Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Léonce Lesieur

Extension au cas non commutatif d'un théorème de Krull et d'un lemme d'Artin-Rees

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 13, n° 2 (1959-1960), exp. n° 15, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1959-1960__13_2_A5_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
13e année, 1959/60, n° 15

14 mars 1960

EXTENSION AU CAS NON COMMUTATIF D'UN THÉORÈME DE KRULL ET D'UN LEMME D'ARTIN-REES

par Léonce LESIEUR

1. Un théorème de Krull.

Rappelons d'abord l'énoncé et la démonstration d'un théorème de Krull :

A étant un anneau noethérien commutatif, et U un A-module unitaire de type fini, posons $V = \bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{J}^n U$. On a :

$$V = \mathfrak{J} V \quad .$$

La démonstration utilise la décomposition en modules primaires. Considérons une décomposition réduite de $\mathfrak{J} V$ en modules primaires :

$$\mathfrak{J} V = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$$

les indices étant ordonnés de façon que $V \not\subseteq X_i$ $(i = 1 , 2 , \ldots , p)$ et $V \subseteq X_j$ $(j = p + 1 , \ldots , m)$. De la relation $\mathfrak{J} V \subseteq X_i$, $V \not\subseteq X_i$, on déduit l'existence de n_i tel que $\mathfrak{J}^{n_i} U \subseteq X_i$. En posant $n = \max \{n_i\}$ $(i = 1 , 2 , \ldots , p)$, on a donc

$$\mathfrak{J}^n U \subseteq \bigcap_{i=1,\ldots,n} X_i$$

d'où

$$V = \mathfrak{J}^n U \cap V \subseteq X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n = \mathfrak{J} V \quad .$$

Il en résulte $V = \mathfrak{J} V$.

Ce résultat entraîne en particulier $V = 0$ dans deux cas importants :

COROLLAIRE 1. - On a $V = 0$ si $M = A$, $\mathfrak{J}$ étant le radical de Jacobson de l'anneau (cf. [1], page 200).

COROLLAIRE 2. - On a $V = 0$ si $M = A$ est un anneau d'intégrité et $\mathfrak{J}$ un idéal quelconque (cf. [7], page 216).

2. Contre-exemple du cas non commutatif.

Prenons $U = A$ et soit A l'anneau de Birkhoff-Witt, formé par l'algèbre obtenue en adjoignant à un corps commutatif K les deux générateurs x et y tels que

$$xy - yx = x \quad .$$

Cet anneau est noethérien à gauche et à droite. Prenons l'idéal bilatère $\mathcal{J} = (y)$ engendré par y. C'est un A-module à gauche de base $(x\ ,\ y)$, soit $\mathcal{J} = Ax + Ay$. On a :

$$\mathcal{J}^n = Ax + Ay^n$$

d'où

$$V = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{J}^n = \bigcap_{n \geq 1} (Ax + Ay^n) = Ax \neq 0$$

et

$$\mathcal{J} V = (Ax + Ay)\ Ax = Ax^n + Ayx \neq Ax \quad .$$

Le théorème de Krull ne s'applique donc pas à un anneau non commutatif noethérien à gauche. A étant d'ailleurs un anneau d'intégrité noethérien non commutatif, on voit que le corollaire 2 ne s'applique pas non plus.

3. Extension au cas non commutatif.

Le théorème de Krull ne peut donc être valable sous la forme précédente. Il est nécessaire de lui donner dans le cas non commutatif une autre forme plus générale qui coïncide avec la première dans le cas commutatif. Cette généralisation est obtenue assez aisément en remplaçant la notion d'idéal (ou module) primaire par celle d'idéal (ou module) tertiaire. (Cf. [3], page 105). La théorie s'applique alors en particulier au cas d'un A-module à gauche U de type fini sur un anneau A noethérien à gauche. Soit $\mathcal{J}$ un idéal bilatère de A. Posons :

$$W = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{J}^n\ U \quad .$$

On rappelle que le radical primaire $\mathcal{R}_1(X)$ d'un sous-module X de M est le plus grand idéal bilatère $\mathfrak{A}$ de A tel qu'il existe un entier n vérifiant

