Otto Kegel

Caractérisation des sous-groupes accessibles d'un groupe fini

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 13, n° 2 (1959-1960), exp. n° 18, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1959-1960__13_2_A7_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des Nombres)
13e année, 1959/60, n° 18

29 mars 1960

CARACTÉRISATION DES SOUS-GROUPES ACCESSIBLES D'UN GROUPE FINI

par Otto KEGEL

1. Soit G un groupe arbitraire (fini ou non). On dit qu'un sous-groupe U de G est accessible lorsqu'il existe une suite finie de sous-groupes N_i de G, tels que $N_1 = U$, N_i sous-groupe distingué de N_{i+1}, et $N_m = G$. Pour U accessible on écrit encore $U \lhd\lhd G$.

Pour les groupes à suite de composition finie, la notion de sous-groupe accessible coïncide avec celle de sous-groupe de composition (c'est-à-dire sous-groupe par lequel passe une suite de composition).

Il est immédiat que l'intersection de deux sous-groupes accessibles de G est encore accessible dans G. Mais pour la réunion, cela n'est en général pas correct. Cependant, WIELANDT [1] a démontré :

(W1) : Si G est un groupe à longueur de composition finie, l'ensemble des sous-groupes accessibles de G forme un treillis.

Un autre théorème de WIELANDT [2] affirme :

(W2) : Si G est un groupe à longueur de composition finie, tout sous-groupe accessible est normalisé par le socle $S(G)$ (produit de tous les sous-groupes distingués minimaux de G).

Si G est un groupe fini, N un sous-groupe distingué de G, S un p-sous-groupe de Sylow de G, il est bien connu (et trivial) que $S \cap N$ est un p-sous-groupe de Sylow de N. Il est donc clair (par itération de ce résultat) que pour tout sous-groupe accessible U et pour tout p-sous-groupe de Sylow de G, l'intersection $U \cap S$ est un p-sous-groupe de Sylow de U. Il nous semble naturel de demander si cette propriété caractérise les sous-groupes accessibles d'un groupe fini. Malheureusement, nous avons obtenu seulement des résultats incomplets dans cette direction.

2. Si le sous-groupe U du groupe fini G possède en G la propriété (D) : pour tout p-sous-groupe de Sylow S de G et pour tout nombre premier divisant l'ordre de G, l'intersection $S \cap U$ est un p-sous-groupe de Sylow de U.

On dit que U est (D)-sous-groupe de G.

On démontre facilement les lemmes suivant sur les (D)-sous-groupes de G :

LEMME 1. - Soit U un (D)-sous-groupe de G et soit σ un épimorphisme de G, alors U^σ est un (D)-sous-groupe de G^σ.

LEMME 2. - Si U est un (D)-sous-groupe de V, et si V est un (D)-sous-groupe de G, alors U est un (D)-sous-groupe de G.

LEMME 3. - Soit B un (D)-sous-groupe de G, et soit A un sous-groupe de G tel que $AB = BA = \{A , B\}$, alors l'intersection $A \cap B$ est un (D)-sous-groupe de A.

LEMME 4. - Si le p-sous-groupe U de G est un (D)-sous-groupe de G, alors $U \lhd\lhd G$.

DÉMONSTRATION. - Comme U est un (D)-sous-groupe de G, U est contenu dans tout p-sous-groupe de Sylow de G. L'intersection de ces p-sous-groupes de Sylow de G est un sous-groupe distingué nilpotent de G. Tout sous-groupe d'un groupe nilpotent fini étant accessible dans celui-ci, il est clair que $U \lhd\lhd G$.

LEMME 5. - Soit A un sous-groupe de G tel que l'intersection $A \cap A^g$ pour tout conjugué A^g de A dans G est un (D)-sous-groupe de A. Alors, pour tout sous-groupe distingué N de A, $N \cap N^g$ est un (D)-sous-groupe de N (donc de A) pour tout $g \in G$.

DÉMONSTRATION. - Soit $U = A \cap A^g$. L'intersection $N \cap U$ est un sous-groupe distingué de U, donc un (D)-sous-groupe de U ; de même $N^g \cap U$. D'après le lemme 3, $N \cap U$ est un (D)-sous-groupe de N et $N^g \cap U$ est un (D)-sous-groupe de N^g. $N \cap U$ et $N^g \cap U$ étant des sous-groupes distingués de U, le sous-groupe $U \cap N \cap N^g = N \cap N^g$ est aussi distingué dans U. Le lemme 2 nous assure maintenant que $N \cap N^g$ est un (D)-sous-groupe de N.

THÉORÈME 1. - Le groupe fini G est non-simple si (et seulement si) il existe un (D)-sous-groupe non trivial A de G, tel que pour tout $g \in G$ l'intersection $A \cap A^g$ est un (D)-sous-groupe de A.

DÉMONSTRATION. - Soit p un nombre premier divisant l'ordre de A. Soit B le sous-groupe caractéristique de A engendré par tous les p-éléments de A. B est un (D)-sous-groupe de G et, d'après le lemme 5, $B \cap B^g$ est un (D)-sous-groupe de B pour tout $g \in G$.

