Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Guy Maury

Application de la théorie de Lesieur et Croisot aux ordres maximaux réguliers noethériens à gauche

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 13, nº 1 (1959-1960), exp. nº 6, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1959-1960__13_1_A6_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
13e année, 1959/60, n° 6

14 décembre 1959

APPLICATION DE LA THÉORIE DE LESIEUR ET CROISOT AUX ORDRES MAXIMAUX RÉGULIERS NOETHÉRIENS À GAUCHE

par Guy MAURY

I. Introduction

La théorie des ordres maximaux a été faite par ASANO et publiée sous sa forme générale en novembre 1953, [3]. Un ordre maximal régulier est un anneau ou un demi-groupe non nécessairement commutatif, défini par certaines propriétés qui seront données dans la partie II. En 1956, LESIEUR et CROISOT ont publié leur "théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif", [6] et [7]. Je vais montrer dans cet exposé que, en utilisant cette dernière théorie, on peut affiner la théorie des ordres maximaux réguliers : un des résultats principaux est le suivant :

Dans un ordre maximal régulier $\mathcal{O}$, noethérien à gauche, tout idéal à gauche engendré par un élément simplifiable a de $\mathcal{O}$, soit $\mathcal{O}a$, est intersection d'un nombre fini d'idéaux "primaires" (au sens précisé dans la partie IV). Il y a unicité des radicaux de ces composants primaires et ce sont des idéaux premiers bilatères minimaux (au sens précisé dans la partie IV).

Un anneau, ordre maximal régulier, commutatif, noethérien, n'est pas autre chose qu'un anneau commutatif noethérien, intégralement clos. Appliqué à ce cas, le résultat cité se réduit à un théorème très classique sur les anneaux commutatifs noethériens intégralement clos. En complément, nous énonçons une caractérisation des ordres maximaux réguliers, noethériens à gauche, qui généralise une caractérisation bien connue dans le cas commutatif.

La lecture de cet exposé peut être très utilement préparée par la lecture du fascicule de P. DUBREIL, [4], et bien entendu par la lecture des deux mémoires dont il a été question ci-dessus.

II

Nous allons nous placer dans le cas d'un demi-groupe et nous allons donner les définitions dans ce cas, la transposition de ces définitions se fait facilement au cas d'un anneau [1].

DÉFINITION II.1. - Soit $\mathcal{O}$ un demi-groupe et soit M le demi-groupe des éléments de M simplifiables des deux côtés. Soit M' un sous-demi-groupe de M. Un demi-groupe S est dit *demi-groupe quotient à gauche de* $\mathcal{O}$ *selon* M' si :

1° S contient $\mathcal{O}$;

2° S a un élément unité 1 ;

3° Tout élément α de M' a un inverse α^{-1} dans S : $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$;

4° Pour tout élément x de S, il existe α, α de M', tel que $\alpha x \in \mathcal{O}$.

REMARQUE II.1. - On démontre, [2], que S existe, étant donnés $\mathcal{O}$ et M', si et seulement si, pour un élément a de $\mathcal{O}$, quelconque, et pour un élément α de M' quelconque, il existe des éléments a' et α', $a' \in \mathcal{O}$, $\alpha' \in M'$ tels que $a'\alpha = \alpha' a$. Ce demi-groupe quotient à gauche de S selon M' est alors déterminé à un isomorphisme près par $\mathcal{O}$ et M'.

REMARQUE II.2. - Si S est un demi-groupe quotient à gauche de $\mathcal{O}$ par M', alors pour tout α_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, éléments de M', il existe des éléments de $\mathcal{O}$, c_i, $i = 1, 2, \dots, n$, tels que :

$$\gamma = c_1\alpha_1 = c_2\alpha_2 = \dots = c_n\alpha_n, \quad \text{avec} \quad \gamma \in M' .$$

DÉFINITION II.2. - Si $M' = M$, S est appelé *le demi-groupe quotient à gauche de* $\mathcal{O}$. Si S est demi-groupe quotient à gauche et à droite de $\mathcal{O}$ [1], S est appelé *le demi-groupe quotient de* $\mathcal{O}$.

DÉFINITION II.3. - Un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de S est appelé un ordre de S, si :

1° $\mathcal{O}$ forme un sous-demi-groupe avec élément unité.

2° S est un demi-groupe quotient de $\mathcal{O}$ par $S^* \cap \mathcal{O}$, S^* désignant l'ensemble de tous les éléments de S ayant un inverse.

Dans la suite, un élément de S ayant un inverse sera dit *régulier*.

DÉFINITION II.4. - Soit $\mathcal{O}$ un ordre de S. Un sous-ensemble A de S est appelé un $\mathcal{O}$*-ensemble à gauche* (à droite), si l'on a $\mathcal{O}A \subseteq A$ $(A\mathcal{O} \subseteq A)$.

DÉFINITION II.5. - Un $\mathcal{O}$-ensemble à gauche (à droite) A est appelé un $\mathcal{O}$*-idéal à gauche* (à droite) de S, si A contient un élément régulier de S et s'il existe un élément régulier λ tel que $A\lambda \subseteq \mathcal{O}$, $(\lambda A \subseteq \mathcal{O})$.

A est appelé un $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}'$*-idéal*, s'il est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche et un $\mathcal{O}'$-idéal à droite. Un $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-idéal est appelé aussi un $\mathcal{O}$*-idéal bilatère* et même plus brièvement un $\mathcal{O}$*-idéal*.

---

[1] La définition d'un demi-groupe quotient à droite de $\mathcal{O}$ selon M', s'imagine sans peine.

REMARQUE II.3. - On peut supposer dans la définition (II.5) que λ appartient à $\mathcal{O}$.

REMARQUE II.4. - Soient A et B deux $\mathcal{O}$-idéaux à gauche (à droite, bilatères) de S. Alors $A \cup B$ et $A \cap B$ sont des $\mathcal{O}$-idéaux à gauche (à droite, bilatères) de S, (se reporter à la remarque 1.2).

Soient A un $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}'$-idéal, B un $\mathcal{O}'$-$\mathcal{O}''$-idéal, $AB = \{ab , a \in A , b \in B\}$ est un $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}''$-idéal ; il existe en effet μ tel que $B\mu \subseteq \mathcal{O}'$, donc $AB\mu \subseteq A\mathcal{O}' \subseteq A$ et il existe λ tel que $A\lambda \subseteq \mathcal{O}$, donc $AB\mu\lambda \subseteq \mathcal{O}$, $\mu\lambda$ étant régulier comme λ et μ. En particulier, le produit de deux $\mathcal{O}$-idéaux est un $\mathcal{O}$-idéal.

DÉFINITION II.6. - Deux sous-ensembles M et N de S sont dits <u>équivalents</u> s'il existe des éléments réguliers λ, μ, λ', μ' tels que :

$$\lambda N\mu \subseteq M \qquad \text{et} \qquad \lambda' M\mu' \subseteq N' \quad .$$

REMARQUE II.5. - En particulier, deux ordres de S sont dits équivalents, s'ils le sont en tant que sous-ensembles de S. Dans ce cas, λ et μ, éléments réguliers satisfaisant à $\lambda\mathcal{O}'\mu \subseteq \mathcal{O}$ peuvent être pris dans $\mathcal{O}$ (et de même λ', μ' dans $\mathcal{O}'$), car il existe des éléments réguliers α et β de $\mathcal{O}$, tels que $\alpha\lambda$ et $\mu\beta$ appartiennent à $\mathcal{O}$. On a alors :

$$\alpha\lambda\mathcal{O}'\mu\beta \subseteq \alpha\mathcal{O}\beta \subseteq \mathcal{O} \quad .$$

THÉORÈME II.1. - Soit A un $\mathcal{O}$-idéal à gauche, formons :

$$\mathcal{O}_\ell = \{x , x \in S , xA \subseteq A\} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_r = \{x , x \in S , Ax \subseteq A\} \quad .$$

$\mathcal{O}_\ell$ est un ordre contenant $\mathcal{O}$ et équivalent à $\mathcal{O}$. $\mathcal{O}_\ell$ est de plus un $\mathcal{O}$-idéal gauche. $\mathcal{O}_r$ est un ordre équivalent à $\mathcal{O}$ et A est un $\mathcal{O}_\ell$-$\mathcal{O}_r$-idéal.