$$\mathfrak{A}^n\ U \subseteq X \quad .$$

On remarque alors que $W = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{J}^n\ U$ est l'intersection de tous les sous-modules X de U tels que

$$\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}_1(X) \quad (^1)$$

Rappelons d'autre part la définition du radical tertiaire $\mathcal{R}_3(X)$ du sous-module X ([4], page 82) ; $\mathcal{R}_3(X)$ est le plus grand idéal bilatère $\mathfrak{A}$ tel que l'on ait :

$$(X .^{\cdot} \mathfrak{A}) \cap Y \subseteq X \Longrightarrow Y \subseteq X \quad .$$

On sait que $\mathcal{R}_3(X)$ coïncide avec $\mathcal{R}_1(X)$ dans le cas où l'anneau A est commutatif noethérien, et que, dans le cas où A est noethérien à gauche, on a $\mathcal{R}_1(X) \subseteq \mathcal{R}_3(X)$.

Il est donc naturel de remplacer $W = \bigcap_{n \geqslant 1} \mathcal{J}^n U$ par l'intersection V des sous-modules X de U tels que

$$\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}_3(X) \quad .$$

Moyennant ce changement, le théorème de Krull va s'étendre au cas non commutatif.

THÉORÈME 1. -- U étant un A-module à gauche de type fini sur un anneau A noethérien à gauche, $\mathcal{J}$ un idéal bilatère, V l'intersection des sous-modules X de U tels que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}_3(X)$, on a :

$$V = \mathcal{J} V \quad .$$

La démonstration utilise la décomposition d'un module comme intersection réduite d'un nombre fini de modules tertiaires ([2]). Supposons $\mathcal{J} V \subset V$ et soit :

$$\mathcal{J} V = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$$

une décomposition réduite de $\mathcal{J} V$ en sous-modules X_i $\mathcal{P}_i$-tertiaires, avec $V \not\subseteq X_i$ $(i = 1 , 2 , \ldots , p)$ et $V \subseteq X_j$ $(j = p + 1 , \ldots , n)$. On a donc $\mathcal{J} V \subseteq X_i$ avec $V \not\subseteq X_i$, d'où résulte, X_i étant $\mathcal{P}_i$-tertiaire, $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}_i$, et par suite, $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_p$. Posons $Q = X_1 \cap \ldots \cap X_p$. On sait que $\mathcal{R}_3(Q) = \mathcal{P}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_p$. On a donc $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}_3(Q)$ et, d'après la définition de V , $V \subseteq Q$. D'où :

$$\mathcal{J} V = \mathcal{J} V \cap V = Q \cap V = V \quad .$$

Le théorème est démontré.

---

(1) En effet, si W' est cette intersection, on a pour tout n , $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}_1(\mathcal{J}^n U)$, d'où $W \subseteq W'$. Inversement, $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}_1(X)$ entraîne l'existence de n tel que $\mathcal{J}^n U \subseteq X$, d'où $W \subseteq X$ et, par suite, $W \subseteq W'$.

(2) On rappelle que X est sous-module tertiaire si on a : $X .^{\cdot} \mathfrak{A} \supset X$; $(X .^{\cdot} \mathfrak{A}) \cap Y \subseteq X \Longrightarrow Y \subseteq X$. La relation $\mathfrak{A} Z \subseteq X$, $Z \not\subseteq X$ entraîne alors $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}$ où $\mathcal{P} = \mathcal{R}_3(X)$ est un idéal premier. On dit que X est $\mathcal{P}$-tertiaire.

La propriété 1 de N. JACOBSON ([1], page 200) entraîne alors avec le théorème 1 le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - Les hypothèses étant celles du théorème 1 et $\mathcal{J}$ le radical de Jacobson de l'anneau A, l'intersection V de tous les sous-modules X tels que $\mathcal{J} \in \mathcal{R}_3(X)$ est le sous-module nul.

