Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Pierre Lefebvre

Sur la structure des demi-groupes idempotents

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 13, nº 2 (1959-1960), exp. nº 14,
p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1959-1960__13_2_A4_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
13e année, 1959/60, n° 14

7 mars 1960

SUR LA STRUCTURE DES DEMI-GROUPES IDEMPOTENTS

par Pierre LEFEBVRE

(d'après un mémoire de N. KIMURA)

Introduction.

Cet exposé contient quelques résultats obtenus par Naoki KIMURA dans l'étude d'une classe importante de demi-groupes : les demi-groupes idempotents (c'est-à-dire dont tous les éléments sont idempotents). Ces demi-groupes sont des réunions de groupes d'ordre 1 , ce qui rattache leur étude à des travaux antérieurs de A. H. CLIFFORD ([1], [2]) et R. CROISOT ([3]). Les demi-treillis en sont des cas particuliers : ce sont les demi-groupes idempotents commutatifs, et il semble que les différents travaux de N. KIMURA sur ce sujet ne soient pas sans intérêt pour aborder l'étude des conditions algébriques que doit vérifier un demi-treillis pour être un treillis.

Ce mémoire [10] met aussi en évidence des types de demi-groupes dont l'étude est en soi intéressante ; on trouvera à la fin de ce travail, le diagramme des implications entre les conditions qui définissent ces types de demi-groupes ; on sait que la construction d'un tel diagramme, pour les différents types de demi-groupes qu'on rencontre dans la littérature, serait une entreprise d'un intérêt certain ([4]).

L'étude de N. KIMURA repose sur un théorème de Mac LEAN ([11]) (auquel on doit le premier travail spécialement consacré aux demi-groupes idempotents) et sur la notion d'"identité", qui joue un rôle comparable à celui des relations définissantes pour un groupe. A la fin du mémoire en question, l'auteur définit les demi-groupes idempotents libres à n générateurs de chaque type, et calcule leur ordre. Nous renvoyons au mémoire lui-même pour cette partie, d'un intérêt plus restreint.

Notons enfin que la terminologie employée par KIMURA ne coïncide pas toujours avec celle d'autres auteurs (en particulier G. THIERRIN) ; nous précisons le sens des termes employés lorsqu'une confusion risque de s'introduire.

1. Définitions et théorème fondamental de McLean.

DÉFINITIONS 1,1. - Un demi-groupe idempotent S est un demi-groupe dans lequel on a :

$$\forall a \in S , \quad a^2 = a \quad .$$

Un demi-groupe rectangulaire (au sens de KIMURA) est un demi-groupe S dans lequel on a :

$$\forall a , b \in S , \quad aba = a \quad .$$

KIMURA nomme "singulier à gauche" un antisemi-groupe à droite, c'est-à-dire un demi-groupe S défini par la condition :

$$\forall a , b \in S , \quad ab = a \quad .$$

On a la définition symétrique pour un demi-groupe singulier à droite, qui est un antisemi-groupe à gauche, défini par la condition :

$$\forall a , b \in S , \quad ab = b \quad .$$

Tous ces demi-groupes sont idempotents. Un antisemi-groupe, à gauche ou à droite, est rectangulaire.

REMARQUE 1,1. - THEODOSSIS (Thèse d'Université, Paris) et G. THIERRIN nomment rectangulaires les demi-groupes dans lesquels tous les éléments sont forts ([12]). On démontre aisément qu'un demi-groupe rectangulaire au sens de KIMURA l'est au sens de THIERRIN. Dans tout ce qui suit, la rectangularité sera étudiée au sens de KIMURA.

Le théorème suivant, dû à McLEAN, joue un rôle important dans tout le mémoire :

THÉORÈME 1,1. - Soit S un demi-groupe idempotent. Il existe une application homomorphe f de S sur un demi-groupe idempotent commutatif Γ telle que l'image réciproque de tout élément de Γ soit un demi-groupe rectangulaire. L'homomorphisme f est le plus faible, en ce sens que tout image homomorphe commutative de S est aussi image homomorphe de Γ .

Autrement dit, il existe un demi-treillis Γ et une famille de sous-demi-groupes rectangulaires disjoints de S , indexés par Γ , $\{ S_\gamma \; ; \; \gamma \in \Gamma \}$ tels que :

$$S = \cup \{ S_\gamma \; ; \; \gamma \in \Gamma \} \quad \text{et} \quad S_\gamma S_\delta \subseteq S_{\gamma\delta} \quad \forall \gamma , \delta \in \Gamma \quad .$$

REMARQUE 1,2. - Γ et les S_γ sont déterminés à un isomorphisme près, mais la structure de S n'est pas déterminée, en général, par celles de Γ et de tous les S_γ .

Nous étudions maintenant la structure des demi-groupes rectangulaires et ses rapports avec la condition $abc = ac$, $\forall\, a$, b ; $c \in S$. Cette condition permet d'établir une liaison entre la rectangularité au sens de KIMURA et la rectangularité au sens de THIERRIN, ainsi qu'entre les demi-groupes inversés et rectangulaires ([12] et [13]) et les "middle unitary semigroups" ([15]).