DÉMONSTRATION. - $\mathcal{O}_\ell$ et $\mathcal{O}_r$ sont des demi-groupes contenant 1. Si λ et μ sont des éléments réguliers tels que : $\mu \in A$, $A\lambda \subseteq \mathcal{O}$, on peut écrire : $\mathcal{O}_\ell\mu\lambda \subseteq \mathcal{O}_\ell A\lambda \subseteq A\lambda \subseteq \mathcal{O}$. De plus $\mathcal{O}$ est contenu dans $\mathcal{O}_\ell$; $\mathcal{O}_\ell$ est donc un ordre équivalent à $\mathcal{O}$ et c'est aussi un $\mathcal{O}$-idéal à gauche.
On peut écrire successivement :

$$A\lambda A \subseteq \mathcal{O}A \subseteq A \ , \ \lambda A \subseteq \mathcal{O}_r \quad \text{et} \quad A\lambda \subseteq \mathcal{O}_\ell \ , \ \lambda\mathcal{O}\mu \subseteq \lambda A \subseteq \mathcal{O}_r \quad .$$

Le demi-groupe, contenant 1, $\mathcal{O}_r$ est un ordre : pour tout x appartenant à S, il existe α, appartenant à $S^* \cap \mathcal{O}$, tel que $a = \alpha\mu x\mu^{-1}$ appartient à $\mathcal{O}$.

Par suite, en posant $\alpha' = \lambda\alpha\mu$, $\alpha' \in S^* \cap \mathcal{O}_r$, $a' = \lambda a \mu$ appartient à $\mathcal{O}_r$ et l'on a $\alpha' x = a'$. De même pour tout x appartenant à S , il existe $\alpha'' \in S^* \cap \mathcal{O}_r$ tel que $x\alpha''$ appartient à $\mathcal{O}_r$.

On a aussi $\mu\mathcal{O}_r \subseteq A\,\mathcal{O}_r \subseteq A$, donc $\mu\mathcal{O}_r\lambda \subseteq A\lambda \subseteq \mathcal{O}$ et enfin $A\,\mathcal{O}_r \subseteq A$ et $\mathcal{O}_\ell\, A \subseteq A$. Tout ce qui précède montre que $\mathcal{O}_r$ est un ordre équivalent à $\mathcal{O}$ et que A est un $\mathcal{O}_\ell$ - $\mathcal{O}_r$-idéal.

DÉFINITION II.7. - $\mathcal{O}_\ell$ et. $\mathcal{O}_r$ sont appelés respectivement ordre à gauche et ordre à droite de A .

DÉFINITION II.8. - Un $\mathcal{O}$-idéal à gauche (à droite) A est dit entier si c'est un demi-groupe, ou encore si l'on a $A^2 \subseteq A$.

REMARQUE II.6. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° $A \subseteq \mathcal{O}_\ell$;
2° $A^2 \subseteq A$;
3° $A \subseteq \mathcal{O}_r$.

DÉFINITION II.9. - Un ordre de S est dit un <u>ordre maximal</u>, si tout ordre le contenant et équivalent à lui, lui est égal.

THÉORÈME II.2. - Soit $\mathcal{O}$ un ordre de S , les conditions suivantes sont équivalentes :

1° $\mathcal{O}$ est un ordre maximal ;

2° Il n'existe pas de $\mathcal{O}$-idéal à gauche (à droite) entier, contenant $\mathcal{O}$, qui ne soit pas égal à $\mathcal{O}$;

3° L'ordre à gauche d'un $\mathcal{O}$-idéal à gauche quelconque est $\mathcal{O}$, et l'ordre à droite d'un $\mathcal{O}$-idéal à droite quelconque est $\mathcal{O}$.

4° L'ordre à droite et l'ordre à gauche d'un $\mathcal{O}$-idéal bilatère quelconque est $\mathcal{O}$.

DÉMONSTRATION. - La condition 1 entraîne la condition 2. Celle-ci entraîne la condition 3 qui entraîne la condition 4. Montrons que la condition 4 entraîne la condition 1. D'abord, sous l'hypothèse exprimée par la condition 4 , si M est un $\mathcal{O}$-ensemble à gauche contenu dans S et tel que l'on ait $\lambda M \subseteq \mathcal{O}$, $\lambda \in S^* \cap \mathcal{O}$; on a aussi $M\lambda \subseteq \mathcal{O}$. En effet, on peut écrire successivement :

$\mathcal{O}\lambda\mathcal{O}M\lambda = \mathcal{O}\lambda M\lambda \subseteq \mathcal{O}\lambda \subseteq \mathcal{O}\lambda\mathcal{O}$, et comme $\mathcal{O}\lambda\mathcal{O}$ est contenu dans $\mathcal{O}$, on a $M\lambda \subseteq \mathcal{O}$.

Soit maintenant $\mathcal{O}'$ un ordre équivalent à $\mathcal{O}$ et contenant $\mathcal{O}$: il existe des éléments λ et μ de $S^* \cap \mathcal{O}$ tels que : $\lambda \mathcal{O}'\mu \subseteq \mathcal{O}$. D'après ce que l'on vient de voir, on a $\mathcal{O}'\mu\lambda \subseteq \mathcal{O}$ et de même $\mu\lambda\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$. $\mathcal{O}'$ est donc un $\mathcal{O}$-idéal bilatère dont l'ordre à gauche est par suite $\mathcal{O}$. Mais de $\mathcal{O}'\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}'$, on déduit $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$ et $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$.

REMARQUE II.7. - D'après ce théorème, un $\mathcal{O}$-idéal à gauche (à droite) est entier si et seulement s'il est contenu dans $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ étant un ordre maximal. De plus chaque $\mathcal{O}$-ensemble à gauche équivalent à un ordre maximal $\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche, (se reporter au début de la démonstration du théorème I.2).

REMARQUE II.8. - Comme il est équivalent d'écrire $Ac \subseteq \mathcal{O}_\ell$, ou $AcA \subseteq A$, ou $cA \subseteq \mathcal{O}_r$, A étant un $\mathcal{O}$-idéal à gauche (à droite) quelconque, $\mathcal{O}$ étant un ordre quelconque de S, $\mathcal{O}_\ell$ et $\mathcal{O}_r$ étant respectivement les ordres à gauche et à droite de A, l'ensemble noté A^{-1} de tous les éléments c de S tels que $AcA \subseteq A$ est aussi l'ensemble de tous les éléments c de S tels que $Ac \subseteq \mathcal{O}_\ell$, ou encore l'ensemble de tous les éléments c de S tels que $cA \subseteq \mathcal{O}_r$. On pourra vérifier que A^{-1} est un $\mathcal{O}_r$-$\mathcal{O}_\ell$-idéal. (En prenant la notation des résiduels, $A^{-1} = \mathcal{O}_\ell \cdot\!\cdot A = \mathcal{O}_r \cdot\!\cdot A$).

DÉFINITION II.10. - Un ordre $\mathcal{O}$ de S est dit <u>régulier</u>, quand pour chaque élément x de S, il existe des éléments réguliers α, β de $\mathcal{O}$, tels que :

$$x\mathcal{O}\alpha \subseteq \mathcal{O}, \quad \beta\mathcal{O}x \subseteq \mathcal{O} \quad .$$

THÉORÈME II.3. - Soit $\mathcal{O}$ un ordre de S, les conditions suivantes sont équivalentes :

1° $\mathcal{O}$ est régulier ;

2° Pour chaque x, $x \in S$, il existe un $\mathcal{O}$-idéal bilatère contenant x ;

3° Pour tout élément μ de S^*, $\mathcal{O}\mu\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère ;

4° Si M est un sous-ensemble de S et si $\lambda M \mu \subseteq \mathcal{O}$, $\lambda, \mu \in S^* \cap \mathcal{O}$, il existe des éléments réguliers α, β appartenant à $\mathcal{O}$, tels que $\alpha M \subseteq \mathcal{O}$ et $M\beta \subseteq \mathcal{O}$.

5° Pour chaque élément régulier α de $\mathcal{O}$, il existe α' et α'' appartenant à $S^* \cap \mathcal{O}$, tels que $\mathcal{O}\alpha \supseteq \alpha'\mathcal{O}$, $\alpha\mathcal{O} \supseteq \mathcal{O}\alpha''$.

6° Chaque $\mathcal{O}$-idéal à gauche (à droite) contient un $\mathcal{O}$-idéal bilatère. Nous ne donnerons pas la démonstration de ce théorème qui ne soulève pas de difficultés.

DÉFINITION II.11. - Un $\mathcal{O}$-idéal à gauche (à droite) A est dit <u>normal</u>, $\mathcal{O}$ étant un ordre quelconque de S, si les ordres à gauche et à droite de $\mathcal{O}$ sont maximaux.