Le théorème 1 s'applique en particulier à l'exemple de l'anneau $A = U$ considéré au paragraphe 2 (anneau de Birkhoff-Witt) ; si, au lieu de l'intersection W, on considère l'intersection V des idéaux à gauche X tels que $\mathcal{J} \in \mathcal{R}_3(X)$, on a cette fois $V = \mathcal{J}V$. D'autre part, on a $V \subseteq W$, d'où l'on déduit $V \subseteq \mathcal{J}^n W$ et par suite

$$V \subseteq \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{J}^n W = W_2 = \bigcap_{n \geq 1} (Ax^2 + Ay^n x) = Ax^2 \quad .$$

On a de même

$$V \subseteq \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{J}^n W_2 = \bigcap_{n \geq 1} (Ax^3 + Ay^n x^2) = Ax^3 \quad .$$

En répétant ce raisonnement, on obtient $V \subseteq \bigcap_{n \geq 1} Ax^n = 0$.

REMARQUE 1. - Ce dernier résultat autorise à conjecturer la généralisation de la propriété signalée au paragraphe 1 pour le cas commutatif (corollaire 2) : $V = 0$ lorsque l'anneau A est un anneau d'intégrité noethérien à gauche, $\mathcal{J}$ un idéal bilatère quelconque et V l'intersection des idéaux à gauche X tels que $\mathcal{J} \in \mathcal{R}_3(X)$.

REMARQUE 2. - On a pu donner un contre-exemple montrant que $V = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{J}^n \neq \mathcal{J}V$ pour un idéal bilatère $\mathcal{J}$ d'un anneau non commutatif noethérien à gauche (cf. le paragraphe 2). Mais nous n'avons pas jusqu'à présent de contre-exemple montrant que $V \neq 0$ lorsque $\mathcal{J}$ est le radical de Jacobson de l'anneau.

4. Lemme d'Artin-Rees.

Dans le même ordre d'idées, considérons le résultat suivant connu sous le nom de lemme d'Artin-Rees (cf. [7], page 253).

A étant un anneau commutatif noethérien et U un A-module de type fini sur A, V un sous-module de M, $\mathcal{J}$ un idéal, n un entier naturel, il existe un entier naturel m tel que

$$\mathcal{J}^m U \cap V \subseteq \mathcal{J}^n V \quad (^3) \quad .$$

La démonstration s'apparente à celle du théorème de Krull ; elle utilise la décomposition en modules primaires. Soit $\mathcal{J}^n V$ une décomposition de la forme :

$$\mathcal{J}^n V = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_p \cap \ldots \cap X_n$$

où les modules X_i sont $\mathcal{P}_i$-primaires, avec $V \not\subseteq X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, $V \subseteq X_j$ $(j = p+1, \ldots, n)$. On en déduit $\mathcal{J}^n V \subseteq X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, d'où $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}_i$ puisque X_i est $\mathcal{P}_i$-primaire, et, par suite il existe m tel que $\mathcal{J}^m U \subseteq X_1 \cap \ldots \cap X_p$. Il en résulte

$$\mathcal{J}^m U \cap V \subseteq X_1 \cap \ldots \cap X_p \cap \ldots \cap X_n = \mathcal{J}^n V$$

C. Q. F. D.

5. <u>Contre-exemple du cas non commutatif</u>.

Nous allons voir que ce résultat n'est plus valable si A est un anneau noethérien à gauche non commutatif, U étant un A-module de type fini sur A. Prenons $U = A$, algèbre engendrée sur un corps commutatif K par les éléments a, b, c, conformément à la table de multiplication suivante :

	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	a	0
b	0	0	b	0
c	0	a	0	c

On obtient un anneau isomorphe au sous-anneau de $M_3(K)$ formé par les matrices de la forme

$$(\mu) = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in K$$

par l'isomorphisme $(\mu) \longrightarrow \alpha a + \beta b + \gamma c$.

$(^3)$ Il existe une forme plus fine du lemme affirmant l'existence d'un nombre h tel que l'on ait $m = n + h$ pour n assez grand (cf. [6]). Nous ne nous en occupons pas ici.