2. Structure des demi-groupes rectangulaires.

LEMME 2,1. - *Un demi-groupe rectangulaire est isomorphe au produit direct d'un antisemi-groupe à gauche et d'un antisemi-groupe à droite. De plus, cette factorisation est unique, à un isomorphisme près.*

Soit S un demi-groupe rectangulaire. On a : $xS = xyxS \subseteq xyS$ et $xyS \subseteq xS$ d'où $xS = xyS$ et de même $Sxy = Sy$. Par conséquent :

$$(xS)(yS) = (xS)(yxS) = (xSyx)S = xS \qquad \text{et} \qquad (Sx)(Sy) = Sy \quad .$$

Soit A (ou B) l'ensemble de toutes les parties de S de la forme xS (ou Sx). De ce qui précède résulte que A est un antisemi-groupe à droite et B un antisemi-groupe à gauche, l'opération étant la multiplication des parties induite par celle de S . Les applications p et q définies respectivement par :

$$S \xrightarrow{p} A \qquad p(x) = xS$$

$$S \xrightarrow{q} B \qquad q(x) = Sx$$

sont des homomorphismes de S sur A et B .

Soit r l'application de S dans le produit direct de A par B , définie par : $S \xrightarrow{r} A \times B$; $r(x) = (p(x)\ ,\ q(x))$; r est un homomorphisme. Si $(xS\ ,\ Sy)$ est un élément de $A \times B$, $r(xy) = (xyS\ ,\ Sxy) = (xS\ ,\ Sy)$: donc r est une surjection. Si $r(z) = (xS\ ,\ Sy)$, on a $zS = xS$ et $Sz = Sy$. D'après la rectangularité, on a

$$xy = (xSx)(ySy) = (zSx)(ySz) = z(SxyS)z = z \quad .$$

Donc r est un isomorphisme entre S et $A \times B$, où A est un antisemi-groupe à droite et B un antisemi-groupe à gauche.

Supposons maintenant qu'il existe un isomorphisme r' de S sur le produit direct $A' \times B'$ d'un antisemi-groupe à droite A' par un antisemi-groupe à gauche B' . Les applications p' et q' définies par $r'(x) = (p'(x)\ ,\ q'(x))$ sont des homomorphismes de S sur A' et sur B' .

Si $p(x) = p(y)$, c'est-à-dire $xS = yS$, on a :

$$p'(xS) = p'(x)\ p'\ S) = p'(x) \qquad \text{et} \qquad p'(yS) = p'(y)$$

donc $p'(x) = p'(y)$.

Il existe donc un homomorphisme f de A sur A' et un homomorphisme g de B sur B' tels que : $p' = fp$ et $q' = gq$. Si $p(x) \in A$, on définit $f(p(x)) = p'(x)$; f est une application, car si :

$$p(y) = p(x) , \qquad f(p(y)) = p'(y) = p'(x) \qquad .$$

Montrons que f est biunivoque. Supposons en effet, qu'on ait $xS \neq yS$, $f(xS) = f(yS)$. Alors, on a $xyS = xS \neq yS$ d'où $xy \neq y$. Et,

$$p'(xy) = fp(xy) = f(xyS) = f(xS) = f(yS) = fp(y) = p'(y)$$
$$q'(xy) = gq(xy) = g(Sxy) = g(Sy) = gq(y) = q'(y) \qquad .$$

Finalement, $r'(xy) = r'(y)$, ce qui est en contradiction avec le fait que r' est un isomorphisme. Donc f et g sont des isomorphismes,

C. Q. F. D.

REMARQUE 2,1. - Les ensembles A et B définis ci-dessus sont les ensembles des idéaux à droite minimaux et des idéaux à gauche minimaux de S . Notons d'ailleurs qu'un demi-groupe rectangulaire (au sens de KIMURA) est complètement simple.

Nous introduisons maintenant la condition : $\forall a , b , c \in S$, $abc = ac$. Rappelons que cette condition entraîne que S est rectangulaire au sens de THIERRIN.

LEMME 2,2. - Un demi-groupe idempotent est rectangulaire si et seulement s'il satisfait l'identité $abc = ac \quad \forall a , b , c \in S$.

La condition suffisante est immédiate (poser $c = a$) .

Supposons que S soit un demi-groupe rectangulaire. On a $a(bc)\, a = a$ d'où :

$$abc = ab(cac) = (abca)\, c = ac \qquad .$$

REMARQUE 2,2. - Pour un demi-groupe idempotent, les identités $aba = a$ et $abc = ac$ sont équivalentes. Nous verrons, au paragraphe 5, qu'une classe très large d'identités est en fait équivalente à la rectangularité. Citons ici, en particulier :

(1) $$ax_1\, x_2 \ldots x_n\, a = a \qquad (n \geqslant 1)$$

(2) $$ax_1 \ldots x_{i-1}\, ax_i \ldots x_{j-1}\, ax_j \ldots x_n\, a = a \qquad 1 < i < j \ldots < n$$

(3) $$ax_1 \ldots x_n b = ab \,, \qquad (n \geqslant 1)$$

(4) $ax_1 \ldots x_{i-1}\, c_1\, x_i \ldots x_{j-1}\, c_2\, x_j \ldots x_n\, b = ab$, $c_k = a$ ou b $1 < i < j < \ldots < n$

(5) $ax_1\, x_2 \ldots x_n\, b = ax_{i_1}\, x_{i_2} \ldots x_{i_r}\, b$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r < n$, $r < n$

REMARQUE 2,3. - Les deux identités $aba = a$ et $abc = ac$, pour des demi- groupes quelconques, ne sont pas équivalentes. La première définit les demi-groupes idempotents rectangulaires, mais la seconde définit une classe plus vaste (qui contient la précédente). Cependant, on a le lemme suivant :

DÉFINITION 2,1. - Un demi-groupe S est dit "globalement idempotent" si l'on a $S^2 = S$.

LEMME 2,3.- Un demi-groupe globalement idempotent est rectangulaire si et seulement s'il vérifie la condition : $\forall a , b , c \in S$, $abc = ac$.