III

1. Nous supposons que $\mathcal{O}$ est un ordre maximal de S. Alors l'ordre à gauche (à droite) d'un $\mathcal{O}$-idéal à gauche (à droite) est $\mathcal{O}$; les $\mathcal{O}$-idéaux bilatères ont donc $\mathcal{O}$ pour ordre à droite et à gauche (théorème II.2). Les $\mathcal{O}$-idéaux à gauche (à droite) entiers sont ceux qui sont compris dans $\mathcal{O}$, (remarque II.6). Soit (L) le treillis des $\mathcal{O}$-idéaux à gauche, $(\mathcal{C})$ le sous-treillis des $\mathcal{O}$-idéaux bilatères, (L') le sous-treillis des $\mathcal{O}$-idéaux à gauche entiers, $(\mathcal{C}')$ le sous treillis des $\mathcal{O}$-idéaux bilatères entiers, (remarque II.4).

Dans la suite, nous noterons par une majuscule d'imprimerie un $\mathcal{O}$-idéal d'un côté et par une majuscule italique un $\mathcal{O}$-idéal bilatère.

Considérons dans (L) la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

A , $B \in (L)$, $A \equiv B(\mathcal{R}) \Longleftrightarrow A^{-1} = B^{-1}$ (ou encore $\mathcal{O} .\cdot A = \mathcal{O} .\cdot B$), (remarque II,8).

Soit $\mathcal{R}'$ la restriction de $\mathcal{R}$ à $(\mathcal{C})$:

$$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in (\mathcal{C}) , \ \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}(\mathcal{R}') \Leftrightarrow \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{B}^{-1} \text{ (ou encore } \mathcal{O} .\cdot \mathcal{A} = \mathcal{O} \cdot . \mathcal{A}$$
$$= \mathcal{O} .\cdot \mathcal{B} = \mathcal{O} \cdot . \mathcal{B} \text{), (remarque II.8).}$$

Soit $\bar{A}$ la classe de A , $A \in (L)$; $(\bar{L})$ sera l'ensemble quotient $(L)/\mathcal{R}$, $(\bar{L'})$ l'ensemble quotient $(L')/\mathcal{R}$, $(\bar{\bar{\mathcal{C}}})$ désignera l'ensemble quotient $(\mathcal{C})/\mathcal{R}'$, $(\bar{\bar{\mathcal{C}}}')$ l'ensemble quotient $(\mathcal{C}')/\mathcal{R}'$, $\bar{\bar{\mathcal{A}}}$ désignera la classe de $\mathcal{A}$ modulo $\mathcal{R}'$, ($\bar{\mathcal{A}}$ désignant la classe de $\mathcal{A}$ modulo $\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$ étant considéré comme élément de (L)).

2. <u>Propriétés de la relation</u> $\mathcal{R}$.

PROPRIÉTÉ III.1. - Toute classe $\bar{A}$ a un élément maximum

$$A^{*} = (A^{-1})^{-1} = \mathcal{O} \cdot .(\mathcal{O} .\cdot A) , \quad A \in (L) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - En effet, d'abord, $(A^{-1})^{-1}$ est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche comme A puisque A^{-1} est un $\mathcal{O}$-idéal à droite (remarque II.8). Ensuite $\mathcal{O} .\cdot A = \mathcal{O} .\cdot A^{*} = \mathcal{O} .\cdot [\mathcal{O} \cdot .(\mathcal{O} .\cdot A)]$, d'après une propriété bien connue des résiduels. Enfin $A \subseteq \mathcal{O} \cdot .(\mathcal{O} .\cdot A) = A^{*}$. On déduit de cette propriété que $A^{**} = \mathcal{O} \cdot . (\mathcal{O} .\cdot A^{*})$ est égal à A^{*} .

PROPRIÉTÉ III.2. - $\mathcal{R}$ est régulière pour l'union de (L) : dans $(\bar{L})$ on peut définir une union $\bar{\cup}$: $\bar{A} \,\bar{\cup}\, \bar{B} = \overline{A \cup B}$, A , $B \in (L)$.

DÉMONSTRATION. - En effet si $B \equiv B'(\mathcal{R})$, B , $B' \in (L)$, on a, quel soit $A \in (L)$: $A \cup B \equiv A \cup B'(\mathcal{R})$, car

$$\mathcal{O} .^{\bullet} (A \cup B) = (\mathcal{O} .^{\bullet} A) \cap (\mathcal{O} .^{\bullet} B) = (\mathcal{O} .^{\bullet} A) \cap (\mathcal{O} .^{\bullet} B') = \mathcal{O} .^{\bullet} (A \cup B') \quad .$$

PROPRIÉTÉ III.3. - On peut définir dans $(\bar{L})$ une intersection $\bar{\cap}$ de la façon suivante : A , $B \in (L)$, $\bar{A} \bar{\cap} \bar{B} = \overline{A^* \cap B^*}$. De plus $A^* \cap B^*$ est élément maximum de sa classe $\bar{A} \bar{\cap} \bar{B}$. Ainsi $(\bar{L})$ est un treillis, $(\bar{L}')$ un sous-treillis de $(\bar{L})$.

DÉMONSTRATION. - D'abord l'union dans $(\bar{L})$ permet de définir dans (L) une relation d'ordre $\leq$: $\bar{A} \leq \bar{B}$, si $\bar{A} \bar{\cup} \bar{B} = \bar{B}$ ou encore si $A^* \subseteq B^*$. Montrons que $\bar{A} \bar{\cap} \bar{B}$ est la borne inférieure de $\bar{A}$ et $\bar{B}$: soit $\bar{C} \leq \bar{A}$; $\bar{C} \leq \bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{A}$, $\bar{B} \in (\bar{L})$. On en déduit $C^* \subseteq A^*$, $C^* \subseteq B^*$ et $C^* \subseteq A^* \cap B^*$, ou encore $\bar{C} \leq \overline{A^* \cap B^*} = \bar{A} \bar{\cap} \bar{B}$. Montrons maintenant que $C = A^* \cap B^*$ est maximum dans sa classe : on a $C \subseteq A^*$, $C \subseteq B^*$ et $\mathcal{O} .^{\bullet} C \supseteq \mathcal{O} .^{\bullet} A^*$, $\mathcal{O} {}^{\bullet}. (\mathcal{O} .^{\bullet} C) \subseteq \mathcal{O} {}^{\bullet}. (\mathcal{O} .^{\bullet} A^*)$ c'est-à-dire $C^* \subseteq A^*$, d'après les propriétés bien connues de la résiduation, et d'après la propriété III.1. De même, on a $C^* \subseteq B^*$, donc $C^* \subseteq A^* \cap B^*$ et par ailleurs $C^* \supseteq A^* \cap B^* = C$. On déduit donc $C^* = A^* \cap B^* = C$.

PROPRIÉTÉ III.4. - On peut définir le produit $\bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{X}$ d'un élément $\bar{\bar{\mathcal{A}}} \in (\bar{\bar{\mathcal{C}}})$ par un élément $\bar{X} \in (\bar{L})$ de la façon suivante : c'est la classe $\overline{\mathcal{A}X}$ du produit $\mathcal{A}X$, $\mathcal{A}X \in (L)$, $\mathcal{A} \in \bar{\bar{\mathcal{A}}}$, $X \in \bar{X}$.

DÉMONSTRATION. - Si $\mathcal{A} \in (\mathcal{C})$, $X \in (L)$, il est facile de vérifier d'abord que $\mathcal{A}X$ appartient à (L) . Il faut ensuite montrer que si X et Y appartiennent à (L) , avec $\mathcal{A} \in (\mathcal{C})$, $X \equiv Y(\mathcal{R})$, on a $\mathcal{A}X \equiv \mathcal{A}Y(\mathcal{R})$, et d'autre part, que, si $X \in (L)$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in (\mathcal{C})$, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}(\mathcal{R}')$, on a $\mathcal{A}X \equiv \mathcal{B}X(\mathcal{R})$. Pour la seconde partie, il suffit de remarquer que $\mathcal{O} .^{\bullet} \mathcal{A}X = \mathcal{O} .^{\bullet} \mathcal{B}X$; en effet

$$\mathcal{O} .^{\bullet} \mathcal{A}X = (\mathcal{O} .^{\bullet} \mathcal{A}) .^{\bullet} X = (\mathcal{O} .^{\bullet} \mathcal{B}) .^{\bullet} X = \mathcal{O} .^{\bullet} \mathcal{B}X \quad .$$

Pour la première partie, posons $\mathcal{O} .^{\bullet} \mathcal{A}X = V$ et $\mathcal{O} .^{\bullet} \mathcal{A}Y = V'$. On a successivement :

$$\mathcal{A}XV \subseteq \mathcal{O} , \quad XV \subseteq \mathcal{O} .^{\bullet} \mathcal{A} = \mathcal{O} {}^{\bullet}. \mathcal{A} , \quad XV\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O} , \quad V\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O} .^{\bullet} X ,$$

$$V\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O} .^{\bullet} Y , \quad YV\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O} , \quad YV \subseteq \mathcal{O} {}^{\bullet}. \mathcal{A} = \mathcal{O} .^{\bullet} \mathcal{A} ,$$

$$\mathcal{A}YV \subseteq \mathcal{O} , \quad V \subseteq \mathcal{O} .^{\bullet} \mathcal{A}Y , \quad V \subseteq V' \quad .$$

De même, on démontrerait $V' \subseteq V$ et $V = V'$.

