Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

CHRISTER LECH

Un problème concernant les multiplicités d'anneaux locaux formant des couples plats

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 13, nº 2 (1959-1960), exp. nº 19, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1959-1960__13_2_A8_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
13e année, 1959/60, n° 19

UN PROBLÈME CONCERNANT LES MULTIPLICITÉS D'ANNEAUX LOCAUX FORMANT DES COUPLES PLATS

par Christer LECH

La substance de cet exposé se retrouve avec un peu plus de détails dans l'article [1] de l'auteur.

NOTATIONS et CONVENTIONS. - Tous les anneaux sont supposés commutatifs et à élément unité. Par un anneau local on entend un anneau local noethérien.

Les lettres L et e seront utilisées pour désigner des longueurs de suites de composition et des multiplicités. Ainsi, si A est un anneau et M un A-module, on écrit $L(M)$, ou plus précisément $L_A(M)$ pour la longueur de M comme A-module. Si q est un idéal primaire dans un anneau noethérien, on écrit $L(q)$ pour la longueur de q , c'est-à-dire pour $L_{A_p}(A_p/qA_p)$ où A est l'anneau noethérien en question, p l'idéal premier associé à q , et A_p l'anneau de fractions de A par rapport à p . Gardant ces notations on sait, d'après SAMUEL, que, pour n grand, $L(q^n A_p)$ est un polynôme de n dont le degré d est égal à la dimension de A_p , disons

$$L(q^n A_p) = a_0 n^d + a_1 n^{d-1} + \dots + a_d \quad (n \geq n_0) \quad .$$

On appelle le nombre $(d!)\, a_0$ la multiplicité de q que l'on désigne par $e(q)$. Si A est un anneau local d'idéal maximal m , on définit $e(A) = e(m)$.

Soient A un anneau et M un A-module unitaire. On dit d'après SERRE que M est A-plat (ou plat) si le foncteur suivant est exact :

$$E \Longrightarrow E \otimes_A M \quad ,$$

le foncteur étant défini sur la catégorie des A-modules et des A-homomorphismes.

Un couple (A_0 , A) d'anneaux locaux d'idéaux maximaux (m_0 , m) est dit plat (au sens de SERRE) si les conditions suivantes sont satisfaites :

1° $A_0 \subseteq A$;

2° A_0 et A ont un élément unité commun ;

3° A est A_0-plat ;

4° $m_0 \subseteq m$.

Dans cet exposé, on considérera principalement la situation plus spéciale où $\mathfrak{m}_0 A$ est un idéal $\mathfrak{m}$-primaire (et non seulement un idéal contenu dans $\mathfrak{m}$).

Quelques observations simples sur la platitude.

a. Un A-module projectif, donc en particulier un A-module libre, est A-plat.

b. Soit M un A-module plat et soient F et E deux A-modules tels que $F \subseteq E$. De la suite exacte

$$0 \to F \to E \to E/F \to 0$$

on obtient, en multipliant avec M, une suite exacte

$$0 \to F \otimes_A M \to E \otimes_A M \to (E/F) \otimes_A M \to 0 \quad ,$$

qui montre qu'on a un isomorphisme canonique

$$(E/F) \otimes_A M \cong E \otimes_A M / F \otimes_A M \quad .$$

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, on obtient d'une manière semblable un isomorphisme canonique

$$\mathfrak{a} \otimes_A M \cong \mathfrak{a} M \quad .$$

c. Soit (A_0 , A) un couple plat d'anneaux locaux avec $\mathfrak{m}_0 A$ primaire pour $\mathfrak{m}$, et soit M un A_0-module. Alors

$$L_A(A \otimes_{A_0} M) = L_{A_0}(M).L(\mathfrak{m}_0 A) \quad .$$

Démonstration par récurrence sur $L_{A_0}(M)$ en utilisant des suites exactes de type

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

pour $L_{A_0}(M) > 1$.

Cela entraîne que A_0 et A ont même dimension. En effet, on a

$$L(\mathfrak{m}_0^n A) = L(\mathfrak{m}_0^n).L(\mathfrak{m}_0 A)$$

(c'est-à-dire que les idéaux $\mathfrak{m}_0 A$ et $\mathfrak{m}_0$ ont même fonction de Hilbert à un facteur constant près).

