_1, \dots, R_n\} \in \mathcal{S}$, on ait $n \leqslant p$.

Considérons enfin l'algorithme <u>fini</u> suivant :

On détermine, par un nombre fini d'essais, les valeurs, en nombre fini, du couple (R_1, B_1) avec $\bar{R}_1 \in X_0 \cup X_0^{-1}$, satisfaisant à :

$$\bar{B}\bar{R}_1 = \bar{B}_1 \quad \text{avec} \quad B_1 \neq 1 \quad \text{irréductible et} \quad \lambda(B) \geqslant \lambda(B_1) \quad .$$

Pour chaque couple (R_1, B_1), on détermine les valeurs, en nombre fini, du couple (R_2, B_2) avec $\bar{R}_2 \in X_0 \cup X_0^{-1}$ et $\bar{R}_2 \neq \bar{R}_1$ satisfaisant à :

$$\bar{B}_1\, \bar{R}_2 = \bar{B}_2 \quad \text{avec} \quad B_2 \neq 1 \quad \text{irréductible et} \quad \lambda(B_1) \geqslant \lambda(B_2)$$

et ainsi de suite.

D'après le théorème 12, quel que soit le choix des couples (R_i, B_i), cet algorithme se termine, pour un certain $n \leqslant p$, soit parce que $B_n = 1$, soit parce qu'il n'existe pas de couple (R_n, B_n) avec $\bar{R}_n \in X_0 \cup X_0^{-1}$, $\bar{R}_n \neq \bar{R}_{n-1}^{-1}$ satisfaisant à :

$$\bar{B}_{n-1}\, \bar{R}_n = \bar{B}_n \; ; \; \bar{B}_n \neq 1 \quad \text{irréductible et} \quad \lambda(B_{n-1}) \geqslant \lambda(B_n) \quad .$$

Deux cas sont alors possibles :

1° Pour un certain choix des couples (R_i, B_i) et un certain $n \leqslant p$, il existe $\bar{R}_n \in X_0 \cup X_0^{-1}$ avec $\bar{R}_n \neq \bar{R}_{n-1}^{-1}$ tel que :

$$\bar{B}_{n-1}\, \bar{R}_n = \bar{B}_n = 1$$

auquel cas, il existe une suite $\{B , R_1 , \dots , R_n\} \in \mathcal{S}$ avec $\bar{B}_n = 1$, donc, d'après le théorème 8 : $\bar{B} \in H$.

2° Quel que soit le choix des couples (R_i , B_i) , il existe $n \leqslant p$ tel que, pour tout $\bar{R}_n \in X_0 \cup X_0^{-1}$ avec $\bar{R}_n \neq \bar{R}_{n-1}^{-1}$ on ait :

$$\bar{B}_{n-1} \bar{R}_n = \bar{B}_n \; ; \quad \lambda(B_{n-1}) < \lambda(B_n)$$

auquel cas, il n'existe pas de suite $\{B , R_1 , \dots , R_n\} \in \mathcal{S}$ avec $\bar{B}_n = 1$, donc d'après le théorème 8 : $\bar{B} \notin H$.