PROPRIÉTÉ III.5. - On a les propriétés suivantes du produit $\bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{X}$:

(C_1) : $\bar{\bar{\mathcal{A}}}(\bar{X} \bar{\cup} \bar{Y}) = \bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{X} \bar{\cup} \bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{Y}$.

(C_2) : $(\bar{\bar{\mathcal{A}}} \bar{\cup} \bar{\bar{\mathcal{B}}})\bar{X} = \bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{X} \bar{\cup} \bar{\bar{\mathcal{B}}}\bar{X}$.

(C_3) : $(\bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{\bar{\mathcal{B}}})\bar{X} = \bar{\bar{\mathcal{A}}}(\bar{\bar{\mathcal{B}}}\bar{X})$.

(C_4) : $\bar{\bar{\mathcal{O}}}\bar{X} = \bar{X}$.

(C_5) : Pour tout couple $\bar{X} \in (\bar{L}')$, $\bar{\bar{\mathcal{A}}} \in (\bar{\mathcal{C}}')$, il existe un $\bar{Y} \in (\bar{L}')$ tel que $\bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{Y} \leq \bar{X}$ et l'ensemble des $\bar{Y}$ ayant ces propriétés admet un élément maximum noté $\bar{X}. \cdot \bar{\bar{\mathcal{A}}}$.

(C_6) : Pour tout couple $\bar{X} \in (\bar{L}')$, $\bar{Y} \in (\bar{L}')$, si de plus $\mathcal{O}$ est un ordre régulier, il existe un $\bar{\bar{\mathcal{A}}} \in (\bar{\mathcal{C}}')$ tel que $\bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{Y} \leq \bar{X}$ et l'ensemble des $\bar{\bar{\mathcal{A}}}$ ayant ces propriétés admet un élément maximum noté $\bar{X}^\circ . \bar{Y}$.

DÉMONSTRATION. - Pour démontrer les propriétés (C_1) , (C_2) , (C_3) , (C_4) il suffit de prendre des représentants dans les différentes classes. Démontrons (C_5) :

Soit X^* l'élément maximum de $\bar{X}$, on a $X^* \subseteq \mathcal{O}$. Soit $\mathcal{A}$ un élément de $(\mathcal{C}')$, appartenant à la classe $\bar{\bar{\mathcal{A}}} \in (\bar{\mathcal{C}}')$, $\mathcal{A}$ est compris dans $\mathcal{O}$. Considérons l'ensemble des éléments x de $\mathcal{O}$ tels que $\mathcal{A}x \subsetneq X^*$: c'est un $\mathcal{O}$-ensemble à gauche compris dans $\mathcal{O}$ et qui comprend évidemment X^* , c'est donc un $\mathcal{O}$-idéal à gauche compris dans $\mathcal{O}$, noté Y et l'on a $\mathcal{A}Y \subseteq X^*$, donc $\bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{Y} \leq \bar{X}$. Réciproquement, soit $\bar{Y}' \in (\bar{L}')$, tel que $\bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{Y}' \leq \bar{X}$. Pour un représentant Y' de $\bar{Y}'$, on a $\mathcal{A}Y' \subsetneq X^*$, $\mathcal{A}$ étant le représentant de la classe $\bar{\bar{\mathcal{A}}}$, déjà considéré plus haut. On déduit $Y' \subsetneq Y$, d'ou $\bar{Y}' \leq \bar{Y}$.

Démontrons (C_6) sous l'hypothèse supplémentaire que $\mathcal{O}$ est régulier :

Soit X^* l'élément maximum de $\bar{X}$, on a $X^* \subsetneq \mathcal{O}$. Soit $Y \in (L')$ un représentant de $\bar{Y} \in (\bar{L}')$, on a $Y \subsetneq \mathcal{O}$. Considérons l'ensemble des x , $x \in \mathcal{O}$, tels que $xY \subseteq X^*$. C'est un $\mathcal{O}$-ensemble à droite et à gauche compris dans $\mathcal{O}$; pour montrer que c'est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère $\mathcal{A}$, il suffit de montrer qu'il contient un élément régulier β . $\mathcal{O}$ étant régulier, et α étant un élément régulier de X^* , il existe un élément régulier β de X^* , tel que $X^* \supsetneq \mathcal{O}\alpha \supseteq \beta\mathcal{O}$ (théorème II.3) et par suite $\beta Y \subsetneq \beta\mathcal{O} \subseteq X^*$ et β appartient à $\mathcal{A}$. Ceci étant, on a $\mathcal{A}Y \subseteq X^*$, donc $\bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{Y} \leq \bar{X}$. Réciproquement, soit $\bar{\bar{\mathcal{A}}}' \in (\bar{\mathcal{C}}')$, tel que $\bar{\bar{\mathcal{A}}}'\bar{Y} \leq \bar{X}$, alors $\mathcal{A}'$ étant un représentant dans $(\mathcal{C}')$ de $\bar{\bar{\mathcal{A}}}'$, on en déduit $\mathcal{A}'Y \subsetneq X^*$ et par suite $\mathcal{A}' \subsetneq \mathcal{A}$ donc $\bar{\bar{\mathcal{A}}}' \leq \bar{\bar{\mathcal{A}}}$. (2) .

PROPRIÉTÉ III.6. - $(\bar{\mathcal{C}})$ est un groupe réticulé commutatif.

Nous renvoyons à la démonstration d'ASANO [3].

(2) Dans les démonstrations de (C_5) et (C_6), on se place dans le cas d'un demi- groupe $\mathcal{O}$. La démonstration dans le cas d'un anneau $\mathcal{O}$ se fait en calquant ces dernières.

PROPRIÉTÉ III.7. - $(\bar{L}')$ et $(\bar{\mathcal{T}}')$ sont des treillis modulaires.

DÉMONSTRATION. - $(\bar{\mathcal{T}})$, en tant que groupe réticulé, est un treillis distributif donc modulaire, donc aussi $(\bar{\mathcal{T}}')$. Démontrons que $(\bar{L}')$ est modulaire : il faut montrer que :

(1) $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C} \in (\bar{L}')$, $\bar{A} \leq \bar{C}$, entraînent $\bar{A} \,\bar{\cup}\, (\bar{B} \,\bar{\cap}\, \bar{C}) = (\bar{A} \,\bar{\cup}\, \bar{B}) \cap \bar{C}$.

Or, par définition, $\bar{B} \,\bar{\cap}\, \bar{C}$ est égal à $\overline{B^* \cap C^*}$, en désignant par A^*, B^*, C^* les éléments maximums de $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ respectivement. Donc le premier membre de l'égalité (1) est égal à $\overline{A^* \cup (B^* \cap C^*)}$ et comme l'on a $B^* \subseteq C^*$ et comme (L') est modulaire, il est aussi égal à $\overline{(A^* \cup B^*) \cap C^*}$ c'est-à-dire à $(\bar{A} \,\bar{\cup}\, \bar{B}) \,\bar{\cap}\, \bar{C}$.

PROPRIÉTÉ III.8. - Si (L') vérifie la condition de chaîne ascendante, il en est de même de $(\bar{L}')$ et de $(\bar{\mathcal{T}}')$.

PROPRIÉTÉ III.9. - Soient $\bar{X}'$, $\bar{B} \in (\bar{L}')$, $\bar{\bar{\mathcal{A}}} \in (\bar{\mathcal{T}}')$, tels que $\bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{B} \geq \bar{X}'$; il existe $\bar{X}$ tel que $\bar{X} \in (\bar{L}')$, $\bar{X} \leq \bar{B}$, $\bar{X}' = \bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{X}$.
On exprime ceci en disant que tout élément $\bar{\bar{\mathcal{A}}}$, $\bar{\bar{\mathcal{A}}} \in (\bar{\mathcal{T}}')$, est $(\bar{L}')$-<u>principal</u>. ([6], paragraphe 1 et paragraphe 7, page 107).

