Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jean Guérindon

Sur une classe de modules gradués

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, nº 1 (1960-1961), exp. nº 12, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_1_A11_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
14e année, 1960/61, n° 12

13 février 1961

SUR UNE CLASSE DE MODULES GRADUÉS

par Jean GUÉRINDON

INTRODUCTION. - Il s'agira de modules gradués $E = E_0 \oplus \dots \oplus E_n \oplus \dots$ sur des anneaux gradués (noethériens) $A = A_0 \oplus \dots \oplus A_p \oplus \dots$ pour lesquels on désignera par a_n la longueur de E_n (sur A_0). Comme dans les cas usuels a_n est majoré par un polynôme en n, et comme chaque fois que l'on a $a_n \leqslant C\alpha^n$ (C, α constants) on a intérêt à considérer $F(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ qui permet d'ailleurs, dans le cas général, de représenter a_n par les valeurs d'une fonction $\varphi(z)$, (entière) pour z entier. Le cas intéressant est celui dans lequel $F(z)$ est rationnelle en z, et est alors de la forme $P(z)/(1 - z^{\alpha})^{\beta+1}$.

Le théorème 3 donne une généralisation du classique résultat sur les polynômes caractéristiques, et l'étude d'une borne pour le degré du polynôme $P(z)$ conduit à prendre pour A un anneau gradué associé à un anneau de rang fini (c'est-à-dire pour lequel tout idéal a un nombre borné de générateurs). Une extension de ces notions est obtenue au moyen de la "pseudo-longueur" qui généralise la notion de longueur. Un problème (non résolu) d'invariants est posé au début de l'exposé.

1. Énoncé d'un problème d'invariants.

Soit E un module de type fini sur A, $\mathbb{S}$ le spectre de A, ensemble des idéaux maximaux $\{P_\tau\}$ ($\tau \in T$) de A. Si on localise pour τ fixé on posera $A_{P_\tau} = A_\tau$, et on désignera par P'_τ l'idéal maximum de l'anneau local A_τ, enfin par E_τ le localisé E_{P_τ}. Soit alors, pour tout entier n ($n \geqslant 0$), a_n la dimension de l'espace vectoriel (sur $K_\tau = A_\tau/P'_\tau$)

$$E_\tau(n) = P'^{n}_\tau E_\tau / P'^{n+1}_\tau E_\tau \quad .$$

On posera

$$F^E_\tau(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \quad , \quad \text{avec} \quad |z| < 1 \quad .$$

On voit facilement que si A est un corps ou un anneau de valuation discrète, la donnée de $F^E_\tau(z)$ détermine E à un A-isomorphisme près (pour le 2e cas il suffit, par additivité, de le constater sur A_τ/P^{α}_τ). Il serait naturel de se demander dans quelle mesure le système S des fonctions holomorphes $F^E_\tau(z)$

constitue, dans un cas assez général, un système d'invariants du A-module E. On se bornera ici à étudier des relations entre le spectre $\mathbb{S}$ et le système S.

On sait que $\mathbb{S}$ est un espace topologique (non séparé), les fermés étant constitués par les ensembles d'idéaux P_τ qui contiennent un idéal fixé (éventuellement trivial) de A (topologie de Zariski).

Étudions alors l'application φ de $\mathbb{S}$ en S :

$$\varphi : P_\tau \to F_\tau^E(z)$$

en munissant S de la topologie de la convergence uniforme en tout disque $|z| \leqslant R \quad (0 < R < 1)$.

On voit de manière immédiate que φ est continue dans les cas suivants :

a. A est intègre, régulier et de dimension 1, et $E = A$.

b. A est principal (donc intègre par définition), et E est de type fini quelconque. On peut supposer E monogène. Si $E = A$, on applique ce qui précède. Si $E = A/I \quad (I \neq (0))$, on se ramène à une topologie discrète sur $\mathbb{S}$.

c. E est de longueur finie sur A.

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Si A est un anneau intègre de rang fini ρ, et E un module de type fini donné sur A, alors les fonctions de S sont uniformément majorées, en tout disque $|z| < R$, par une fonction holomorphe à coefficients entiers, $G(z)$, rationnelle en z.

La notion de rang est prise au sens de COHEN : A est de rang ρ si tout idéal possède un système d'au plus ρ générateurs (il est de rang $\rho + 1$, $\rho + 2$ aussi ; il y a un rang minimum).