Condition suffisante : soit $a \in S$; $\exists x , y \in S$ tels que $a = xy$. D'où :

$$a^2 = (xy)^2 = xyxy = x(yx)\, y = xy = a$$

S est donc idempotent, et par conséquent, rectangulaire d'après le lemme 2,2.

Condition nécessaire : évidente, car tout demi-groupe rectangulaire satisfait $abc = ac$, d'après le lemme 2,2.

La condition suffisante de ce lemme est d'ailleurs, un cas particulier d'un théorème plus général :

THÉORÈME 2,1. - Soit S un demi-groupe vérifiant la condition : $\forall a , b , c \in S$ $abc = ac$. Il existe un sous-demi-groupe rectangulaire R de S et une partition de S avec R comme ensemble d'indices, tels que :

$$S = \cup \{S_r \;;\; r \in R\} \;;\quad r \in S_r \;;\quad S_r \cap S_t = \emptyset \quad \text{si} \quad r \neq t \quad \text{et} \quad S_r\, S_t = \{rt\} \;.$$

Considérons l'application $f : S \xrightarrow{f} S$ définie par $f(x) = x^2$. f est un homomorphisme de S dans S , car $f(xy) = (xy)^2 = x(yx)\, y = xy = x(xy)\, y = x^2\, y^2$ c'est-à-dire $f(xy) = f(x)\, f(y)$. Soit R l'image de S par f : $R = f(S) = \{x^2 \;;\; x \in S\}$. Alors, on a évidemment $R^2 \subseteq R \subseteq S^2$; tout élément de S^2 est idempotent, car :

$$(xy)^2 = x(yx)\, y = xy \quad .$$

Donc $R^2 = R = S^2$. Puisque R est globalement idempotent, R est rectangulaire d'après le lemme 2,3. Définissons S_r par $S_r = \{x \;;\; x \in S \;;\; x^2 = r\}$; S est ainsi décomposé de la manière suivante :

$$S = \cup\{S_r \,;\, r \in R\} \qquad \text{avec} \quad S_r\, S_t = \{rt\} \quad .$$

Car si $x \in S_r$ et $y \in S_t$, on a $x^2 = r$, $y^2 = t$ d'où $xy = x^2 y^2 = rt$.

3. Structure des demi-groupes idempotents réguliers d'un côté.

DÉFINITION 3,1. - Nous dirons qu'un demi-groupe (non nécessairement idempotent) est régulier à gauche, régulier à droite ou régulier (au sens de KIMURA) s'il vérifie respectivement les identités : $\forall\, a , b , c \in S$ $aba = ab$; $aba = ba$; $abaca = abca$.

Les lemmes suivants sont à peu près évidents :

LEMME 3,1. - Un demi-groupe régulier d'un côté est régulier.

LEMME 3,2. - Le produit direct de demi-groupes réguliers d'un côté (ou réguliers) est régulier du même côté (ou régulier).

LEMME 3,3. - Un antisemi-groupe d'un côté est régulier de l'autre côté.

LEMME 3,4. - Un demi-groupe est un antisemi-groupe d'un côté si et seulement s'il est régulier de l'autre côté et rectangulaire.

LEMME 3,5. - Un demi-groupe idempotent est un demi-treillis si et seulement s'il est régulier à gauche et à droite.

Enfin, pour un demi-groupe globalement idempotent, on a le lemme suivant :

LEMME 3,6. - Si un demi-groupe globalement idempotent est régulier d'un côté, il est idempotent.

Car tout élément de S s'écrit $x = ab$ avec $a , b \in S$ et $x^2 = (ab)^2 = a(bab) = aba$ d'où enfin $x^2 = aba = ab = x$.

Avant de poursuivre l'étude de la régularité, nous devons revenir sur la décomposition d'un demi-groupe idempotent en sous-demi-groupes rectangulaires S_γ , indexés par un demi-treillis Γ . Nous dirons que Γ est le demi-treillis structural de S et S_γ un noyau d'indice γ . L'homomorphisme p appliquant S sur Γ , défini par $p(S_\gamma) = \gamma$ sera dit naturel. Nous écrirons alors $S \sim \sum\{S_\gamma \,;\, \gamma \in \Gamma\}$, que nous appellerons aussi "structure de décomposition" de S . Le théorème fondamental 1,1 conduit aux corollaires suivants :

COROLLAIRE 3,1. - Tout noyau S_γ est un sous-demi-groupe rectangulaire maximal de S . Tout sous-demi-groupe rectangulaire de S est contenu dans un noyau et un seul.

Si R est un sous-demi-groupe rectangulaire de S, $p(R)$ est aussi un sous-demi-groupe rectangulaire de Γ. Comme Γ est un demi-treillis, $p(R)$ est réduit à un élément, par exemple $\gamma = p(R)$ et on a : $R \subseteq p^{-1}(\gamma) = S$. Autrement dit, R est contenu dans un S_γ et un seul, puisque les S_γ sont disjoints. Tout S_γ étant un sous-demi-groupe rectangulaire est donc un sous-demi-groupe rectangulaire maximal de S.

COROLLAIRE 3,2. - Pour tout homomorphisme q de S sur un demi-treillis Δ, il existe un homomorphisme unique f de Γ sur Δ, tel que $q = fp$, où $p(S \,\mathrm{R}\, \Gamma)$ est l'homomorphisme naturel.

Puisque $q(S_\gamma)$ est rectangulaire, c'est un élément unique de Δ. Si nous définissons une application f de Γ dans Δ par $f(\gamma) = q(S_\gamma)$, il est facile de voir que f est un homomorphisme de Γ sur Δ et que $q = fp$.