DÉMONSTRATION. - Considérons $\bar{\bar{\mathcal{A}}}^{-1} \in (\bar{\mathcal{T}})$ et $\bar{X} = \bar{\bar{\mathcal{A}}}^{-1}\,\bar{X}'$; on a :

$$\bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{X} = \bar{\bar{\mathcal{A}}}(\bar{\bar{\mathcal{A}}}^{-1}\,\bar{X}') = (\bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{\bar{\mathcal{A}}}^{-1})\,\bar{X}' = \bar{X}' .$$

De plus, on a

$$\bar{X} = \bar{\bar{\mathcal{A}}}^{-1}\,\bar{X}' \leq \bar{\bar{\mathcal{A}}}^{-1}(\bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{B}) = \bar{B} .$$

IV

$\mathcal{O}$ est supposé dans cette partie, sauf mention contraire, un ordre maximal régulier, noethérien à gauche.

Conformément au mémoire [6] , nous introduisons les définitions suivantes :

DÉFINITION IV.1. - Un élément $\bar{\bar{\mathcal{A}}}$, $\bar{\bar{\mathcal{A}}} \in (\bar{\mathcal{T}}')$, sera dit <u>premier</u> si :
$\bar{\bar{\mathcal{B}}}$, $\bar{\bar{\mathcal{C}}} \in (\bar{\mathcal{T}}')$, $\bar{\bar{\mathcal{B}}}\bar{\bar{\mathcal{C}}} \leq \bar{\bar{\mathcal{A}}}$ entraînent $\bar{\bar{\mathcal{B}}} \leq \bar{\bar{\mathcal{A}}}$ ou $\bar{\bar{\mathcal{C}}} \leq \bar{\bar{\mathcal{A}}}$.

DÉFINITION IV.2. - Un élément $\bar{X}$, $\bar{X} \in (\bar{L}')$, sera dit <u>primaire</u> si :
$\bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{X}' \leq \bar{X}$, $\bar{X}' \in (\bar{L}')$, $\bar{\bar{\mathcal{A}}} \in (\bar{\mathcal{T}}')$, $\bar{X}' \not\leq \bar{X}$, entraînent l'existence d'un entier naturel k tel que $\bar{\bar{\mathcal{A}}}^k \leq \bar{X}^{\bullet}.\bar{\mathcal{O}}$, ou tel que, ce qui est équivalent, $\bar{\bar{\mathcal{A}}}^k \leq \bar{X}$.

PROPRIÉTÉ IV.1. - Soit $\bar{X}$ élément primaire de $(\bar{L}')$, l'ensemble des éléments

$\bar{\bar{\mathcal{A}}}$ de $(\bar{\mathcal{T}}')$ pour lesquels il existe un entier naturel k, tel que $\bar{\mathcal{A}}^k \leq \bar{X}$, a un élément maximum $\bar{\mathcal{P}}$, qui est un élément premier de $(\bar{\mathcal{T}}')$. Cet élément se nomme le radical de $\bar{X}$.

DÉMONSTRATION. - La démonstration est donnée au mémoire [6], page 90 ; on remarquera en effet que les treillis $(\bar{\mathcal{T}}')$ et $(\bar{L}')$ satisfont aux hypothèses générales vérifiées par les treillis (τ) et (L) de ce mémoire (pages 81-83), d'après les propriétés énoncées à la partie III.

THÉORÈME IV.1. - Tout élément de $(\bar{L}')$ est intersection d'un nombre fini d'éléments primaires et la décomposition peut être réduite. Il y a unicité des éléments de $(\bar{\mathcal{T}}')$, radicaux de ces composants primaires.

DÉMONSTRATION. - Il suffit de se reporter au mémoire [6] (page 108, théorème 7.1 et pages 112, 113, théorèmes 8.1 et 8.2), en utilisant les propriétés de la partie III et notamment la propriété III.9.

DÉFINITION IV.3 [3]. - Un élément $\mathcal{P}$ de $(\mathcal{T}')$ est dit premier si : $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in (\mathcal{T}')$, $\mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$ entraînent soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$, soit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$.

DÉFINITION IV.4 [3]. - Un élément X de (L') est dit primaire si : $\mathcal{A} \in (\mathcal{T}')$, $Y \in (L')$, $\mathcal{A}Y \subseteq X$, $Y \not\subseteq X$, entraînent qu'il existe un nombre naturel k tel que $\mathcal{A}^k \subseteq X$.

DÉFINITION IV.5 [3]. - Un élément $\mathcal{C}$ de $(\mathcal{T}')$ sera dit primaire à gauche dans $(\mathcal{T}')$ si $\mathcal{A} \in (\mathcal{T}')$, $\mathcal{B} \in (\mathcal{T}')$, $\mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, $\mathcal{B} \not\subseteq \mathcal{C}$, entraînent qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{A}^k \subseteq \mathcal{C}$.

DÉFINITION IV.6. - Un élément $\mathcal{C}$ de $(\mathcal{T}')$ sera dit primaire à droite dans $(\mathcal{T}')$ si : $\mathcal{A} \in (\mathcal{T}')$, $\mathcal{B} \in (\mathcal{T}')$, $\mathcal{B}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, $\mathcal{B} \not\subseteq \mathcal{C}$, entraînent qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{A}^k \subseteq \mathcal{C}$.

DÉFINITION IV.6 bis. - Un élément $\mathcal{C}$ de $(\mathcal{T}')$ sera dit primaire dans $(\mathcal{T}')$, s'il est à la fois primaire à droite et primaire à gauche.

THÉORÈME IV.2. - Toute classe première $\bar{\bar{\mathcal{P}}}$ de $(\bar{\mathcal{T}}')$ différente de $\bar{\bar{\mathcal{O}}}$ a pour élément maximum $\mathcal{P}^*$ de $(\mathcal{T}')$, $\mathcal{P}^* \neq \mathcal{O}$, premier. Réciproquement, tout élément premier $\mathcal{P}$ de $(\mathcal{T}')$ non équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}'$ est maximum dans sa classe $\bar{\bar{\mathcal{P}}}$. $\bar{\bar{\mathcal{P}}}$ est un élément premier de $(\bar{\mathcal{T}}')$, et si l'on a $\mathcal{C} \in (\mathcal{T}')$, tel que $\mathcal{P} \subset \mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}$, l'on déduit $\mathcal{C} \equiv \mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}'$.

---

[3] Dans ces définitions, $\mathcal{O}$ est un ordre quelconque noethérien à gauche.

DÉMONSTRATION. - Nous pouvons remarquer que l'élément $\mathcal{P}^*$ de la classe $\bar{\mathcal{P}}$, d'un $\mathcal{O}$-idéal bilatère $\mathcal{P}$, est l'élément maximum de la classe $\bar{\bar{\mathcal{P}}}$. Supposons que l'on ait $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in (\mathcal{C}')$, $\mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}^*$ et par exemple $\mathcal{A} \nsubseteq \mathcal{P}^*$. On en déduit : $\bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{\bar{\mathcal{B}}} \leq \bar{\bar{\mathcal{P}}}$ et $\mathcal{A} \nleq \mathcal{P}$, ce qui entraîne, puisque $\bar{\bar{\mathcal{P}}}$ est premier : $\bar{\bar{\mathcal{B}}} \leq \bar{\bar{\mathcal{P}}}$, donc $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}^*$. Réciproquement, soit $\mathcal{P}$ un élément premier de $(\mathcal{C}')$ et non équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}'$. Soit $\mathcal{A}$ un élément de $(\mathcal{C}')$ appartenant à $\bar{\bar{\mathcal{P}}}$: on a $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{P}^{-1}$ et $\mathcal{P}\mathcal{U} = \mathcal{V}\mathcal{A}$, en posant $\mathcal{U} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}$, $\mathcal{V} = \mathcal{P}\mathcal{P}^{-1}$; on a $\mathcal{U} \equiv \mathcal{V} \equiv \mathcal{O}(\mathcal{R}')$, donc $\mathcal{V}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$. Or $\mathcal{A} \nsubseteq \mathcal{P}$ est impossible, puisque cela entraînerait $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}$ donc $\bar{\bar{\mathcal{P}}} = \bar{\bar{\mathcal{O}}}$. On déduit donc que $\mathcal{A}$ est compris dans $\mathcal{P}$ ou encore que $\mathcal{P}$ est maximum dans sa classe $\bar{\bar{\mathcal{P}}}$. D'autre part $\bar{\bar{\mathcal{P}}}$ est élément premier de $(\bar{\mathcal{C}}')$, car $\bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{\bar{\mathcal{B}}} \leq \bar{\bar{\mathcal{P}}}$, $\bar{\bar{\mathcal{A}}} \nleq \bar{\bar{\mathcal{P}}}$, entraînent, en prenant des représentants $\mathcal{A}$ dans $\bar{\bar{\mathcal{A}}}$, $\mathcal{B}$ dans $\bar{\bar{\mathcal{B}}}$: $\mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{A} \nsubseteq \mathcal{P}$ et par suite, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$ et $\bar{\bar{\mathcal{B}}} \leq \bar{\bar{\mathcal{P}}}$.