PROBLÈME. - Soit (A_0 , A) un couple plat d'anneaux locaux d'idéaux maximaux $(\mathfrak{m}_0 , \mathfrak{m})$ et soit $\mathfrak{m}_0 A$ primaire pour $\mathfrak{m}$. Sous ces conditions, a-t-on toujours $e(A_0) \leq e(A)$?

(En réalité la question ne change pas si on supprime la condition "$\mathfrak{m}_0 A$ primaire pour $\mathfrak{m}$").

Une réponse affirmative impliquerait que

$$e(A_p) \leq e(A)$$

pour tout anneau local A et tout idéal premier p de A tel que $\dim p + \operatorname{codim} p = \dim A$. En effet, cette inégalité est vraie pour A complet d'après NAGATA. Dans le cas général, soit A^* le complété de A. On peut trouver dans A^* un idéal premier p^* tel que $p^* \cap A = p$ et que

$$\dim p^* + \operatorname{codim} p^* = \dim A^* \quad .$$

En utilisant le fait que (A , A^*) est plat on peut facilement démontrer que $(A_p , A^*_{p^*})$ l'est aussi. On aurait donc

$$e(A_p) \leq e(A^*_{p^*}) \leq e(A^*) = e(A) \quad .$$

L'inégalité $e(A_p) \leq e(A)$ serait une généralisation du résultat d'AUSLÄNDER-BUCHSBAUM-SERRE disant que, si A est un anneau local régulier, A_p l'est aussi pour tout idéal premier p de A. En effet, NAGATA a montré qu'un anneau local régulier équivaut à un anneau local de type Cohen-Macauly ayant la multiplicité 1. On sait bien que les propriétés de Cohen-Macauly se transfèrent de A à A_p, et il en serait de même avec la propriété "avoir la multiplicité 1" si on avait toujours $e(A_p) \leq e(A)$. (Les propriétés de Cohen-Macauly impliquent que $\dim p + \operatorname{codim} p = \dim A$ pour tout p).

Le problème concernant les couples plats (A_0 , A) se ramène facilement au cas où A_0 et A sont complets. Dans le cas où les corps de restes A_0/m_0 et A/m sont de caractéristique 0, on peut même supposer, en utilisant les théorèmes de structure de Cohen, que A est un A_0-module libre de type fini. Au premier abord, on n'a donc pas de phénomènes pathologiques à craindre. A ce point de vue, on semble être dans une situation plus avantageuse qu'en attaquant le problème concernant l'inégalité $e(A_p) \leq e(A)$, où le résultat est connu pour tous les "bons" anneaux A.

Le résultat d'AUSLÄNDER-BUCHSBAUM-SERRE a été obtenu un peu accidentellement par des méthodes homologiques, à savoir par une caractérisation des anneaux locaux réguliers commes les anneaux locaux de dimension homologique globale finie. Le problème présenté ici fournit une occasion d'éprouver l'utilité des méthodes homologiques dans une nouvelle question de même genre.

En tous cas, il me reste à rendre plausible que la réponse à ma question peut être affirmative. Or je peux démontrer qu'il en est ainsi sous des conditions particulières : d'une part quand l'anneau de restes $A/m_0 A$ est de l'un des types suivants,

$$K[X_1 , \dots , X_s]/(f_1 , \dots , f_s) , \qquad K[X_1 , \dots X_s]/(X_1 , \dots X_s)^m$$

où K est un corps et $X_1 , \dots , X_s$ des variables, d'autre part quand la dimension de A_0 et A est inférieure ou égale à deux. Le reste de cet exposé sera consacré à la démonstration de ce dernier résultat. On traitera séparément les dimensions 0 , 1 , et 2 . Les deux premiers cas sont triviaux. Le dernier est moins simple, pourtant on peut employer une méthode assez grossière.

<u>Les cas</u> $\dim A_0 = \dim A \leqslant 1$.