COROLLAIRE 3,3. - Soit q un homomorphisme de S sur un demi-treillis Δ. Si $q^{-1}(\delta)$ est rectangulaire pour tout $\delta \in \Delta$, l'application f précédemment définie est un isomorphisme. D'une manière plus précise, on peut considérer Δ comme le treillis structural de S, $q^{-1}(\delta)$ comme un noyau d'indice δ et q comme l'homomorphisme naturel. Puisque $q^{-1}(\delta)$ est rectangulaire, il est contenu dans un S_γ, d'après le corollaire 3,1. On a donc :

$$\gamma = p(S_\gamma) \supseteq pq^{-1}(\delta) = p(fp)^{-1}(\delta) = pp^{-1} f^{-1}(\delta) = f^{-1}(\delta)$$

f est donc biunivoque.

THÉORÈME 3,1. - Un demi-groupe idempotent est régulier d'un côté si et seulement si ses noyaux sont des antisemi-groupes de l'autre côté.

1° Supposons que S soit régulier à gauche. Tout noyau est rectangulaire et régulier à gauche, donc est un antisemi-groupe à droite, d'après le lemme 3,4.

2° Supposons que tout noyau de S soit un antisemi-groupe à droite. Soit $a \in S_\alpha$ et $b \in S_\beta$; alors ab, $ba \in S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$. $S_{\alpha\beta}$ étant un antisemi-groupe à droite, on a : $aba = ab^2 a = (ab)(ba) = ab$, ce qui prouve que S est régulier à gauche.

4. Structure des demi-groupes idempotents réguliers.

DÉFINITION 4,1. - Soit Γ un demi-treillis. Soient A et B des demi-groupes idempotents admettant Γ comme demi-treillis de structure.

$$A \sim \sum \{A_\gamma \, ; \, \gamma \in \Gamma\} \qquad B \sim \sum \{B_\gamma \, ; \, \gamma \in \Gamma\} \qquad .$$

Formons le produit direct $D = A \times B$; $C_\gamma = A_\gamma \times B_\gamma$ peut être considéré comme un sous-demi-groupe rectangulaire de D . De même, $C = \cup\{C_\gamma ; \gamma \in \Gamma\}$ est un sous-demi-groupe de D . Soient $p : A \to \Gamma$ et $q : B \to \Gamma$ les homomorphismes naturels de A sur Γ et de B sur Γ. On a

$$C = \{(x , y) ; x \in A , y \in B ; p(x) = q(y)\} .$$

Γ est le treillis de structure de C et $r : C \to \Gamma$ défini par $r(x , y) = p(x) = q(y)$ est l'homomorphisme naturel correspondant. Nous dirons que C est le produit gauche ("spined product") de A et B par rapport à Γ.

REMARQUE 4,1. - Ce produit dépend non seulement de A , B et Γ, mais aussi des homomorphismes naturels p et q . C'est un produit sous-direct de A et B .

LEMME 4,1. - Le produit gauche d'un demi-groupe idempotent régulier à gauche et d'un demi-groupe idempotent régulier à droite est régulier.

Car, c'est un sous-demi-groupe du produit direct de A et B (lemmes 4,1 et 4,2).

Nous démontrons maintenant la réciproque de ce lemme.

LEMME 4,2. - Soit $S = \cup\{S_\gamma ; \gamma \in \Gamma\}$ un demi-groupe idempotent régulier. Il existe un demi-groupe idempotent régulier à gauche $A = \cup\{A_\gamma ; \gamma \in \Gamma\}$ et un demi-groupe idempotent régulier à droite $B = \cup\{B_\gamma ; \gamma \in \Gamma\}$ ayant tous deux Γ comme treillis de structure, tel que S soit isomorphe au produit gauche de A par B relativement à Γ .

Soit $S = \cup\{S_\gamma ; \gamma \in \Gamma\}$ un demi-groupe idempotent régulier. Puisque chaque noyau est rectangulaire, nous pouvons poser $S_\gamma = A_\gamma \times B_\gamma$ où A_γ est un antisemi-groupe à droite et B_γ un antisemi-groupe à gauche. Soit :

$$A = \cup\{A_\gamma ; \gamma \in \Gamma\} \qquad B = \cup\{B_\gamma ; \gamma \in \Gamma\} \qquad T = A \times B .$$

S peut être identifié à un sous-ensemble de T . Nous allons démontrer qu'on peut faire de A et de B des demi-groupes idempotents. Soit

$$a \in A_\alpha , \quad c \in A_\beta , \quad b , b' \in B_\alpha , \quad d , d' \in B_\beta .$$

Alors (a , b) , $(a , b') \in S_\alpha$, (c , d) , $(c , d') \in S_\beta$. Posons :

$$(e , f) = (a , b)(c , d) \quad \text{et} \quad (e' , f') = (a , b')(c , d') .$$

Alors (e , f) et (e' , f') appartiennent à $S_{\alpha\beta}$. Puisque A est un antisemi-groupe à droite et B un antisemi-groupe à gauche, on a :

$$(e , f)(e' , f') = (e , f') .$$

Par ailleurs, on a :

$$(e , f)(e' , f') = (a , b)(c , d)(a , b')(c , d')$$

$= (a , b' b)(c , d' d)(a , bb')(c , d)$ car B et B sont des antisemi-groupes à droite.

$$= (a , b')(a , b)(c , d')(c , d)(a , b)(a , b')(c , d')$$

$$= (a , b')(a , b)(a , b')(c , d')(a , b)(c , d)(a , b)(a , b')(c, d')$$

en utilisant la régularité.

$$= (a , b' bb')(c , d')(a , b)(c , d)(a , bb')(c , d')$$

$$= (a , b')(c , d')(a , b)(c , d)(a , b')(c , d')$$

$= (e' , f')(e , f)(e' , f')$ par définition.