On sait que $\bar{\bar{\mathcal{P}}}$, élément premier de $(\bar{\mathcal{C}}')$, est maximal dans $(\bar{\mathcal{C}}')$, (c'est une propriété bien connue des éléments entiers d'un groupe réticulé). Par suite $\mathcal{P} \subset \mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}$, $\mathcal{P}$ étant un élément premier de $(\mathcal{C}')$, $\mathcal{C} \in (\mathcal{C}')$, entraînent $\bar{\bar{\mathcal{P}}} < \bar{\bar{\mathcal{C}}} \leq \bar{\bar{\mathcal{O}}}$ et $\bar{\bar{\mathcal{C}}} = \bar{\bar{\mathcal{O}}}$.

THÉORÈME IV.3. - Toute classe primaire dans $(\bar{\mathcal{C}}')$ différente de $\bar{\mathcal{O}}$, a pour élément maximum un élément primaire dans $(\mathcal{C}')$. Réciproquement, tout élément de $(\mathcal{C}')$ primaire à gauche (à droite) dans $(\mathcal{C}')$ non équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}'$ est maximum dans sa classe. Celle-ci est un élément primaire de $(\bar{\mathcal{C}}')$ et tout élément primaire à gauche (à droite) dans $(\mathcal{C}')$ est primaire dans $(\mathcal{C}')$ (4).

DÉMONSTRATION. - Rappelons que $(\bar{\mathcal{C}}')$ est commutatif et que, par suite, "primaire dans $(\bar{\mathcal{C}}')$" s'entend au sens habituel. Soit $\bar{\bar{\mathcal{C}}}$ un élément primaire dans $(\bar{\mathcal{C}}')$, $\mathcal{C}^*$ l'élément maximum de $\bar{\bar{\mathcal{C}}}$; soient $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in (\mathcal{C}')$ tels que $\mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}^*$, $\mathcal{B} \nsubseteq \mathcal{C}^*$. On déduit $\bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{\bar{\mathcal{B}}} \leq \bar{\bar{\mathcal{C}}}$ avec $\bar{\bar{\mathcal{B}}} \nleq \bar{\bar{\mathcal{C}}}$, d'où, k étant un entier naturel, $\bar{\bar{\mathcal{A}}}^k \leq \bar{\bar{\mathcal{C}}}$, et par suite $\mathcal{A}^k \leq \mathcal{C}^*$, ce qui montre que $\mathcal{C}^*$ est primaire à gauche dans $(\mathcal{C}')$. De même, on montrerait que $\mathcal{C}^*$ est primaire à droite dans $(\mathcal{C}')$.

Réciproquement, soit $\mathcal{C}$ un élément primaire à droite dans $(\mathcal{C}')$ non équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}'$ et soit $\bar{\bar{\mathcal{C}}}$ sa classe dans $(\bar{\mathcal{C}}')$. Soit $\mathcal{C}^*$ l'élément maximum de $\bar{\bar{\mathcal{C}}}$. Montrons que $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}$. De $\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}^{*-1}$, on déduit $\mathcal{C}^*\mathcal{C}^{*-1}\mathcal{C} = \mathcal{C}^*\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$. Or $\mathcal{E} = \mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère appartenant à $(\mathcal{C}')$ et l'on a $\mathcal{C}^*\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$, car $\mathcal{C}^*\mathcal{C}^{*-1}$ est un élément de $(\mathcal{C}')$.

---

(4) Pour le cas où $\mathcal{O}$ est commutatif, se reporter par exemple au mémoire [4].

Comme, pour tout entier naturel k, on a $\mathcal{E}^k \not\leq \mathcal{C}$, puisque $\mathcal{E}$ est congru à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}'$, on en déduit $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}$, puisque $\mathcal{C}$ est primaire à droite dans $(\mathcal{G}')$. Soit alors $\bar{\bar{\mathcal{A}}}$, $\bar{\bar{\mathcal{B}}} \in (\bar{\bar{\mathcal{G}}}')$, tels que $\bar{\bar{\mathcal{A}}}\bar{\bar{\mathcal{B}}} \leq \bar{\bar{\mathcal{C}}}$, $\bar{\bar{\mathcal{A}}} \not\leq \bar{\bar{\mathcal{C}}}$. On en déduit, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ étant des représentants de $\bar{\bar{\mathcal{A}}}$ et $\bar{\bar{\mathcal{B}}}$ respectivement : $\mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{C}$ et, $\mathcal{C}$ étant primaire à droite dans $(\mathcal{G}')$, $\mathcal{B}^k \subseteq \mathcal{C}$, pour un entier naturel k, donc $\bar{\bar{\mathcal{B}}}^k \leq \bar{\bar{\mathcal{C}}}$, ce qui montre que $\bar{\bar{\mathcal{C}}}$ est primaire. Par suite, d'après la première partie de la démonstration, $\mathcal{C}$ est aussi primaire à gauche dans $(\mathcal{G}')$ donc primaire dans $(\mathcal{G}')$.

THÉORÈME IV.4. - Toute classe primaire $\bar{X}$ de $(\bar{L}')$ différente de $\bar{\mathcal{O}}$, a pour élément maximum un élément primaire de (L') X^*, non équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}$. Le radical de $\bar{X}$ a pour élément maximum le radical de X^* (5) qui n'est pas équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}$.

DÉMONSTRATION. - Soit $\bar{X} \in (\bar{L}')$, primaire et soit X^* l'élément maximum de $\bar{X}$. On a $X^* \subseteq \mathcal{O}$. Soient $\mathcal{A} \in (\mathcal{G}')$, $Y \in (L')$, avec $Y \not\subseteq X^*$, $\mathcal{A}Y \subseteq X^*$. On en déduit $\bar{\mathcal{A}}\bar{Y} \leq \bar{X}$, $\bar{Y} \not\leq \bar{X}$ et par suite, il existe un entier naturel k tel que $\bar{\mathcal{A}}^k \leq \bar{X}$, donc on a $\mathcal{A}^k \subseteq X^*$ et X^* est primaire. La dernière partie du théorème est facile à démontrer, sa démonstration est laissée au soin du lecteur.

THÉORÈME IV.4 <u>bis</u>. - Si les $\mathcal{O}$-idéaux à gauche entiers sont normaux, tout élément primaire de (L') non équivalent à $\mathcal{O}$ mod $\mathcal{R}$ est maximum dans sa classe et celle-ci est élément primaire de $(\bar{L}')$ non égal à $\bar{\mathcal{O}}$.

DÉMONSTRATION. - Soit X un élément primaire de (L') non équivalent à $\mathcal{O}$ mod $\mathcal{R}$. Soit Y un élément de L' équivalent à X modulo $\mathcal{R}$: $X^{-1} = Y^{-1}$. On tire de là $XX^{-1}Y = XY^{-1}Y$. Mais $XX^{-1} = \mathcal{A}$ est un élément de $(\mathcal{G}')$ équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}$: en effet, c'est d'abord un $\mathcal{O}$-ensemble contenant évidemment un élément régulier et contenu dans $\mathcal{O}$, (remarque II.8), et de plus, on peut écrire $\mathcal{O} \cdot\!\!\cdot XX^{-1} = X^{-1} \cdot\!\!\cdot X^{-1} = \mathcal{O}$, car $X^{-1} \cdot\!\!\cdot X^{-1}$ est l'ordre à droite du $\mathcal{O}$-idéal à droite X^{-1}, (théorème II.2), ce qui montre que XX^{-1} est équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}'$.

Par ailleurs, on a $Y^{-1}Y \subseteq \mathcal{O}'$, $\mathcal{O}'$ étant l'ordre à droite de Y. Or, nous allons montrer que, sous les hypothèses faites, deux $\mathcal{O}$-idéaux à gauche entiers équivalents modulo $\mathcal{R}$, X et Y, ont même ordre à droite $\mathcal{O}'$: appelons $\mathcal{O}''$ l'ordre à droite de X, les ordres à gauche de X et Y étant égaux à $\mathcal{O}$ (théorème II.2). $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}''$ sont d'ailleurs maximaux puisque X et Y sont normaux.

---

(5) La définition se calque sur celle donnée à la propriété IV.1.