Soit P un p-sous-groupe de Sylow de G, $Z(P)$ le centre de P. Soit $z \in Z(P)$. On considère $B \cap B^z$. B étant un (D)-sous-groupe de G, cette intersection contient le p-sous-groupe de Sylow $P \cap B$ de B. Mais comme $B \cap B^z$ est un (D)-sous-groupe de B, il contient tous les p-sous-groupes de Sylow de B, donc aussi le sous-groupe engendré par ceux-ci. Mais B est engendré par tous ses p-sous-groupes de Sylow, donc $B \cap B^z = B$. On a démontré que le centre de tout p-sous-groupe de Sylow est contenu dans le normalisateur de B. Soit Z le sous-groupe caractéristique de G engendré par les centres des p-sous-groupes de Sylow de G. Alors, ou bien Z est un sous-groupe propre de G, ou bien $Z = G$, mais dans ce cas B serait un sous-groupe distingué de G.

REMARQUE. - Si l'on définit la propriété d'intersection (D) seulement pour un ensemble π de nombres premiers, alors tous les lemmes subsistent et l'énoncé du théorème 1 doit être changé légèrement.

3. Considérons maintenant une fonction $\mathfrak{M}$ définie dans le domaine des groupes finis de sorte que $\mathfrak{M}$ associe à tout groupe fini G pour lequel elle est définie un ensemble $\mathfrak{M}(G)$ de sous-groupes de G.

Si le sous-groupe U de G est contenu dans $\mathfrak{M}(G)$, on dit que U est un $\mathfrak{M}$-sous groupe de G.

On demande que la fonction $\mathfrak{M}$ satisfasse aux axiomes suivants :

a. $\mathfrak{M}(1) = 1$.

b. Si $\mathfrak{M}$ est définie sur G, $\mathfrak{M}$ est aussi définie sur G^σ pour tout épimorphisme σ de G et on a $\mathfrak{M}^\sigma(G) = \mathfrak{M}(G^\sigma)$.

c. Si $\mathfrak{M}$ est définie sur G, $\mathfrak{M}$ est définie sur tout sous-groupe accessible de G, et si l'on a un $\mathfrak{M}$-sous-groupe U de G qui est contenu dans un sous-groupe accessible A de G, alors U est aussi un $\mathfrak{M}$-sous-groupe de A.

d. Si U est un $\mathfrak{M}$-sous-groupe de G et si M est un sous-groupe distingué minimal de G, $U \cap M$ est un $\mathfrak{M}$-sous-groupe de M.

e. Si U est un $\mathfrak{M}$-sous-groupe minimal de G, $U \cap U^g$ est un (D)-sous-groupe de U pour tout $g \in G$.

f. Si U est un $\mathfrak{M}$-sous-groupe de G, U est un (D)-sous-groupe de G.

Comme exemple d'une telle fonction, prenons celle qui associe à tout groupe fini l'ensemble de ses sous-groupes accessibles. On se demande si cette fonction est la moins restrictive entre les fonctions satisfaisant aux axiomes (a) à (f). En effet, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Si une fonction $\mathfrak{M}$ satisfaisant aux axiomes (a) à (f) est définie sur G, tout $\mathfrak{M}$-sous-groupe de G est accessible.

DÉMONSTRATION. - Supposons que le théorème ne soit pas vrai. Alors il existe, parmi les groupes sur lesquels $\mathfrak{M}$ est définie, des groupes contenant des $\mathfrak{M}$-sous-groupes non-accessibles ; choisissons-en un d'ordre minimum. Soit G ce groupe, soit U un $\mathfrak{M}$-sous-groupe minimal tel que U n'est pas accessible dans G, $(U \neq 1)$.

Soit M un sous-groupe distingué minimal de G. Alors UM/M est (d'après (b)) un $\mathfrak{M}$-sous-groupe de G/M, et (à cause de la minimalité de G) UM/M est accessible dans G/M. Mais ce qui précède signifie que UM est accessible dans G. Si $UM \neq G$, U serait un $\mathfrak{M}$-sous-groupe de UM, donc accessible dans UM et par conséquence dans G, ce qui est contraire au choix de U.

On a donc, pour tout sous-groupe distingué minimal M de G, $UM = G$. Cela signifie en particulier que U ne contient aucun sous-groupe distingué de G : $\bigcap_{g \in G} U^g = U_G = 1$.

Supposons maintenant $M \neq G$. D'après (d) l'intersection $D = U \cap M$ est un $\mathfrak{M}$-sous-groupe de M, donc accessible dans M. Mais M (étant sous-groupe distingué minimal) est le produit direct de groupes simples isomorphes. Donc tout sous-groupe accessible de M en est facteur direct. Donc D est sous-groupe distingué et de M et de U, donc aussi de G. A cause de $U_G = 1$, cela n'est possible que si $D = 1$.

Puisque U est un (D)-sous-groupe non-accessible de G, U doit être d'ordre composé (lemme 4).