Soit (A_0 , A) un couple plat d'anneaux locaux tel que $\mathfrak{m}_0 A$ soit $\mathfrak{m}$-primaire.

a. Supposons que $\dim A_0 = \dim A = 0$. Alors

$$e(A_0) = L_{A_0}(A_0) \leqslant L_{A_0}(A_0) . L(\mathfrak{m}_0 A) = L_A(A_0 \otimes_{A_0} A) = L_A(A) = e(A) \quad .$$

b. Supposons que $\dim A_0 = \dim A = 1$. Posons $n = L(\mathfrak{m}_0 A)$. Soit k le plus petit entier tel que

$$\mathfrak{m}^k + \mathfrak{m}_0 A = \mathfrak{m}^{k+1} + \mathfrak{m}_0 A \quad .$$

Vu la définition de $L(\mathfrak{m}_0 A) = n$, on a $k \leqslant n$. De plus

$$\mathfrak{m}^k + \mathfrak{m}_0 A = \mathfrak{m}^{k+1} + \mathfrak{m}_0 A = \mathfrak{m}^{k+2} + \mathfrak{m}_0 A = \dots = \mathfrak{m}_0 A \quad .$$

donc

$$\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{m}^k \subseteq \mathfrak{m}_0 A \quad .$$

Ainsi

$$e(A_0) = e(\mathfrak{m}_0) = \frac{1}{n} e(\mathfrak{m}_0 A) \leqslant \frac{1}{n} e(\mathfrak{m}^n) = e(\mathfrak{m}) = e(A) \quad .$$

<u>Préparation pour le cas</u> $\dim A_0 = \dim A = 2$.

Introduisons les notations suivantes :

A anneau local de dimension quelconque ;

$\mathfrak{m} = (X_1 , \dots X_s)$ l'idéal maximal de A ;

$K = A/\mathfrak{m}$;

$K[X_1 , \dots , X_s] = K[X]$ anneau polynômial de s variables sur K ;

$\mathfrak{M}$ l'idéal $(X_1 , \dots , X_s)$ dans $K[X]$.

Appelons un idéal de $K[X]$ engendré par des produits de puissances de $X_1 , \dots , X_s$ un idéal multihomogène. Nous allons associer à tout idéal $\mathfrak{a}$ de A un idéal multihomogène $I(\mathfrak{a})$ de $K[X]$ de sorte que l'application $\mathfrak{a} \to I(\mathfrak{a})$ préserve des longueurs en un certain sens.

La définition de $I(\alpha)$ sera faite en plusieurs étapes. Premièrement, soit $\overline{\alpha}$ l'idéal de formes de α par rapport à $m = (x_1, \dots, x_s)$, c'est-à-dire le noyau du K-homomorphisme naturel

$$K[X] \to \sum_{\substack{\oplus \\ \nu=0,1,2,\dots}} (m^{\nu} + \alpha)/(m^{\nu+1} + \alpha) \quad ,$$

qui applique un produit de puissance de $X_1, \dots, X_s$ sur la classe du produit de puissances correspondant de $x_1, \dots, x_s$. On peut démontrer que l'application $\alpha \to \overline{\alpha}$ a les propriétés suivantes :

1° $\alpha \subseteq b \implies \overline{\alpha} \subseteq \overline{b}$;

2° $(m^{\nu} + \overline{\alpha})/(m^{\nu+1} + \overline{\alpha}) \cong (m^{\nu} + \alpha)/(m^{\nu+1} + \alpha)$ (K-isomorphisme) ;

3° $\overline{\alpha}.\overline{b} \subseteq \overline{\alpha . b}$.

Deuxièmement, on va associer à tout idéal homogène $\mathfrak{A}$ de $K[X]$ un idéal multihomogène $\psi(\mathfrak{A})$. On ordonne les produits de puissances de $K[X]$ lexicographiquement de sorte que $X_1^{\alpha_1} \dots X_s^{\alpha_s}$ soit plus haut que $X_1^{\beta_1} \dots X_s^{\beta_s}$ si le dernier nombre différent de zéro parmi les différences

$$\alpha_1 - \beta_1 , \ \alpha_2 - \beta_2 , \dots , \alpha_s - \beta_s$$

est positif. On définit, préliminairement, $\psi(\mathfrak{A})$ comme l'idéal multihomogène de $K[X]$ engendré par les plus hauts produits de puissances des formes de $\mathfrak{A}$. Il est facile d'établir pour cette application $\mathfrak{A} \to \psi(\mathfrak{A})$ des propriétés analogues aux trois propriétés mentionnées plus haut de l'application $\alpha \to \overline{\alpha}$.