Le théorème 1 résulte alors du fait que pour tout M_τ l'anneau A_{M_τ} est de rang fini ρ. Si k est le nombre de générateurs de E, a_n est majoré par $k\binom{n+\rho-1}{\rho-1}$ d'où le théorème.

En plus du problème d'invariants précédent la question se pose d'étudier dans quelles conditions générales l'application φ est continue, et quel est le comportement du foncteur $A \to S$.

2. Notion de pseudo-longueur.

Soit A un anneau noethérien q-adique, q étant un idéal quasi-maximal de A (c'est-à-dire A/q est artinien). Le A-module de longueur finie $q^n E/q^{n+1} E$ est engendré sur A/q par moins de $\binom{n+k-1}{k-1}$ générateurs si E a un système de k générateurs sur A. On a, en posant $\ell g(A/q) = L$

$$\ell g(q^n E/q^{n+1} E) \leqslant L\binom{n+k-1}{k-1} .$$

Alors $\sum_{n\geqslant 0} \ell g(q^n E/q^{n+1} E)\, z^n$ représente dans le disque $|z| < 1$ une fraction rationnelle

$$R(z) = \frac{\pi(z)}{(1-z)^d} .$$

Cela résulte soit des théorèmes sur les polynômes caractéristiques ou encore du théorème 3 (voir §3) appliqué au $\sum(q^n/q^{n+1})$ module $\sum_n (q^n E/q^{n+1} E)$.

On posera alors

$$R(z) = \frac{\psi_q(E)}{(1-z)^{d+1}} + \dots + \varphi_q(E) + \alpha_1(1-z) + \dots + \alpha_h(1-z)^h$$

avec $d \geqslant -1$ ($d = -1$ pour le module nul).

Lorsque E est de longueur finie $\lambda(E)$, on a $0 \leqslant \ell g(E/q^n E) \leqslant \lambda(E)$ pour tout n, et donc $0 \leqslant \varphi_q(E) \leqslant \lambda(E)$. Si on a $d \geqslant 0$, on a $\psi_q(E) = e$ multiplicité de E, puisque pour n grand, on a

$$\ell g(q^n E/q^{n+1} E) = \frac{e}{d!} n^d + \dots + a_0$$

et que

$$\sum_{n\geqslant 0} n^d z^n \sim \frac{d!}{(1-z)^{d+1}}$$

comme infiniment grand pour $z \to 1$ (avec $|z| < 1$).

THÉORÈME 2. - Si A et q sont donnés, on a l'égalité $\varphi_q(E) = \lambda(E)$ pour tout A-module E de longueur finie $\lambda(E)$, si et seulement si A est semi-local et q idéal de définition de A.

Si on a l'égalité pour tout module E de longueur finie, on a $\lambda \geqslant \ell g(E/q^n E)$

pour tout n, et donc il existe un entier n_0 tel que $q^{n_0} E = q^{n_0+1} E$, et l'on a, en prenant dans la série correspondante ici réduite à un polynôme,

$$\varphi_q(E) = \ell g(E/q^{n_0} E) \quad .$$

Or $\bigcap_{n \geq 0} q^n E$ est l'ensemble E' des $x \in E$ dont les annulateurs Ann x coupent chacun $1 + q$. E' est aussi l'ensemble des y de E tels que les diviseurs maximaux de q et de Ann y soient différents. On aura $\lambda = \varphi_q(E)$ si et seulement si $E' = 0$, donc si $q \subseteq \rho(A)$, radical de Jacobson de A. A est alors semi-local, car A/q est artinien, donc aussi $A/\rho(A)$, et on aura $q \supseteq [\rho(A)]^h$ pour un entier h : q est idéal de définition.

Pour voir la réciproque, il suffit de voir que, si on avait $q \not\subseteq M$, M étant un idéal maximal de A, le A-module $E = A/M$ serait tel que $\varphi_q(E) = 0$ et non 1. On posera alors la définition suivante :

DÉFINITION. - Si E est un A-module de type fini sur un anneau semi-local, on appellera longueur de E le nombre $\varphi_q(E)$, q étant le radical de Jacobson de E.

Par exemple si $E = A$, A étant un anneau de valuation discrète, on a $F(z) = 1 + z + z^2 + \ldots = \frac{1}{1 - z}$; on a $\varphi(E) = 0$.