On sait, (remarque II.8), que X^{-1} est un $\mathcal{O}''$-$\mathcal{O}$-idéal, que Y^{-1} est un $\mathcal{O}'$-$\mathcal{O}$-idéal. De $X^{-1} = Y^{-1}$, on déduit $\mathcal{O}' X^{-1} = X^{-1}$ et par suite $\mathcal{O}' \subseteq X^{-1}.X^{-1}$; or $X^{-1}.X^{-1}$ est l'ordre à gauche du $\mathcal{O}''$-idéal à gauche X^{-1} ; $\mathcal{O}''$ étant maximal, cet ordre à gauche est $\mathcal{O}''$ et par suite $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}''$ et de même $\mathcal{O}'' \subseteq \mathcal{O}'$ donc $\mathcal{O}' = \mathcal{O}''$. On a vu, (théorème II.1), que X était un $\mathcal{O}'$-idéal à droite, par suite, on a

$$XY^{-1}Y \subseteq X\mathcal{O}' = X$$

et

$$\mathfrak{a}Y \subseteq X \quad .$$

On ne peut avoir $Y \not\subseteq X$, car, X étant primaire, il en résulterait pour un certain entier naturel k, $\mathfrak{a}^k \subseteq X$ et par suite $\bar{\mathfrak{a}}^k \subseteq \bar{X}$, c'est-à-dire $\bar{X} = \bar{\mathcal{O}}$, et ceci est impossible. On a donc $Y \subseteq X$ et X est élément maximum dans sa classe. Montrons maintenant que $\bar{X}$ est élément primaire de $(\bar{L}')$. Soient $\bar{\bar{\mathfrak{a}}}' \in (\bar{\mathcal{E}}')$, $\bar{Y} \in (\bar{L}')$, avec $\bar{Y} \not\leq \bar{X}$, $\bar{\bar{\mathfrak{a}}}'\bar{Y} \leq \bar{X}$. On en déduit en prenant des représentants $\mathfrak{a}'$, Y dans $\bar{\bar{\mathfrak{a}}}'$ et $\bar{Y}$ respectivement : $\mathfrak{a}'Y \subseteq X$ et $Y \not\subseteq X$, X étant, comme on l'a vu, élément maximum de sa classe. Par suite, X étant primaire, il existe un entier naturel k tel que $\mathfrak{a}^k \subseteq X$ et par suite $\bar{\mathfrak{a}}^k \leq \bar{X}$, ce qui montre que $\bar{X}$ est primaire.

REMARQUE IV.1. - On peut démontrer que, si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal, dont tous les $\mathcal{O}$-idéaux à gauche sont normaux, $\mathcal{R}$ est régulière pour l'intersection de (L) : c'est le cas par exemple, si $\mathcal{O}$ est un anneau, ordre maximal régulier, dont les $\mathcal{O}$-idéaux à gauche entiers vérifient la condition de chaîne descendante ([5], p. 132).

THÉORÈME IV.5. - Soit a un élément régulier de $\mathcal{O}$; le $\mathcal{O}$-idéal à gauche $\mathcal{O}a$ est intersection d'un nombre fini de $\mathcal{O}$-idéaux à gauche entiers primaires. La décomposition peut être réduite. Les radicaux de ces composants primaires sont bien déterminés et sont des $\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers minimaux (tout $\mathcal{O}$-idéal premier contenu dans l'un d'eux lui est égal).

DÉMONSTRATION. - Nous entendrons "décomposition réduite" au sens du mémoire [6] (page 112). Il est facile de montrer que $\mathcal{O}a$ est maximum dans sa classe. D'après le théorème IV.1 , on peut écrire : $\overline{\mathcal{O}a} = \bigcap_{i=1}^{h} \bar{X}_i$, où $\bar{X}_i$ est un élément primaire de $(\bar{L}')$ dont le radical est un élément premier de $(\bar{\mathcal{E}}')$ $\bar{\bar{\mathcal{P}}}_i$, $\bar{\mathcal{P}}_i \neq \bar{\bar{\mathcal{O}}}$. D'après la définition de l'intersection dans $(\bar{L}')$, l'élément maximum de $\bigcap_{i=1}^{h} X_i$ est $\bigcap_{i=1}^{h} X_i^*$, X_i^* désignant l'élément maximum de $\bar{X}_i$, $i = 1, \dots, h$. On a donc $\mathcal{O}a = \bigcap_{i=1}^{h} X_i^*$. D'après le théorème IV.4 , X_i^* est primaire et son radical $\mathcal{P}_i$ a pour classe le radical $\bar{\bar{\mathcal{P}}}_i$ de $\bar{X}_i$, $i = 1 , \dots , h$. D'après le théorème IV.2 , $\mathcal{P}_i$, $i = 1 , \dots , h$, ne peut contenir un $\mathcal{O}$-idéal premier distinct de lui-même.

LEMME IV.1. - Tout $\mathcal{O}$-idéal entier $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \neq \mathcal{O}$, contient un $\mathcal{O}$-idéal maximum dans sa classe modulo $\mathcal{R}'$, non équivalent à $\mathcal{O}$. Tout $\mathcal{O}$-idéal entier premier minimal n'est pas équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}'$.

DÉMONSTRATION. - Soit a un élément régulier de $\mathcal{A}$. $\mathcal{O}a$ contient un $\mathcal{O}$-idéal bilatère puisque $\mathcal{O}$ est régulier, (théorème II.3), et l'union de tous les $\mathcal{O}$-idéaux bilatères contenus dans $\mathcal{O}a$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère $\mathcal{A}'$; on a successivement : $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{O}a$, $\mathcal{A}'^{-1} \supseteq (\mathcal{O}a)^{-1}$ et $(\mathcal{A}'^{-1})^{-1} \subseteq [(\mathcal{O}a)^{-1}]^{-1} = \mathcal{O}a$. Donc $(\mathcal{A}'^{-1})^{-1}$ est compris dans $\mathcal{A}'$ puisque c'est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère contenu dans $\mathcal{O}a$. On déduit de là $(\mathcal{A}'^{-1})^{-1} = \mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}'$ est maximum dans sa classe modulo $\mathcal{R}'$, qui est différente de $\bar{\bar{\mathcal{O}}}$. On a donc $\bar{\bar{\mathcal{A}}}' = \bar{\bar{\mathcal{P}}}_1^{\rho_1} \dots \bar{\bar{\mathcal{P}}}_r^{\rho_r}$, les $\bar{\bar{\mathcal{P}}}_i$ étant des éléments premiers de $(\bar{\mathcal{E}}')$ et les ρ_i des entiers convenables.

Soit maintenant $\mathcal{P}$ un $\mathcal{O}$-idéal bilatère premier entier minimal, et soit $\mathcal{A}'$ un $\mathcal{O}$-idéal bilatère contenu dans $\mathcal{P}$ ayant les propriétés décrites ci-dessus. Désignons par $\mathcal{P}_i$ l'élément maximum de $\bar{\bar{\mathcal{P}}}_i$, $i = 1 , \dots , r$; d'après le théorème IV.2 , $\mathcal{P}_i$ est premier. On a

$$\mathcal{P}_1^{\rho_1} \dots \mathcal{P}_r^{\rho_r} \subseteq \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{P}$$

et par suite $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}$ pour un certain i , $1 \leq i \leq 2$, et par suite $\mathcal{P}$ étant minimal, $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}$.

THÉORÈME IV.6. - Soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal régulier, noethérien à gauche, dont tous les $\mathcal{O}$-idéaux à gauche entiers sont normaux. Soit $\mathcal{P}$ un $\mathcal{O}$-idéal bilatère entier premier minimal, tout $\mathcal{O}$-idéal à gauche entier $\mathcal{P}$-tertiaire X et non équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}$, est $\mathcal{P}$-primaire.

DÉMONSTRATION. - Montrons d'abord que X est maximum dans sa classe modulo $\mathcal{R}$. Soit $Y \equiv X$ modulo $\mathcal{R}$. On a $Y^{-1} = X^{-1}$. Comme au théorème IV.4 bis, on déduit de là l'existence d'un $\mathcal{O}$-idéal bilatère entier $\mathcal{A}$ équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}'$ tel que $\mathcal{A}Y \subsetneq X$. On ne peut avoir $Y \nsubseteq X$, car cela entraînerait, X étant $\mathcal{P}$-tertiaire ([7], page 460), que $\mathcal{A}$ est contenu dans $\mathcal{P}$, donc que $\bar{\bar{\mathcal{P}}} = \bar{\bar{\mathcal{O}}}$, ce qui est impossible d'après le lemme IV.1. On a donc $Y \subseteq X$. Puisque X n'est pas équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}$, on a $\bar{X} = \bigcap_{i=1}^{r} \bar{X}_i$, les $\bar{X}_i$ étant des éléments primaires de (L') dont les radicaux sont notés $\mathcal{P}_i$, $i = 1, \ldots, r$. X étant maximum dans sa classe, on en déduit, d'après le théorème (IV.4) :

$X = \bigcap_{i=1}^{r} X_i^*$, X_i^* désignant l'élément maximum de $\bar{X}_i$, élément primaire de (L'). Mais cette décomposition est réduite et à cause de l'unicité des radicaux entrant dans une décomposition réduite en idéaux tertiaires, on déduit que X est $\mathcal{P}$-primaire.