$= (e' , f')$ d'après la rectangularité de $S_{\alpha\beta}$,

donc $(e , f') = (e' , f')$ c'est-à-dire $e = e'$. L'élément e est déterminé par a et c seulement. De même, f ne dépend que de b et d .

Nous pouvons donc définir deux applications m et n de $A \times A$ dans A et de $B \times B$ dans B par $(m(a , c) , n(b , d)) = (a , b)(c , d) = (e , f)$. Alors A et B deviennent des systèmes multiplicatifs avec m et n comme multiplications ; A et B sont des sous-systèmes, qui sont respectivement antisemi-groupe à droite et antisemi-groupe à gauche ; $T = A \times B$ est aussi un système multiplicatif. Considérons les projections $p : T \to A$ définie par $p(a , b) = a$ et $q : T \to B$ définie par $q(a , b) = b$. Ce sont des homomorphismes. Par conséquent, les applications p et q restreintes à $S \subsetneq T$ sont aussi des homomorphismes : leurs images sont $A = p(S)$ et $B = q(S)$. Par suite, A et B sont des demi-groupes idempotents. Puisque A_γ est un antisemi-groupe à droite et B_γ un antisemi-groupe à gauche, A_γ et B_γ sont rectangulaires ; en outre, Γ étant un demi-treillis, les formules

$$A = \cup \{A_\gamma ; \gamma \in \Gamma\} \qquad B = \cup \{B_\gamma ; \gamma \in \Gamma\}$$

montrent que Γ est le treillis structural de A et de B d'après le corollaire 3,3. Ainsi il existe un demi-groupe régulier à gauche et un demi-groupe régulier à droite dont S est le produit gauche par rapport à Γ . On a finalement le théorème suivant :

THÉORÈME 4,1. - <u>Un demi-groupe idempotent est régulier si et seulement si c'est le produit gauche d'un demi-groupe idempotent régulier à gauche et d'un demi-groupe</u>

idempotent régulier à droite.

COROLLAIRE 4,1. - *Tout demi-groupe idempotent régulier peut être plongé dans le produit direct d'un demi-groupe idempotent régulier à gauche et d'un demi-groupe idempotent régulier à droite.*

COROLLAIRE 4,2. - *Soit* S *le produit gauche de* A *et* B *par rapport à* Γ *et* T *le produit gauche de* C *et* D *par rapport à* Δ *, où* $A \sim \sum\{A_\gamma \; ; \; \gamma \in \Gamma\}$ *et* $C \sim \sum\{C_\delta \; ; \; \delta \in \Delta\}$ *sont des demi-groupes idempotents réguliers à gauche et* $B \sim \sum\{B_\gamma \; ; \; \gamma \in \Gamma\}$ *et* $D \sim \sum\{D_\delta \; ; \; \delta \in \Delta\}$ *sont des demi-groupes idempotents réguliers à droite.*

Soit $k : S \to T$ *un homomorphisme ; il existe alors un homomorphisme* $h : \Gamma \to \Delta$ *et des homomorphismes* $f : A \to C$ et $g : B \to D$ *satisfaisant à*

(1) $$k(a , b) = (f(a) , g(b))$$

et

(2) $$hp = rf \qquad \text{et} \qquad hq = sg$$

avec le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & \Gamma \arrow[d, "h"] & B \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "r"] & \Delta & D \arrow[l, "s"'] \end{tikzcd}$$

où p , q , r *et* s *sont les homomorphismes naturels.*

Soit $u : S \to \Gamma$ et $v : T \to \Delta$ les homomorphismes naturels. Puisque $vk : S \to \Delta$ est un homomorphisme, d'après le corollaire 3,2, il existe un homomorphisme unique $h : \Gamma \to \Delta$ tel que $vk = hu$. Par conséquent,

$$v(k(S_\gamma)) = hu(S_\gamma) = h(\gamma)$$

et

$$k(S_\gamma) \subseteq v^{-1}(\delta) = T_\delta \qquad \text{où} \quad \delta = h(\gamma) \quad .$$

Maintenant, l'homomorphisme $k_\gamma : S_\gamma \to T_\delta$ définit des homomorphismes uniques $f_\gamma : A_\gamma \to C_\delta$ et $g_\gamma : B_\gamma \to D_\delta$ tel que $k_\gamma(a , b) = (f_\gamma(a) , g_\gamma(b))$, où k_γ est l'homomorphisme k restreint à S_γ . Puisque A et B sont les réunions des A_γ et des B_γ , pour $\gamma \in \Gamma$, f_γ et g_γ déterminent de manière unique des applications $f : A \to C$ et $g : B \to D$ telles que :

$$f(a) = f_\gamma(a) \qquad \text{si} \quad a \in A_\gamma$$

et

$$g(b) = g_\gamma(b) \qquad \text{si} \quad b \in B_\gamma \quad .$$

Il est évident alors que $k(a, b) = (f(a), g(b))$. Donc si

$$(a, b) \in S, \quad (a', b') \in S \quad ,$$

on a :

$$\begin{aligned}(f(aa'), g(bb')) &= k(aa', bb') = k((a, b)(a', b')) = k(a, b)\, k(a', b') \\ &= (f(a), g(b))(f(a'), g(b')) = (f(a)\, f(a'), g(b)\, g(b'))\end{aligned}$$

Ce qui prouve que f et g sont des homomorphismes. Puisque $(a, b) \in S_\gamma$ implique $(f(a), g(b)) = k(a, b) \in T_\delta$ où $\delta = h(\gamma)$ nous avons $rf(a) = \delta = h(\gamma) = hp(a)$ c'est-à-dire $rf = hp$ et de même $sg = hq$.