Modifions maintenant l'application $\mathfrak{A} \to \psi(\mathfrak{A})$ en effectuant préalablement une transformation linéaire générale des variables. On obtient ainsi les deux propriétés suivantes pour tout idéal de la forme $\psi(\mathfrak{A})$:

a. $X_1^{\alpha_1} \dots X_s^{\alpha_s} \in \psi(\mathfrak{A}) \implies X_m^{\alpha_1+\dots+\alpha_m} X_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \dots X_s^{\alpha_s} \in \psi(\mathfrak{A})$ $(1 \leq m \leq s)$;

b. $\exists$ k $(0 \leq k \leq s+1)$ tel que, pour n assez grand,

$$(X_k , \dots , X_s)^n \subseteq \psi(\mathfrak{A}) \subseteq (X_k , \dots , X_s) \quad .$$

En particulier $\psi(\mathfrak{A})$ a un idéal premier minimal unique, à savoir $(X_k, \dots, X_s)$ (interprétation naturelle pour $k = 0$, $k = s + 1$).

La propriété (a) peut se voir en observant qu'une transformation linéaire générale peut être représentée en composant deux transformations linéaires dont l'une est générale et l'autre "indépendante" de la première. La propriété (b) se déduit facilement de la propriété (a).

On définit maintenant $I(\mathfrak{a}) = \psi(\overline{\mathfrak{a}})$ (où ψ désigne la transformation modifiée). Alors

1° $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \Longrightarrow I(\mathfrak{a}) \subseteq I(\mathfrak{b})$;

2° $(\mathfrak{M}^{\nu} + I(\mathfrak{a}))/(\mathfrak{M}^{\nu+1} + I(\mathfrak{a})) \cong (\mathfrak{m}^{\nu} + \mathfrak{a})/(\mathfrak{m}^{\nu+1} + \mathfrak{a})$ (K-isomorphisme) ;

3° $I(\mathfrak{a})\, I(\mathfrak{b}) \subseteq I(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$,

et tout idéal de la forme $I(\mathfrak{a})$ est de la forme $\psi(\mathfrak{A})$, donc a les propriétés (a) et (b) ci-dessus.

De la propriété 2° on tire, en sommant de $\nu = 0$ à $\nu = n - 1$:

$$L(\mathfrak{M}^n + I(\mathfrak{a})) = L(\mathfrak{m}^n + \mathfrak{a})$$

(les fonctions de Hilbert de $\mathfrak{M}/I(\mathfrak{a})$ et $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ sont identiques). Il en résulte :

$$\operatorname{codim}\, (\mathfrak{M}/I(\mathfrak{a})) = \operatorname{codim}\, (\mathfrak{m}/\mathfrak{a}) \quad ,$$

$$e(\mathfrak{M}/I(\mathfrak{a})) = e(\mathfrak{m}/\mathfrak{a}) \quad .$$

Le cas $\dim A_0 = \dim A = 2$.

Soit (A_0 , A) un couple plat d'anneaux locaux tel que $\mathfrak{m}_0 A$ soit $\mathfrak{m}$-primaire et que $\dim A_0 = \dim A = 2$. Posons $K_0 = A_0/\mathfrak{m}_0$, $K = A/\mathfrak{m}$. Employons par rapport à l'anneau actuel A l'application $\mathfrak{a} \to I(\mathfrak{a})$ qui vient d'être définie. L'idéal $I(0)$ a un idéal premier minimal unique de la forme $(X_k , \ldots , X_s)$. Or, de la relation

$$\operatorname{codim}\, (\mathfrak{M}/I(0)) = \operatorname{codim}\, \mathfrak{m} = 2 \quad ,$$

on tire facilement $k = 3$. Soit $I^*(0)$ le composant primaire de $I(0)$ associé à l'idéal premier $(X_3 , \ldots , X_s)$. Alors $I^*(0)$ peut être engendré par des produits de puissances de $X_3 , \ldots , X_s$, et $L(I^*(0))$ est égal au nombre de tels produits de puissances qui ne sont pas contenus dans $I^*(0)$. On a, de plus, en utilisant une "formule d'additivité" de NAGATA,

$$e(A) = e(\mathfrak{m}/(0)) = e(\mathfrak{M}/I(0)) = e(\mathfrak{M}/(X_3 , \ldots , X_s)).L(I^*(0)) = L(I^*(0)) \quad .$$