Considérons l'idéal $\mathcal{J}$ défini par $\gamma = 0$, et l'idéal V défini par $\beta = 0$. On a $\mathcal{J}V = 0$, $\mathcal{J}^m = \mathcal{J}$ pour $m \geqslant 1$, d'ou :

$$\mathcal{J}^m U \cap V = Ka \not\subseteq \mathcal{J}V \quad .$$

Le lemme d'Artin-Rees n'est donc pas vérifié.

6. Extension au cas non commutatif.

On peut donner au lemme d'Artin-Rees une forme équivalente dans le cas commutatif qui est susceptible d'extension au cas non commutatif.

Considérons la topologie $\mathcal{T}_U$ définie dans le module U en prenant comme base de voisinages de zéro les sous-modules $\mathcal{J}^n U$. Considérons de même dans le module V la topologie $\mathcal{T}_V$ obtenue en prenant comme base de voisinages de zéro les sous-modules $\mathcal{J}^n V$. Le lemme d'Artin-Rees exprime que la topologie $\mathcal{T}_V$ coïncide avec la topologie induite sur V par $\mathcal{T}_U$.

Or la topologie $\mathcal{T}_U$ est également définie par la base de voisinages X tels que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}_1(X)$. En remplaçant le radical primaire $\mathcal{R}_1(X)$ par le radical tertiaire $\mathcal{R}_3(X)$, on est conduit à considérer la topologie $\mathcal{T}_U$ définie dans U par la base de voisinages X de zéro tels que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}_3(X)$. On obtient bien une topologie en vertu de la relation :

$$\mathcal{R}_3(X_1 \cap X_2) \supseteq \mathcal{R}_3(X_1) \cap \mathcal{R}_3(X_2)$$

(cf. [4], propriété 1.6, page 83).

On définit de même la topologie $\mathcal{T}_V$ dans V par la base de voisinages Y de zéro tels que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}_3^V(Y)$. (On désigne par $\mathcal{R}_3^V(Y)$ le radical tertiaire de Y considéré comme sous-module de V . La théorie du radical tertiaire et de la décomposition en sous-modules tertiaires s'applique en effet aux sous-modules de V qui forment une $(\mathcal{T})$-algèbre ; pour plus de détails, consulter [5]). La forme topologique du lemme d'Artin-Rees devient donc la suivante dans le cas non commutatif.

THÉORÈME 3. - Soit A un anneau unitaire noethérien à gauche, U un A-module de type fini, V un sous-module de U . L'ensemble des sous-modules Y de V tels que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}_3^V(Y)$ constitue une base des voisinages de zéro dans une topologie sur V . Cette topologie coïncide avec la topologie induite sur V par la topologie définie dans U au moyen d'une base de voisinages de zéro constituée par les sous-modules X de M tels que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}_3(X)$.

La démonstration se fait au moyen du lemme suivant qui peut être considéré comme une généralisation du lemme d'Artin-Rees au cas non commutatif.

LEMME. - Soit A un anneau unitaire, noethérien à gauche, U un A-module de type fini, V un sous-module de U, Y un sous-module de V. Il existe un sous-module X de U tel que :

$$Y = X \cap V \qquad \text{avec} \quad \mathcal{R}_3(X) = \mathcal{R}_3^V(Y) \quad .$$

Décomposons Y en modules tertiaires dans U

$$Y = X_1 \cap \dots \cap X_n \quad ,$$

d'où en prenant l'intersection avec V

$$Y = \bigcap_{i=1}^{i=n} (X_i \cap V) \quad ,$$

dans laquelle on peut supposer qu'aucun $X_i \cap V$ n'est superflu, les X_i étant $\mathcal{P}_i$-tertiaires et les $\mathcal{P}_i$ distincts. On a alors $Y = X \cap V$ en posant :

$$X = X_1 \cap \dots \cap X_n \quad .$$

Cette décomposition est réduite en sous-modules tertiaires. On a donc d'après la théorie des modules tertiaires

$$\mathcal{R}_3(X) = \bigcap_{i=1} \mathcal{P}_n \; , \quad \mathcal{R}_3^V(Y) = \bigcap_{i=1} \mathcal{P}_n \quad .$$

Le lemme en résulte.