Soit Q un sous-groupe d'ordre q de U (si M est un p-groupe on choisit $q \neq p$). Le groupe $L = QM$ satisfait au lemme 3, donc $Q = L \cap U$ est un (D)-sous-groupe de L. Mais Q est même sous-groupe distingué de L, car Q coïncide avec l'intersection de tous les q-sous-groupes de Sylow de L. Mais $Q = Q_L \subseteq \bigcap_{g \in L} U^g = U_G = 1$ mènerait à une contradiction. On conclut donc que $M = G$ est un groupe simple.

Puisque U est un $\mathfrak{M}$-sous-groupe de G minimal tel que U n'est pas accessible dans G, et puisque G est simple, U est un $\mathfrak{M}$-sous-groupe minimal de G. L'axiome (e) nous assure l'applicabilité du théorème 1, qui à son tour affirme que G n'est pas simple.

Cette contradiction démontre le théorème 2.

4. On se demande maintenant si la fonction qui associe à tout groupe fini G l'ensemble des (D)-sous-groupes de G satisfait aux axiomes (a) à (f). Les lemmes que l'on a donnés plus haut sur les (D)-sous-groupes mettent en évidence tous les axiomes, sauf l'exiome (e). Nous n'avons pas pu le démontrer jusqu'à présent. Mais on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. - Soit U un (D)-sous-groupe résoluble du groupe fini G, U est un sous-groupe accessible de G.

(Ce corollaire a été trouvé aussi par M. R. W. CARTER à Cambridge).

DÉMONSTRATION. - Soit $\mathfrak{M}$ la fonction qui associe à chaque groupe fini G l'ensemble des (D)-sous-groupes résolubles de G. Alors il est clair que $\mathfrak{M}$ satisfait à tous les axiomes sauf, peut-être, (e). Mais un (D)-sous-groupe résoluble minimal U a comme ordre un nombre premier ; donc l'intersection avec un conjugué U^g est ou bien U lui même, ou bien le sous-groupe unité qui, évidemment, est un (D)-sous-groupe de G.

De façon analogue, on démontre le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2. - Le sous-groupe U du groupe fini G est accessible si et seulement si :

U est un (D)-sous-groupe de G, et tout sous-groupe accessible parfait A de U est permutable avec tout conjugué A^g.

(Il semble difficile de se débarrasser de la deuxième condition, car alors on ne dispose plus du puissant critère de non-simplicité que fournit le théorème 1).

5. Une autre caractérisation des sous-groupes accessibles dans un cadre beaucoup plus général que celui des groupes finis peut être obtenu au moyen du résultat (W2) :

THÉORÈME 3. - Pour le sous-groupe U du groupe G à longueur de composition finie, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a. U est accessible dans G.

b. Pour tout sous-groupe distingué de G, le socle $S(G/N)$ de G/N est contenu dans le normalisateur de UN/N.

c. Pour tout sous-groupe accessible V de G contenant U et pour tout sous-groupe distingué W de V, le socle $S(V/W)$ est contenu dans le normalisateur du socle $S(UW/W)$ de UW/W.

DÉMONSTRATION. - Il est clair grâce au théorème W2, que (b) et (c) sont des conséquences de (a).

On démontre par induction sur la longueur de composition de G que a est une conséquence de (b). Supposons le théorème démontré pour tous les groupes à longueur de composition plus courte que celle de G. Soit K un sous-groupe distingué minimal de G. D'après notre hypothèse, le théorème est vérifié pour G/K. Donc UK/K est accessible dans G/K, et UK est accessible dans G. Mais K étant sous-groupe distingué minimal de G, K est facteur direct de $S(G)$, et donc contenu dans le normalisateur de U. Donc U est sous-groupe distingué du sous-groupe accessible UK de G. Par suite, U lui-même est accessible dans G.

On démontre d'une façon semblable que (a) est une conséquence de (c). Supposons le théorème démontré pour les groupes à longueur de composition plus courte que celle de G. Soit K un sous-groupe distingué minimal de G. Alors KU/K est accessible dans G/K, donc KU dans G.

S'il existe un sous-groupe distingué minimal K de G tel que $UK \neq G$, alors la condition (c) est remplie dans UK, et puisque la longueur de composition de UK est plus courte que celle de G, U est bien accessible dans UK, donc dans G.

S'il n'existe aucun sous-groupe distingué de ce genre, alors on a $UK = G$ pour tout sous-groupe distingué minimal de G. La condition (c) dit que K est contenu dans le normalisateur du socle $S(U)$ de U. Mais alors $S(U)$ se trouve être un sous-groupe distingué de G.

On peut donc choisir le sous-groupe distingué minimal K de G de façon qu'il soit contenu dans $S(U)$. On obtient

$$U = UK = G \quad ,$$

et U est trivialement accessible en G.

BIBLIOGRAPHIE

[1] WIELANDT (Helmut). - Eine Verallmeinerung der invarianten Untergruppen, Math. Z., t. 45, 1939, p. 209-244.

[2] WIELANDT (Helmut). - Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen, Math. Z., t. 69, 1958, p. 463-465.