COROLLAIRE 4,3. - Dans le corollaire 4,2, k est (1) injectif ; (2) surjectif ; (3) bijectif, respectivement, si et seulement s'il existe h , f et g tous (1) injectifs ; (2) surjectifs ; (3) bijectifs, satisfaisant toutes les conditions du corollaire 5,2.

Condition suffisante : il suffit de considérer l'application k définie par : $k(a, b) = (f(a), g(b))$ dans chaque cas.

Condition nécessaire :

(1) Supposons que k soit injectif. Alors $k^{-1}(T_\delta)$ est rectangulaire s'il n'est pas vide, donc est contenu dans un seul S_γ d'après le corollaire 3,1. Donc h est injectif. Il est alors facile de voir que f et g sont injectifs.

(2) Soit k surjectif. Alors $h(\Gamma) = h(u(S)) = vk(S) = v(T) = \Delta$ qui montre que h est surjectif. Il est alors évident que f et g sont surjectifs.

(3) Evident d'après (1) et (2).

Le troisième cas de ce corollaire peut être énoncé comme suit :

COROLLAIRE 4,4. - La décomposition d'un demi-groupe idempotent régulier en produit gauche d'un demi-groupe idempotent régulier à gauche par un demi-groupe idempotent régulier à droite est unique à un isomorphisme près.

5. Caractérisation de certains demi-groupes idempotents par des identités.

DÉFINITIONS 5,1. - Soit $X = \{x, y, \ldots\}$ un ensemble, dont les éléments seront ici appelés variables. Un mot est un élément du demi-groupe libre $F = F(X)$. Un couple de mots (P, Q) est appelé "identité" et est écrit $P = Q$.

Soit S un demi-groupe idempotent ; on dit que S satisfait à l'identité $P = Q$ si $f(P) = f(Q)$ pour tout homomorphisme $f : F \xrightarrow{f} S$. Une identité $P = Q$ implique une identité $P' = Q'$ si tout demi-groupe idempotent satisfaisant à $P = Q$

satisfait à $P' = Q'$ (exemple : toute identité $P = Q$ implique l'identité $x^2 = x$). Deux identités sont équivalentes si $P = Q$ implique $P' = Q'$ et réciproquement. Soit X' un autre ensemble de variables. Soit $t_0 : X \xrightarrow{t_0} X'$ une application quelconque de X dans X' ; elle induit un homomorphisme $t : F(X) \xrightarrow{t} F(X')$ qui coïncide avec t_0 sur X . On voit facilement que $P = Q$ implique $t(P) = t(Q)$.

LEMME 5,1. - $P = Q$ <u>implique</u> $t(P) = t(Q)$ <u>pour toute application des variables</u> t_0 .

Les lemmes suivants sont aussi immédiats :

LEMME 5,2. - <u>Si</u> $P = Q$ <u>implique</u> $P = P'$ <u>et</u> $Q = Q'$, $P = Q$ <u>implique</u> $P' = Q'$.

LEMME 5,3. - <u>Si</u> $P = Q$ <u>implique</u> $P' = Q'$, $P = Q$ <u>implique</u> $PP' = QQ'$ <u>et</u> $P' P = Q' Q$.

DÉFINITION 5,2. - Une identité $P = Q$ est dite <u>homotypique</u> si P et Q contiennent explicitement les mêmes variables, <u>hétérotypiques</u> dans le cas contraire.

EXEMPLES. - $xy = x$ est hétérotypique ; $xy = yx$ est homotypique.

Si P est un mot $x_1 x_2 \dots x_n$, x_1 sera dit "premier élément" de P (head) x_n "dernier élément" (tail).

REMARQUE 5,1. - Les conditions nécessaires des propositions suivantes sont démontrées après le lemme 5,4.

THÉORÈME 5,1. - <u>Une identité</u> $P = Q$ <u>est équivalente à</u> $xy = x$ <u>(identité caractéristique d'un antisemi-groupe à droite) si et seulement si</u> :

(1) $P = Q$ <u>est hétérotypique</u>.

(2) <u>Les premiers éléments de</u> P <u>et</u> Q <u>sont les mêmes</u>.

(3) <u>Les derniers éléments de</u> P <u>et</u> Q <u>sont différents</u>.

REMARQUE 5,2. - On obtient un énoncé valable pour l'identité $xy = y$ (identité caractéristique d'un antisemi-groupe à gauche) en permutant les mots "premier" et "dernier" dans les conditions (2) et (3) du précédent théorème.

Soit $P = Q$ une identité satisfaisant aux conditions (1), (2), (3). Alors les mots P et Q sont de la forme $P = x \dots x_1$ $Q = x \dots x_2$ avec $x_1 \neq x_2$ (x_1 ou x_2 , mais non x_1 et x_2 , pouvant être égaux à x).

D'après la condition (1), P par exemple, contient une variable y que Q ne contient pas. L'application $X \xrightarrow{t_0} X$ définie par $t_0\, y = y$ et $t_0\, x_i = x$ pour toutes les autres variables, envoie les mots P et Q sur P' et Q' , où P'

est $x \dots y \dots x$ ou $x \dots y$ (les ... sont mis pour des x, des y, ou rien du tout) et Q' est x^n (n entier positif).