Soit b le plus petit entier tel que

$$X_2^b \in I(\mathfrak{m}_0 A) \quad .$$

Alors $b \geqslant 1$, et on a

$$X_1^{\nu} X_2^{b-\nu-1} \notin I(\mathfrak{m}_0 A) \qquad (\nu = 0 , 1 , \ldots b - 1) \quad ,$$

parce qu'autrement on aurait $X_2^{b-1} \in I(\mathfrak{m}_0 A)$ d'après la propriété (a) des idéaux de la forme $\psi(\mathfrak{A})$. Il en résulte :

$$L((\mathfrak{m}^{b-1} + \mathfrak{m}_0 A)/(\mathfrak{m}^b + \mathfrak{m}_0 A)) = L(\mathfrak{M}^{b-1} + I(\mathfrak{m}_0 A)/\mathfrak{M}^b + I(\mathfrak{m}_0 A)) \geqslant b \quad .$$

Posons

$$q_1 = \mathfrak{m}^{b-1} + \mathfrak{m}_0 A \ , \qquad q_2 = \mathfrak{m}^b + \mathfrak{m}_0 A \quad .$$

Ainsi

$$A \supseteq q_1 \supset q_2 \supseteq \mathfrak{m}_0 A \quad ,$$

et

$$L(q_1/q_2) \geqslant b \quad .$$

Nous allons estimer de deux manières différentes le nombre $L(\mathfrak{m}_0^n q_1/\mathfrak{m}_0^n q_2)$ pour n grand. En effet, nous obtiendrons une estimation supérieure proportionnelle à $e(A)$ et une estimation inférieure proportionnelle à $e(A_0)$. Une comparaison entre les deux nous donnera l'inégalité cherchée.

A. Estimation supérieure.

On a

$$L(\mathfrak{m}_0^n q_1/\mathfrak{m}_0^n q_2) = L(I(\mathfrak{m}_0^n q_2)) - L(I(\mathfrak{m}_0^n q_1)) \quad ,$$

et cette dernière différence est égale au nombre de produits de puissances de $X_1, \dots, X_s$ contenus dans $I(\mathfrak{m}_0^n q_1)$ mais en dehors de $I(\mathfrak{m}_0^n q_2)$.

De la relation

$$\mathfrak{m}(\mathfrak{m}_0^n q_1) \subseteq \mathfrak{m}_0^n q_2 \quad ,$$

on tire, en utilisant les propriétés de l'application $\alpha \to I(\alpha)$,

$$I(\mathfrak{m})\, I(\mathfrak{m}_0^n q_1) \subseteq I(\mathfrak{m}_0^n q_2) \quad ,$$

en particulier,

$$X_1\, I(\mathfrak{m}_0^n q_1) \subseteq I(\mathfrak{m}_0^n q_2) \quad .$$

Il s'ensuit que les produits de puissances $X_1^{\alpha_1} \dots X_s^{\alpha_s}$ contenus dans $I(\mathfrak{m}_0^n q_1)$ mais en dehors de $I(\mathfrak{m}_0^n q_2)$ sont caractérisés par leurs parties finales $X_2^{\alpha_2}, \dots, X_s^{\alpha_s}$, qui ont évidemment la propriété :

$$X_2^{\alpha_2} \dots X_s^{\alpha_s} \notin I(\mathfrak{m}_0^n q_2) \quad .$$

Ainsi $L(\mathfrak{m}_0^n q_1/\mathfrak{m}_0^n q_2)$ est majoré par le nombre d'éléments de l'ensemble

$$S = \{ X_2^{\alpha_2} \dots X_s^{\alpha_s} \mid X_2^{\alpha_2} \dots X_s^{\alpha_s} \notin I(\mathfrak{m}_0^n q_2) \} \quad .$$

On va estimer ce nombre en distinguant trois possibilités pour la partie finale $X_3^{\alpha_3} \ldots X_s^{\alpha_s}$ des éléments de S.

