Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jean-Pierre Lafon

Quelques résultats sur le dual d'un module de type fini sur un anneau commutatif et sur la caractérisation des modules de type fini tels que leur anneau d'endomorphismes soit commutatif

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 13, n° 1 (1959-1960), exp. n° 5, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1959-1960__13_1_A5_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
13e année, 1959/60, n° 5

7 décembre 1959

QUELQUES RÉSULTATS SUR LE DUAL D'UN MODULE DE TYPE FINI SUR UN ANNEAU COMMUTATIF ET SUR LA CARACTÉRISATION DES MODULES DE TYPE FINI TELS QUE LEUR ANNEAU D'ENDOMORPHISMES SOIT COMMUTATIF

par Jean-Pierre LAFON

Cet exposé contient un certain nombre de résultats assez décousus et qui peuvent probablement être précisés et approfondis.

I. Étude du dual.

1. Soit A un anneau local d'idéal maximal m , de corps des restes k et soit E un A-module de type fini. Nous désignerons par $E^* = \mathrm{Hom}_A(E , A)$ le dual de E . Si h est la forme bilinéaire canonique $E^* \times E \longrightarrow A$, forme définie par $h(x^* , x) = x^*(x) \in A$ si $x \in E$ et $x^* \in E^*$, elle induit sur $(E^*/mE^*) \times (E/mE)$ une forme bilinéaire à valeurs dans k comme suit :

Si $x^* = y^*$ modulo mE^* et si $x = y$ modulo mE , alors $x^*(x) = y^*(y)$ modulo m et, nous poserons $\bar{h}(\bar{x}^* , \bar{x})$ = classe de $x^*(x)$ modulo m si $\bar{x}^*$ (resp. $\bar{x}$) est un élément de E^*/mE^* (resp. E/mE) dont x^* (resp. x) est un représentant.

La non dégénerescence de cette forme bilinéaire induite signifie que si $\bar{x} \in E/mE$ est $\neq 0$, il existe $\bar{x}^* \in E^*/mE^*$ tel que $\bar{x}^*(\bar{x}) \neq 0$. Donc, si $x \in E - mE$, il existe $x^* \in E^*$ tel que $x^*(x) \notin m$. Par choix convenable de $y \in E$, proportionnel à x , $x^*(y) = 1$, c'est-à-dire $x^*(Ay) = x^*(E) = A$: donc x^* est une surjection de E sur A et il en résulte que A est facteur direct de E . En posant $E = A \oplus F$ et, en recommençant avec $x \in F - mF$, nous voyons que $F = A \oplus G$. De proche en proche, nous aboutissons à $E = A^n$.
La réciproque est immédiate, d'où le théorème suivant.

THÉORÈME. - Sous les hypothèses ci-dessus, il y a équivalence entre :

1° La forme bilinéaire induite sur $(E^*/mE^*) \times (E/mE)$ par la forme bilinéaire canonique $E^* \times E \longrightarrow A$ est non dégénérée.

2° E est A-libre.

Nous avons défini un homomorphisme φ de E^*/mE^* dans $(E/mE)^*$, dual du k-espace vectoriel E/mE qui se factorise comme l'indique le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} E^*/mE^* \arrow[rr] \arrow[dr, "j"'] & & (E/mE)^* \\ & E^*/\mathrm{Hom}_A(E , m) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

où i est l'injection canonique de $E^*/\mathrm{Hom}_A(E , m)$ dans $(E/mE)^*$ apparaissant dans la suite exacte : $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(E , m) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(E , A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(E/mE , k)$ et où j est la surjection canonique $E^*/mE^* \longrightarrow E^*/mE^*/\mathrm{Hom}_A(E , m)/mE^* = E^*/\mathrm{Hom}_A(E , m)$.

La surjectivité de φ équivaut à celle de i , c'est-à-dire, à E libre en vertu du résultat suivant qui généralise le théorème du paragraphe 5 de [3] et dont la démonstration ne nécessite pas l'utilisation d'un théorème d'Azumaya sur des relèvements de bases canoniques d'algèbres de matrices, mais s'appuie uniquement sur le lemme de Nakayama :

THÉORÈME. - Soit E un module de type fini sur un anneau local A d'idéal maximal m , de corps des restes k et soit F un A-module de type fini fidèle. Les 3 assertions suivantes sont équivalentes :

1° E est A-libre ;

2° L'application canonique de $\mathrm{Hom}_A(E , F)$ dans $\mathrm{Hom}_k(E/mE , F/mF)$ est surjective ;

3° $\mathrm{Ext}_A(E , mF) = 0$.

L'injectivité de φ équivaut, évidemment, à celle de j , c'est-à-dire à $\mathrm{Hom}_A(E , m) = m\, \mathrm{Hom}_A(E , A)$. Nous allons caractériser les modules E qui vérifient cette propriété. Bien entendu, la méthode utilisée pourrait être appliquée sans modification à la caractérisation des E tels que $\mathrm{Hom}_A(E , mF) = m\, \mathrm{Hom}_A(E , F)$ où F est un A-module de type fini donné, mais, en apparence, les résultats obtenus ne sont intéressants que si $E = A$.