Appelant "isotrope", un A-module de longueur nulle, et non réduit à zéro, on a la conjecture suivante :

CONJECTURE. - Pour tout anneau local A, de dimension 1, il existe un A-module isotrope.

Remarquons enfin qu'un anneau local, intègre et complet est le quotient d'un module isotrope. En effet A est un module de type fini sur un anneau A_0 de valuation discrète (d'après I. S. COHEN). On en déduit que A est un quotient d'une somme directe (finie) de copies de A_0.

Une inégalité. - Si L désigne la longueur de A/q (en tant que A-module) et k le nombre de générateurs de q, k' le nombre de générateurs de E sur A, alors le A/q module $q^n E/q^{n+1} E$ possède un système de $k'\binom{n+k-1}{k-1}$ générateurs. Il existe en effet $\binom{n+k-1}{k-1}$ monômes distincts de degré n formés avec k lettres indéterminées $X_1, \ldots, X_k$, d'où le résultat. On a donc

$$0 \leqslant a_n \leqslant k'L\binom{n+k-1}{k-1}\ ,\ \text{en posant}\ a_n = \ell g(q^n E/q^{n+1} E)\ .$$

On a alors

$$f = \sum a_n z^n = \frac{P(z)}{(1-z)^{d+1}}$$

avec

$$P(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_r z^r\ .$$

On obtient $\varphi_q(E)$ en posant $z = 1 - t$ en prenant le coefficient de t^{d+1} en $P(1-t)$ d'où :

$$(1)\qquad \varphi_q(E) = (-1)^{d+1}\left[b_{d+1} + \binom{d+2}{1} b_{d+2} + \cdots + \binom{d+r}{r-1} b_r\right]$$

et on a $\varphi_q(E) = 0$ si $d \geqslant r$. Comme

$$b_\ell = \frac{1}{\ell!}\left\{\frac{d\ell}{dz^\ell}[f(1-z)^{d+1}]\right\} \quad \text{pour} \quad z = 0$$

on a

$$(2)\qquad b_\ell = a_\ell - \binom{d+1}{1} a_{\ell-1} + \binom{d+1}{2} a_{\ell-2} + \cdots \quad \text{avec} \quad \ell \geqslant 0\ ,$$

le dernier terme étant d'ailleurs $(-1)^d \binom{d+1}{d+1} a_{\ell-d}$ si $\ell \geqslant d$. On a $b_{r+1} = b_{r+2} = \cdots = 0$ et on a

$$(3)\qquad (-1)^{d+1}\varphi_q(E) = \binom{d+1}{0}\left[\binom{d+1}{0} a_{d+1} - \binom{d+1}{1} a_d + \cdots\right] + \cdots$$

$$+ \binom{d+r}{r-1}\left[\binom{d+1}{0} a_r - \binom{d+1}{1} a_{r-1} + \cdots\right]\ .$$

On a donc

$$(4)\qquad |\varphi_q(E)| \leqslant Lk'\, e_{r,k}$$

avec

$$e_{r,k} = \binom{r+1}{0}\left[\binom{r+1}{0}\binom{r+k}{k-1} + \binom{r+1}{1}\binom{r+k-1}{k-1} + \ldots\right] + \ldots$$

$$+ \binom{2r}{r-1}\left[\binom{r+1}{0}\binom{r+k-1}{k-1} + \binom{r+1}{1}\binom{r+k-2}{k-1} + \ldots\right] .$$

Pour k fixé, $e_{r,k}$ est une fonction croissante de r, et pour r fixé, $e_{r,k}$ est un polynôme en k de degré $r+1$, de coefficient dominant $\frac{k^{r+1}}{(r+1)!}$.

3. Fonctions associées à certains modules gradués.

On peut traduire, (et généraliser) les notions de postulation de Hilbert au moyen du théorème suivant qui fait intervenir les dimensions de E_n dès le début. Le procédé de la suite exacte utilisé est en substance le même que celui donné par SERRE (FAC) (*).