Appliquons-le à la démonstration du théorème. D'abord si $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}_3(X)$, $X \cap V$ est une base de voisinage de zéro dans $\mathcal{T}_V$ car

$$\mathcal{R}_3^V(X \cap V) \supseteq \mathcal{R}_3(X) \quad .$$

D'autre part, pour tout Y tel que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}_3^V(Y)$ il existe X tel que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}_3(X)$ avec $X = Y \cap V$, d'après le lemme.

7. Condition pour que le lemme d'Artin-Rees sous sa forme classique soit valable.

On peut donner une condition nécessaire et suffisante pour que le lemme d'Artin-Rees sous sa forme classique soit valable :

THÉORÈME 4. - Soit U un module de type fini sur un anneau unitaire noethérien à gauche A. Pour que le lemme d'Artin-Rees soit valable sous sa forme classique quel que soit $\mathcal{J}$ et $V \subset U$, il faut et il suffit que tout sous-module tertiaire de U soit primaire.

La condition est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Soit Q un sous-module tertiaire de U et soit $\mathcal{J}$ tel que $Q.^{\cdot}\mathcal{J} \supset Q$. Prenons $V = Q.^{\cdot}\mathcal{J}$ et considérons $\mathcal{J}V$. Il existe donc un entier positif m avec

$$\mathcal{J}^m U \cap (Q.^{\cdot}\mathcal{J}) = \mathcal{J}^m U \cap V \subseteq \mathcal{J}V \subseteq Q \quad .$$

On en déduit, Q étant tertiaire, $\mathcal{J}^m U \subseteq Q$, ce qui montre que Q est primaire.

Ce résultat éclaire le choix du contre-exemple du lemme d'Artin-Rees (paragraphe 5). Il suffit de prendre un module tertiaire qui n'est pas primaire ([3], p. 102)

Cependant le lemme d'Artin-Rees peut être valable dans le cas non commutatif pour certains choix de A, $\mathcal{J}$, U et V. On dit alors qu'on a la propriété $P(A, \mathcal{J}, U, V)$. On désigne de même par $P(A, \mathcal{J}, U)$ la propriété du lemme d'Artin-Rees supposée valable pour tout sous-module V de U, lorsque A, $\mathcal{J}$ et U sont fixées, et par $P(A, \mathcal{J})$ la propriété du lemme d'Artin-Rees supposée valable pour tout couple de A-modules emboîtés $V \subseteq U$, lorsque A et $\mathcal{J}$ sont fixés (4). On peut donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait $P(A, \mathcal{J}, U)$ ou $P(A, \mathcal{J})$.

THÉORÈME 5. - Pour que l'on ait $P(A, \mathcal{J}, U)$, il faut et il suffit que la condition suivante soit remplie :

(1) X sous-module $\mathcal{P}$-tertiaire de U, $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P} \implies \exists n$ avec $\mathcal{J}^n U \subseteq X$.

La condition est nécessaire, car en appliquant le lemme d'Artin-Rees à $V = X.^{\cdot}\mathcal{J}$ et à $\mathcal{J}V$ on obtient :

$$\mathcal{J}^m U \cap (X.^{\cdot}\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{J}V \subseteq X$$

d'où, puisque $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}$ et que X est $\mathcal{P}$-tertiaire

$$\mathcal{J}^m U \subseteq X \quad .$$

La condition est suffisante. Donnons-nous $\mathcal{J}^n V$. On a :

$$\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}_1^V(\mathcal{J}^n V) \subseteq \mathcal{R}_3^V(\mathcal{J}^n V) \quad .$$

D'après le lemme du paragraphe 6, il existe donc X tel que

$$\mathcal{J}^n V = X \cap V, \quad \mathcal{R}_3(X) = \mathcal{R}_3^V(\mathcal{J}^n V) \quad .$$

Considérons une décomposition réduite de X en sous-modules X_i, $\mathcal{P}_i$-tertiaires

---

(4) On suppose toujours A noethérien à gauche et U de type fini.