(1) $$X_3^{\alpha_3} \ldots X_s^{\alpha_s} \in I(0) \quad .$$

Comme $I(0) \subseteq I(\mathfrak{m}_0^n q_2)$, il n'y a pas d'éléments de S dont les parties finales satisfont cette condition.

(2) $$X_3^{\alpha_3} \ldots X_s^{\alpha_s} \begin{cases} \notin I(0) \\ \in I^*(0) \end{cases} .$$

Il y a au plus un nombre fini de tels $X_3^{\alpha_3} \ldots X_s^{\alpha_s}$ d'après la propriété (b) des idéaux de la forme $\psi(\mathfrak{A})$. Pour chaque $X_3^{\alpha_3} \ldots X_s^{\alpha_s}$ de cette espèce, il existe des entiers ν, μ tels que $X_1^{\nu} X_2^{\mu} X_3^{\alpha_3} \ldots X_s^{\alpha_s} \in I(0)$ et, par conséquent, $X_2^{\nu+\mu} X_3^{\alpha_3} \ldots X_s^{\alpha_s} \in I(0)$. Pour que $X_2^{\alpha_2} \ldots X_s^{\alpha_s} \in S$ il faut donc que $\alpha_2 < \nu + \mu$. En somme, il y a au plus un nombre fini d'éléments de S de la catégorie considérée.

(3) $$X_3^{\alpha_3} \ldots X_s^{\alpha_s} \notin I^*(0) \quad .$$

Il existe $L(I^*(0)) = e(A)$ produits de puissances $X_3^{\alpha_3} \ldots X_s^{\alpha_s}$ de cette espèce. Comme $X_2^{b(n+1)} \in I(\mathfrak{m}_0^{n+1} A) \subseteq I(\mathfrak{m}_0^n q_2)$, il faut toujours, pour qu'un produit de puissances $X_2^{\alpha_2} \ldots X_s^{\alpha_s}$ appartienne à S, que $\alpha_2 < b(n+1)$. De la catégorie considérée il y a donc au plus $e(A)\, b(n+1)$ éléments de S.

Au total nous obtenons

$$L(\mathfrak{m}_0^n q_1/\mathfrak{m}_0^n q_2) \leq \# S \leq e(A).b.n + O(1)$$

pour $n \to \infty$.

B. <u>Estimation inférieure</u>.

Soit M le A-module $\mathfrak{m}_0^n A/\mathfrak{m}_0^{n+1} A$. Comme (A_0, A) est plat, on a un A-module-homomorphisme

$$M \cong (\mathfrak{m}_0^n/\mathfrak{m}_0^{n+1}) \otimes_{A_0} A \quad ,$$

ou encore

$$M \cong (\mathfrak{m}_0^n/\mathfrak{m}_0^{n+1}) \otimes_{K_0} A/\mathfrak{m}_0 A \quad .$$

Ainsi, puisque tous les K_0-modules sont plats,

$$\mathfrak{m}_0^n q_1/\mathfrak{m}_0^n q_2 \cong q_1 M/q_2 M \cong (\mathfrak{m}_0^n/\mathfrak{m}_0^{n+1}) \otimes_{K_0} (q_1/q_2) \quad .$$

Comme

$$\dim_{K_0} (\mathfrak{m}_0^n/\mathfrak{m}_0^{n+1}) = e(A_0).n + O(1) \qquad ,$$

et comme $L(q_1/q_2) \geqslant b$, il en résulte :

$$L(\mathfrak{m}_0^n\, q_1/\mathfrak{m}_0^n\, q_2) \geqslant e(A_0).b.n + O(1)$$

pour $n \to \infty$.

En comparant les deux estimations de $L(\mathfrak{m}_0^n\, q_1/\mathfrak{m}_0^n\, q_2)$ on obtient finalement

$$e(A_0) \leqslant e(A) \qquad .$$

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LECH (Christer). - Note on multiplicities of ideals, Ark. för Math., t. 4, 1959, p. 63-86.