THÉORÈME 3. - Soit $F = F_0 \oplus F_1 \oplus \ldots$ un B-module gradué de type fini, B étant noethérien, gradué : $B = B_0 \oplus B_1 \oplus \ldots$, l'anneau B_0 étant artinien et les générateurs de B sur B_0 étant de degrés respectifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho$. On a alors

$$\sum_{n \geq 0} \ell g_{A_0}(E_n)\, z^n = \frac{P(z)}{(1 - z^{\alpha_1}) \ldots (1 - z^{\alpha_\rho})} ,$$

$P(z)$ étant un polynôme à coefficients entiers.

On pose, pour tout B_0-module de type fini G, $\varphi(G) = \ell g_{B_0}(G)$, et on raisonne par récurrence sur ρ. La proposition est vraie pour $\rho = 0$, car, h désignant le degré maximum des générateurs de E sur A, on a $E = (E_0 \oplus \ldots \oplus E_h)\, B_0$. Alors B étant noethérien, on a $B = B_0[x_1, \ldots, x_\rho]$ avec $\deg x_i = \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \rho)$. Soit alors u l'endomorphisme (de modules gradués) résultant de la multiplication par x_ρ. On a la suite exacte de B-modules gradués :

$$0 \to N \to E \xrightarrow{u} E \to Q \to 0$$

d'où, pour chaque n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ la suite exacte de B_0-modules :

(*) SERRE (J.-P.). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of math., Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.

$$0 \to N_n \to E_n \xrightarrow{u_n} E_{n+\alpha_\rho} \to Q_{n+\alpha_\rho} \to 0$$

u_n étant la composante de degré n de u et

$$N_n = u_n^{-1}(0) \ , \ Q_{n+\alpha_\rho} = E_{n+\alpha_\rho}/u_n(E_n)$$

et $u_n(E_n) = E_n/N_n$. Si le théorème est vrai jusqu'à l'entier $\rho - 1$ $(\rho \geqslant 1)$ il s'applique à Q et N qui sont des $B_0[x_1 , \ldots , x_{\rho-1}]$-modules gradués. On a, pour tout n ;

$$(\varepsilon_n) \qquad \varphi(E_{n+\alpha_\rho}) - \varphi(E_n) = \varphi(Q_{n+\alpha_\rho}) - \varphi(N_n) \quad .$$

Si on multiplie les deux membres de (ε_n) par $z^{n+\alpha_\rho}$, et si on pose

$$F(z) = \sum_{n \geqslant 0} \varphi(E_n)\ z^n$$

on a

$$F(z) - [\varphi(E_0) + \ldots + z^{\alpha_{\rho-1}} \varphi(E_{\alpha_{\rho-1}})] - z^{\alpha_\rho} F(z) = \ldots$$

$$= - [\varphi(Q_0) + \ldots + z^{\alpha_{\rho-1}} \varphi(Q_{\alpha_{\rho-1}})] + \sum_{n \geqslant 0} z^n \varphi(Q_n) - \sum_{n \geqslant 0} z^n \varphi(N_n) \quad .$$

Comme, par hypothèse, les produits $(1 - z^{\alpha_1}) \ldots (1 - z^{\alpha_{\rho-1}}) \sum_{n \geqslant 0} \varphi(Q_n)\ z^n$ et $(1 - z^{\alpha_1}) \ldots (1 - z^{\alpha_{\rho-1}}) \sum_{n \geqslant 0} \varphi(N_n)\ z^n$ sont des polynômes en z , à coefficients entiers, on a la proposition pour l'entier ρ .

4. Modules et anneaux rationnels.

Les modules gradués utilisés dans la 3e partie peuvent se généraliser comme suit. Soit A un anneau noethérien gradué $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \ldots$, A_0 étant de rang fini (au sens donné dans ce qui précède), et soit $E = E_0 \oplus \ldots \oplus E_n \oplus \ldots$ un A-module gradué de type fini sur A . Si q est un idéal de A_0 , tel que A_0/q soit artinien, désignons par a_n le nombre entier $\varphi_q(E_n)$ et soit $F(z)$ la série $\sum_n a_n z^n$ $(|z| < 1)$.

DÉFINITION. - On dira que E est rationnel, relativement à q si F(z) est une fraction rationnelle.

Alors F(z) est de la forme $\frac{P(z)}{(1 - z^{\alpha})^{\beta+1}}$.

On dira que A est rationnel si on peut en plus prendre E = A .

EXEMPLES.

1° A_0 est artinien, E quelconque, q = (0) d'après le théorème 3.

2° $E_n = 0$ pour n grand.