Or, tout demi-groupe idempotent vérifie les identités $P' = xyz$ ou $P' = xy$ suivant que P' est $x \dots y \dots x$ ou $x \dots y$, et $Q' = x$. D'après les lemmes 5,1 et 5,2, nous voyons que $P = Q$ implique, soit $xyx = x$ ou $xy = x$. $xyx = x$ est la rectangularité, qui implique $P = xx_1$ et $Q = xx_2$ (lemme 2,2). D'après le lemme 5,2 l'identité $P = Q$ implique donc $xx_1 = xx_2$. Par une application convenable, on voit alors que cette identité implique encore que S est un antisemi-groupe à droite (appliquer x_2 sur y, les autres variables sur x). Inversement, l'identité $xy = x$ implique toute identité de la forme

$$x \dots y = x \dots x \qquad \text{ou} \qquad x \dots y = x \dots z$$

où x, y, z sont des variables distinctes et les points mis à la place d'une suite quelconque de variables. Donc $xy = x$ implique toute identité satisfaisant aux conditions du théorème,

C. Q. F. D.

THÉORÈME 5,2. - Une identité $P = Q$ est équivalente à la rectangularité si et seulement si :

(1) $P = Q$ est hétérotypique.

(2) Les premiers éléments de P et Q sont les mêmes.

(3) Les derniers éléments de P et Q sont les mêmes.

Soit $P = Q$ une identité satisfaisant aux conditions (1), (2) et (3) du théorème 5,2. On peut supposer ici que le mot P est $x \dots y \dots z$ et Q est $x \dots z$, où $y \notin Q$ et z peut être le même que x.

Alors la transformation $y \to y$ et toutes les autres variables sur x, implique l'identité $xyx = x$, qui est équivalente à la rectangularité. Inversement, la rectangularité implique toute identité de la forme $x \dots z = x \dots z$ d'après le lemme 2,2. Donc elle implique toute identité satisfaisant aux conditions ci-dessus.

REMARQUE 5,2. - On vérifie aisément que toutes les identités de la remarque 2,2 satisfont aux trois conditions précédentes.

THÉORÈME 5,3. - Une identité $P = Q$ équivaut à la trivialité, c'est-à-dire $x = y$ si et seulement si :

(1) $P = Q$ est hétérotypique.

(2) Les premiers éléments de P et Q sont différents.

(3) Les derniers éléments de P et Q sont différents.

Soit $P = Q$ une identité vérifiant les conditions ci-dessus. Elle implique les identités $zP = zQ$ et $Pz = Qz$, où z est une variable non contenue à la fois dans P et Q, d'après le lemme 5,3. La première équivaut à $xy = x$, et la seconde à $xy = y$. Donc $P = Q$ implique la trivialité. Inversement, la trivialité implique toute identité.

LEMME 5,4. - Tout demi-treillis satisfait toute identité homotypique.

Soit $P = Q$ une identité homotypique dont les variables sont $x_1\ x_2, \dots, x_n$. Soit S un demi-treillis quelconque. Il est clair que S satisfait à la fois aux deux identités $P = x_1\ x_2 \dots x_n$ et $x_1\ x_2 \dots x_n = Q$. Donc S satisfait à l'identité $P = Q$.

DÉMONSTRATION de la condition nécessaire des théorèmes 5,1, 5,2 et 5,3. - Soit $P = Q$ une identité équivalente à la trivialité ; à $xy = x$, à $xy = y$ ou à la rectangularité. Soit S le treillis à deux éléments. Si $P = Q$ est homotypique, S y satisfait (lemme 6,4). Or, S n'est ni rectangulaire, ni un antisemi-groupe à droite ou à gauche, ni trivial. Donc $P = Q$ est hétérotypique. Ceci démontre la partie (1) des théorèmes 5,1, 5,2 et 5,3. Soit A et B, respectivement, les antisemi-groupes à droite et à gauche d'ordre 2. A, par exemple, n'est ni un antisemi-groupe à gauche, ni trivial. A satisfait toute identité dont les premiers éléments sont les mêmes. De même, B n'est ni un antisemi-groupe à droite, ni trivial et satisfait toute identité dont les derniers éléments sont les mêmes.

a. Supposons que $P = Q$ soit équivalente à la trivialité. Alors les premiers éléments doivent être différents, ainsi que les derniers. Sinon A ou B, qui n'est pas trivial, y satisfait. Ceci prouve la nécessité des conditions (2) et (3) dans le théorème 5,3.

b. Supposons que $P = Q$ soit équivalente à $xy = x$ ou à $xy = y$. Alors les derniers éléments (ou les premiers) doivent être différents. Sinon B (ou A) qui n'est pas un antisemi-groupe à droite (à gauche) y satisfait. Ceci démontre le (3) du théorème 5,1. Les premiers éléments (ou les derniers) doivent être les mêmes. Sinon l'identité équivaut à la trivialité d'après le théorème 5,3.(qui est complètement démontré maintenant). Or A, par exemple, est un antisemi-groupe à droite non trivial. Ceci prouve le (2) du théorème 5,1.

c. Enfin, supposons que $P = Q$ soit équivalent à la rectangularité. Alors les premiers éléments de P et Q sont les mêmes, ainsi que les derniers éléments. Sinon, l'identité équivaut à la trivialité, à $xy = x$ ou à $xy = y$; mais il existe un demi-groupe idempotent rectangulaire qui ne possède aucune de ces propriétés, par exemple, le produit direct $A \times B$. Ceci termine la démonstration de la nécessité de (2) et (3) dans le théorème 5,2.