THÉORÈME IV.6 bis. - Soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal régulier, vérifiant la condition de chaîne ascendante pour les $\mathcal{O}$-idéaux bilatères entiers. Soit $\mathcal{P}$ un $\mathcal{O}$-idéal bilatère entier premier minimal et soit $\mathcal{Q}$ un $\mathcal{O}$-idéal bilatère $\mathcal{P}$-tertiaire (d'un côté). Alors $\mathcal{Q}$ est $\mathcal{P}$-primaire dans $(\mathcal{L}')$.

DÉMONSTRATION. - Il suffit de refaire la démonstration précédente en faisant les simplifications qui s'imposent.

V

DÉFINITION V.1. - Soit $\mathcal{O}$ un ordre de S quelconque dont tous les éléments sont réguliers sauf éventuellement le zéro, soit $\mathcal{P}$ un $\mathcal{O}$-idéal premier compris dans $\mathcal{O}$, soit M un sous-ensemble de S et soit $\complement\mathcal{P} = \mathcal{O} - \mathcal{P}$ le complémentaire de $\mathcal{P}$, dans $\mathcal{O}$. Nous notons :

$$M_{\mathcal{P}} = \{x \text{ , } x \in S \text{ , tel que, il existe } s \in \complement\mathcal{P} \text{ avec } s\mathcal{O}x \subseteq M\}$$
$${}_{\mathcal{P}}M = \{x \text{ , } x \in S \text{ , tel que, il existe } s \in \complement\mathcal{P} \text{ avec } x\mathcal{O}s \subseteq M\}$$

REMARQUE V.1. - En particulier $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ et ${}_{\mathcal{P}}\mathcal{O}$ sont des ordres de S contenant $\mathcal{O}$, si M est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche, $M_{\mathcal{P}}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$-idéal à gauche contenant M.

LEMME V. 1. - Soit M un $\mathcal{O}$-idéal à gauche contenu dans $\mathcal{O}$, $\mathcal{P}'$-primaire, $\mathcal{O}$ étant noethérien à gauche, si $\mathcal{P}'$ est contenu dans $\mathcal{P}$, on a $M_{\mathcal{P}} \cap \mathcal{O} = M$, si $\mathcal{P}'$ n'est pas contenu dans $\mathcal{P}$, on a $M_{\mathcal{P}} = \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$.

DÉMONSTRATION. - Sous les hypothèses faites, il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{P}'^k \subseteq M$. Si $\mathcal{P}'$ n'est pas contenu dans $\mathcal{P}$, on peut trouver un élément s dans $\mathcal{P}'^k$ n'appartenant pas à $\mathcal{P}$ (démonstration par récurrence sur k) : on a $s\mathcal{O}1 \subseteq \mathcal{P}'^k \subseteq M$ et par suite 1 appartient à $M_{\mathcal{P}}$ et $M_{\mathcal{P}} = \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$.

Si $\mathcal{P}'$ est contenu dans $\mathcal{P}$, $s\mathcal{O}x \subseteq M$, $s \in C\mathcal{P}$, $x \in \mathcal{O}$, entraînent, puisque s n'appartient pas à $\mathcal{P}'$ et que M est $\mathcal{P}'$-primaire, $x \in M$ et $M_{\mathcal{P}} \cap \mathcal{O} = M$.

THÉORÈME V.1. - Soit $\mathcal{O}$ un ordre régulier dont tous les éléments sont réguliers sauf le zéro éventuellement, pour que $\mathcal{O}$ soit un ordre maximal il faut et il suffit que les conditions suivantes soient simultanément réalisées :

(C_1) : Pour tout ordre $\mathcal{O}'$ équivalent à $\mathcal{O}$ et tel que $\mathcal{O}' \supseteq \mathcal{O}$, et pour tout $\mathcal{O}$-idéal bilatère $\mathcal{P}$ premier minimal, contenu dans $\mathcal{O}$, on a $\mathcal{O}'_{\mathcal{P}} = {}_{\mathcal{P}}\mathcal{O}'$.

(C_2) : Pour tout élément régulier a de $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}a$ est intersection d'un nombre fini de $\mathcal{O}$-idéaux à gauche primaires contenus dans $\mathcal{O}$ dont les radicaux sont des $\mathcal{O}$-idéaux bilatères, compris dans $\mathcal{O}$, premiers minimaux.

(C_3) : $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ est un ordre maximal, pour tout $\mathcal{O}$-idéal bilatère premier minimal compris dans $\mathcal{O}$.

DÉMONSTRATION.

1° Les conditions sont nécessaires : en se reportant au mémoire [3], on voit facilement que la définition que nous avons donnée pour $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ coïncide dans le cas où $\mathcal{O}$ est un ordre maximal régulier avec la définition d'ASANO pour $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$. On peut donc appliquer ses résultats : on a $\mathcal{O}_{\mathcal{P}} = {}_{\mathcal{P}}\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ est un ordre maximal, ce qui montre que les conditions (C_1) et (C_3) sont vérifiées. (C_2) résulte du théorème IV.5.

2° Les conditions sont suffisantes : soit $\mathcal{O}'$ un ordre contenant $\mathcal{O}$ et équivalent à $\mathcal{O}$. D'après (C_1) on a $\mathcal{O}'_{\mathcal{P}} = {}_{\mathcal{P}}\mathcal{O}'$, $\mathcal{P}$ étant un $\mathcal{O}$-idéal premier bilatère minimal compris dans $\mathcal{O}$ quelconque. $\mathcal{O}$ étant régulier, $\mathcal{O}'$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère, donc, d'après la remarque V.1, en tenant compte que $\mathcal{O}'_{\mathcal{P}} = {}_{\mathcal{P}}\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{P}} = {}_{\mathcal{P}}\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'_{\mathcal{P}}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$-idéal bilatère, dont l'ordre à droite est $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ d'après la condition (C_3) et le théorème II.2. Or, on a $\mathcal{O}'_{\mathcal{P}}\ \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}'_{\mathcal{P}}$ donc $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}'_{\mathcal{P}}$. $\mathcal{O}'_{\mathcal{P}} = \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$. Soit donc $x = ba^{-1}$, b, $a \in \mathcal{O}$ un élément quelconque de $\mathcal{O}'$. D'après ce qui précède, x appartient à $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ et par suite b appartient à $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}\, a = (\mathcal{O}a)_{\mathcal{P}}$. Or d'après (C_2), $\mathcal{O}a$ est égal à $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$ où les X_i sont des $\mathcal{O}$-idéaux à gauche compris dans $\mathcal{O}$, $\mathcal{P}_i$-primaires. D'après le lemme V.1, on a pour $i = 1, \ldots, n$:

$$(\mathcal{O}a)_{\mathcal{P}_i} = (X_i)_{\mathcal{P}_i}$$

et

$$(\mathcal{O}a)_{\mathfrak{P}_i} \cap \mathcal{O} = (X_i)_{\mathfrak{P}_i} \cap \mathcal{O} = X_i \quad .$$

Mais alors b appartenant à $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ pour $i = 1, \ldots, n$, b appartient à X_i pour $i = 1, \ldots, n$, donc à $\mathcal{O}a$ et x appartient à $\mathcal{O}$, ce qui montre que $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ASANO (Keizo). - Zur Arithmetik in Schiefringen, I., Osaka math. J., t. 1, 1949, p. 98-134.

[2] ASANO (Keizo). - Über die Quotientenbildung von Schiefringen, J. Math. Soc. Japan, t. 1, 1949, p. 73-78.

[3] ASANO (Keizo) and MURATA (Kentaro). - Arithmetical ideal theory in semi-groups, J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., Series A : Math., t. 4, 1953, p. 9-23.

[4] DUBREIL (Paul). - Initiation à la théorie des demi-groupes ordonnés. - Roma, Cremonese, 1957.

[5] JACOBSON (Nathan). - The theory of rings. - New York, American mathematical Society, 1943.

[6] LESIEUR (Léonce) et CROISOT (Robert). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, I., Colloque d'algèbre supérieure [1956. Bruxelles] p. 79-121. - Louvain, Ceuterick, 1957 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[7] LESIEUR (Léonce) et CROISOT (Robert). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, II., Math. Annalen, t. 134, 1958, p. 458-476.