3° $A = A_0 \oplus q \oplus q^2 \oplus \ldots \oplus q^h \oplus \ldots$. Alors E étant de type fini sur A , on a, pour n grand $(n \geqslant N)$: $E_{n+1} = qE_n$ suivant un résultat classique (démonstration du théorème d'Artin-Rees d'après CARTIER et J. P. SERRE). Donc, en posant

$$F_p(z) = \sum_{n \geqslant 0} \ell g(q^n E_p / q^{n+1} E_p)\, z^n \quad ,$$

on a, pour $p \geqslant N$

$$F_{p+1}(z) = \sum_{n \geqslant 0} \ell g(q^n E_{p+1} / q^{n+1} E_{p+1})\, z^n$$

et donc, pour $p \geqslant N$:

$$F_p(z) = \ell g(E_p / q E_p) + z F_{p+1}(z) \quad .$$

Or, pour un ℓ entier on a, avec $p \geqslant N'$:

$$\ell g(E_p / E_{p+1}) = \ell g(q^{p-\ell} E_\ell / q^{p-\ell+1} E_\ell$$

l'expression étant alors un polynôme en p , noté $\mu(p)$. On a

$$F_p(z) = \mu(p) + z F_{p+1}(z) \quad .$$

On a, $\Phi_p(z)$ étant une série entière en $(z - 1)$:

$$F_{p+1}(z) = \left[\frac{A_h^{(p)}}{(z-1)^h} + \ldots + \frac{A_1^{(p)}}{z-1}\right] + \varphi_q(E_{p+1}) + (z - 1)\, \Phi_p(z)$$

et h dépendant de p . On a

$$F_p(z) = \varphi_q(E_{p+1}) + \mu(p) + \left[\frac{zA_h^{(p)}}{(z-1)^h} + \dots + \frac{zA_1^{(p)}}{z-1}\right] + (z-1)\,\psi_p(z)$$

avec $\psi_p(z)$ série entière en $(z-1)$. Alors

$$\varphi_q(E_p) = \varphi_q(E_{p+1}) + \mu(p) + \nu(p) \quad ;$$

en désignant par $\nu(p)$ le résidu de $F_{p+1}(z)$ (ici c'est $A_1^{(p)}$). Or, en posant $H_0(z) = F_0(z)$, ... , $H_p(z) = zH_{p+1}(z)$ et $z = 1 + t$, on a $H_0(z) = \frac{B_\ell}{t^\ell} + \dots + \frac{B_1}{t} + \dots$, résidu $H_p(z) = B_1 - pB_2 + \frac{p(p+1)}{2} B_3 - \dots$ et donc ν_p est un polynôme en p. Finalement $\sum_p \varphi_q(E_p)\, z^p$ est rationnel en z.

Grandeurs géométriques - Dimension et multiplicité. - Lorsque la fonction génératrice utilisée dans ce qui précède est une fraction rationnelle, on a $F(z) = \frac{P(z)}{(1-z^\alpha)^\beta}$. On désignera par e la multiplicité (coefficient de $\frac{1}{(1-z)^\beta}$ dans le développement de Laurent de F au voisinage de $z = 1$). On appellera β la dimension (on la retrouve facilement dans les cas classiques) et α la polarité (qui vaut 1 dans le cas classique).

Lorsque l'on est dans le cas d'application du théorème 5, on a

$$\varphi_q(E_n) \leqslant \alpha_0 + \alpha_1\, n + \dots + \alpha_s\, n^s$$

pour $n \geqslant 0$ puisque k est déterminé. Soit $M(R)$ le maximum du module de la fonction $\sum_{n\geqslant 0} \varphi_q(E_n)\, z^n$ pour $|z| \leqslant R$ $(0 < R < 1)$. Il existera un entier $d \geqslant 0$ tel que $(1-R)^d M(R)$ soit borné pour $R \to 1$, $(1-R)^{d-1} M(R)$ ne l'étant pas. On appellera d dimension de E. Lorsque E est rationnel sur A (cas classique), on retrouve alors la dimension ordinaire. La multiplicité peut se définir comme le plus petit entier $e > 0$ tel que $\overline{\lim}\ (1-R)^d M(R) \leqslant e$ pour $R \to 1$. Lorsque $\alpha = 1$, β s'interprète facilement au moyen de la dimension (au sens des chaînes d'idéaux premiers).