$$X = X_1 \cap \dots \cap X_n \quad .$$

On a

$$\mathcal{R}_3(X) = \mathcal{P}_1 \cap \dots \cap \mathcal{P}_n \quad .$$

Il en résulte $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}_i$. D'après l'hypothèse, on a donc un entier n_i tel que $\mathcal{J}^{n_i} U \subseteq X_i$ $(i = 1 , 2 , \dots , n)$. En posant $n = \max \{n_i\}$, il vient

$$\mathcal{J}^n U \subseteq X$$

et, par suite,

$$\mathcal{J}^n U \cap V \subseteq \mathcal{J}^n V \quad .$$

THÉORÈME 6. - <u>Pour que l'on ait</u> $P(A , \mathcal{J})$, <u>il faut et il suffit que l'on ait</u> $P(A , \mathcal{J} , A)$, <u>ce qui équivaut à</u> :

(2) X <u>idéal à gauche</u> $\mathcal{P}$<u>-tertiaire tel que</u> $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P} \implies \exists n$ <u>avec</u> $\mathcal{J}^n \subseteq X$.

La condition est évidemment nécessaire $(A = U)$. Montrons qu'elle est suffisante. U étant de type fini, on peut écrire $U = Aa_1 + \dots + Aa_k$. Montrons que la condition (1) du théorème 5 est vérifiée. Soit X un sous-module de U $\mathcal{P}$-tertiaire tel que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}$. Il faut établir l'existence d'un entier n tel que $\mathcal{J}^n U \subseteq X$. Mais on sait que, si X est un sous-module $\mathcal{P}$-tertiaire de U et si $a_i \in U$, $a_i \notin X$, l'idéal à gauche $X^\cdot . a_i$ est $\mathcal{P}$-tertiaire. En appliquant la condition (2) à cet idéal $\mathcal{P}$-tertiaire tel que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}$, on obtient $\mathcal{J}^{n_i} A \subset X^\cdot . a_i$ ou $\mathcal{J}^{n_i} Aa_i \subseteq X$. En posant $n = \max \{n_i\}$ $(i = 1 , \dots , k)$ on a donc $\mathcal{J}^n(Aa_1 + \dots + Aa_k) \subseteq X$, soit $\mathcal{J}^n U \subseteq X$. Le théorème 6 est démontré.

On doit à M. LAZARD ([2]) un cas intéressant par ses applications, où l'on a $P(A , \mathcal{J})$. Il suffit de supposer pour un idéal bilatère $\mathcal{Z}$ de A tel que $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{J}$ les propriétés suivantes :

$$P(A , \mathcal{Z}) \ ; \ P(A/\mathcal{Z} , \mathcal{J}/\mathcal{Z}) \ ; \ P(A , \mathcal{J} , A , \mathcal{Z}^p) \quad .$$

Ces propriétés entraînent alors $P(A , \mathcal{J})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] JACOBSON (Nathan). - Structure of rings. - New York, American mathematical Society, 1956 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 37).

[2] LAZARD (Michel). - Sur le lemme d'Artin-Rees. - Bordeaux, 1958, non publié (Conférence faite à la Société mathématique de France, Section Poitou-Aquitaine).

[3] LESIEUR (Léonce) et CROISOT (Robert). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, I , Colloque d'Algèbre supérieure [1956. Bruxelles], p. 79-121. - Louvain, Ceuterick, 1957 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[4] LESIEUR (Léonce) et CROISOT (Robert). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, III : Sur la notion de radical, Acad. royale Belg., Bull. Cl. Sc., 5e série, t. 44, 1958, p. 75-93.

[5] LESIEUR (Léonce) et CROISOT (Robert). Extension au cas non commutatif d'un théorème de Krull et d'un lemme d'Artin-Rees, J. für die reine und angew Math., 1960 (à paraître) [Volume dédié au 60e anniversaire du professeur KRULL].

[6] REES (Daniel). - Two classical theorems of ideal theory, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 52, 1956, p. 155-157.

[7] ZARISKI (Oscar) and SAMUEL (Pierre). - Commutative algebra. - Princeton, D. Van Nostrand, 1958 (The University Series in higher Mathematics).