THÉORÈME 5,4. - *Une identité* $P = Q$ *équivaut à la commutativité si elle satisfait aux conditions suivantes* :

(1) $P = Q$ *est homotypique*.

(2) *Les premiers éléments de* P *et* Q *sont différents*.

(3) *Les derniers éléments de* P *et* Q *sont différents*.

Soit $P = Q$ une dientité satisfaisant aux conditions précédentes. Nous pouvons supposer que P est le mot $x \dots$ et Q le mot $y \dots$ $(x \neq y)$. Or $P = Q$ implique $Pxy = Qxy$. La transformation $y \to y$ et toutes les autres variables sur x dans cette dernière identité implique l'identité $xy = yxy$, qui est équivalente à la régularité à droite. De même, $P = Q$ implique la régularité à gauche. Donc $P = Q$ implique la commutativité. Inversement, la commutativité implique toute identité homotypique.

Avant de donner des conditions pour qu'une identité soit équivalente à la régularité à gauche ou à droite, nous introduirons le concept de partie initiale et de partie finale d'un mot. Si le mot P' , par exemple $x_{i_1} x_{i_2} , \dots , x_{i_n}$ est le mot obtenu en écrivant une fois les variables distinctes du mot P , par exemple $x_1 , x_2 , \dots , x_n$, à partir de la gauche, nous dirons que P' est la partie initiale de P : $P' = q(P)$. On définit de même la partie finale $r(P)$. Par exemple, si $P = xyxzx$, $q(P) = xyz$ et $r(P) = yzx$. Quand P et Q ont même partie initiale, nous dirons que l'identité $P = Q$ est coinitiale ; s'ils ont même partie finale, cofinale. Une identité coinitiale ou cofinale est nécessairement homotypique.

THÉORÈME 5,5. - *Une identité* $P = Q$ *est équivalente à la régularité à gauche (pour un demi-groupe indispensable) si elle satisfait aux conditions suivantes* :

(1) $P = Q$ *est coinitiale*.

(2) *Les derniers éléments de* P *et* Q *sont différents*.

On obtient une condition suffisante pour la régularité à droite en remplaçant coinitiale par cofinale dans (1) et derniers par premiers dans (2).

Soit $P = Q$ une identité satisfaisant aux deux conditions ci-dessus. D'après (1), P et Q ont même premier élément, x par exemple. D'après (2) , un des derniers éléments est différent de x , par exemple $P = x \dots y$ avec $y \neq x$.

Soit t_0 l'application définie par $y \to y$ et les autres variables sur x ;

on a les identités $t_0(P) = xy$ et $t_0(Q) = xyx$. D'où la régularité : $xyx = xy$. Inversement, il est évident que la régularité à gauche **implique** $P = P'$ pour tout mot P , où P' est la partie initiale de P . Ainsi la régularité à gauche implique toute identité coinitiale. Donc elle implique toute identité satisfaisant aux conditions précédentes.

Le problème de trouver des conditions caractéristiques pour qu'une identité soit équivalente à la régularité reste ouvert.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.). - Semigroups admitting relative inverses, Annals of Math., t. 42, 1941, p. 1037-1049.

[2] CLIFFORD (A. H.). - Bands of semigroups, Proc. Amer. math. Soc., t. 5, 1954, p. 499-504.

[3] CROISOT (Robert). - Demi-groupes inversifs et demi-groupes, Réunions de demi-groupes simples, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 3, t. 70, 1953, p. 361-379.

[4] CROISOT (Robert). - Sur la classification des demi-groupes, Proc. of the intern. math. Congress [1954. Amsterdam]. - Amsterdam, North Holland Publishing Co. ; Groningen, P. Noordhoff, 1954.

[5] KIMURA (Naoki). - On semigroups, Dissertation, Tulane University, 1957, p. 1-133.

[6] KIMURA (Naoki). - Notes on idempotent semigroups, I., Proc. Japan Acad., t. 33, 1957, p. 642-645.

[7] KIMURA (Naoki) and YAMADA (Miyuki). - Note on idempotent semigroups, II., Proc. Japan Acad., t. 34, 1958, p. 110-112.

[8] KIMURA (Naoki). - Note on idempotent semigroups, III., Proc. Japan Acad., t. 34, 1958, p. 113-114.

[9] KIMURA (Naoki). - Note on idempotent semigroups, IV.: Identities of three variables, Proc. Japan Acad., t. 34, 1958, p. 121-123.

[10] KIMURA (Naoki). - The structure of idempotent semigroups, Pacific J. of Math., t. 8, 1958, p. 257-275.

[11] McLEAN (David). - Idempotent semigroups, Amer. math. Monthly, t. 61, 1954, p. 110-113.

[12] THIERRIN (Gabriel). - Demi-groupes inversés et rectangulaires, Bull. Acad. royale Belgique, Cl. Sc., 5e série, t. 41, 1955, p. 83-92.

[13] THIERRIN (Gabriel). - Sur la structure des demi-groupes, Alger-Math., t. 3, 1956, n° 2.

[14] YAMADA (Miyuki). - Note on idempotent semigroups, V : Implications of two variables, Proc. Japan Acad., t. 34, 1958, p. 668-671.

[15] YAMADA (Miyuki). - A note on middle unitary semigroups, Kodai math. Sem. Reports, t. 7, 1955, p. 49-52.

DIAGRAMME DES IMPLICATIONS ENTRE CERTAINES CONDITIONS SUSCEPTIBLES D'ÊTRE VÉRIFIÉES DANS UN DEMI-GROUPE