Prenons E comme quotient L/R d'un A-module libre (de type fini) L par un sous-module R . On en déduit que $\mathrm{Hom}_A(E , A)$ est un sous-module de $\mathrm{Hom}_A(L , A)$. Nous désignerons par S le quotient $\mathrm{Hom}_A(L , A)/\mathrm{Hom}_A(E , A)$. Il est clair que $\mathrm{Hom}_A(E , m) = \mathrm{Hom}_A(E , A) \cap \mathrm{Hom}_A(L , m)$, et il en résulte que la condition imposée se traduit ainsi : $\mathrm{Hom}_A(E , A)/m\, \mathrm{Hom}_A(E , A)$ s'injecte dans $\mathrm{Hom}_A(L , A)/m\, \mathrm{Hom}_A(L , A)$, soit sous une forme plus agréable, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_A(E , A) \otimes_A k \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(L , A) \otimes_A k$$

est injective. Écrivons, alors, la suite exacte :

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1(\mathrm{Hom}_A(L , A) , k) \to \mathrm{Tor}_1^A(S , k) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(E , A) \otimes k \to \mathrm{Hom}_A(L , A) \otimes k \to \cdots$$

Puisque $\mathrm{Tor}_1^A(\mathrm{Hom}_A(L , A) , k) = 0$, la condition se traduit par $\mathrm{Tor}_1^A(S , k) = 0$, condition classiquement équivalente à S est A-libre. S est quotient de $\mathrm{Hom}_A(L , A) = L^*$ et il est libre. Il revient au même de dire que S est facteur direct de L^* car ceci entraîne que S est projectif et, puisque A est local, que S est libre. En définitive, ceci est équivalent au fait que E^* soit facteur direct de L^* .

THÉORÈME. - Une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $E^*/mE^* \longrightarrow (E/mE)^*$ définie ci-dessus soit surjective est que E soit A-libre.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit injective est que si E est quotient d'un A-module libre de type fini L , alors E^* soit facteur direct de L^* .

La dernière condition est trivialement satisfaite si A est un anneau de valuation discrète. D'autre part, elle implique dans le cas général E^* A-libre.

REMARQUE. - Les problèmes que nous nous posons ici modulo m , se posent évidemment modulo m^i ; ils ne sont sans doute pas inabordables, mais ils sont certainement bien plus difficiles à résoudre.

2. Ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème suivant qui est une forme légèrement généralisée de résultats de REES [4]. Les démonstrations ont été quelque peu modifiées.

THÉORÈME. - Soit A un anneau noethérien. Soit E un A-module de type fini fidèle. Il y a équivalence pour un A-module F (non nécessairement de type fini) entre :

1° $F = 0$;

2° $\mathrm{Hom}_A(E , F) = 0$.

La démonstration s'appuie sur deux lemmes (REES).

LEMME 1. - Soit A un anneau noethérien intègre de corps des fractions K et soit E un A-module de type fini. Il y a équivalence entre :

1° E est fidèle ;

2° $E \otimes_A K$ est différent de 0 ;

3° $\mathrm{Hom}_K(E \otimes_A K , K)$ est différent de 0 ;

4° $\mathrm{Hom}_A(E , A)$ est différent de 0 .

Le lemme apparaît comme un cas particulier du théorème. Il serait possible de donner modulo le théorème un lemme plus général dans le cas où A n'est pas intègre et où K est l'anneau total des fractions de A.

DÉMONSTRATION. - L'équivalence de 2° et 3° est immédiate. Non 2° implique non 1° car $E \otimes_A K = 0$ signifie que E est un A-module de torsion et puisque A est intègre et E de type fini, E ne saurait être fidèle. Non 1° implique non 2° car si $aE = 0$ avec $a \neq 0$, on doit avoir $a(E \otimes_A K) = 0$ car $(aE) \otimes_A K$ se plonge dans $E \otimes_A K$, par suite de la platitude de K, et le calcul fait, alors, dans $E \otimes_A K$ montre que $(aE) \otimes_A K = a(E \otimes_A K)$.

Reste donc à montrer l'équivalence de 3° et 4° : elle est immédiate si l'on remarque que

$$\mathrm{Hom}_K(E \otimes_A K) = \mathrm{Hom}_A(E , A) \otimes_A K \qquad ,$$

en vertu d'un résultat classique de platitude.

LEMME 2. - <u>Si l'idéal p de A est premier (plus généralement intégralement clos), et si E est un A-module de type fini fidèle, alors E/pE est fidèle en tant que A/p-module.</u>

Si, en effet, $\bar{a} \in A/p$ est tel que $\bar{a}E/pE = 0$, pour un représentant a dans A, $aE \subset pE$. La méthode du déterminant de Krull donne, alors, une équation de dépendance intégrale : $a^n - b_1 a^{n-1} - \dots - b_n = 0$ où $b_i \in p^i$. Ceci implique évidemment $a \in p$, soit $\bar{a} = 0$.

DÉMONSTRATION du théorème. - Il est clair que l'on peut supposer F de type fini (sinon, on considérerait les sous-modules de type fini). Si $F \neq 0$, il est bien connu qu'il existe un idéal premier p, en fait associé à F, et différent de A, tel que A/p s'injecte dans F. Il nous suffira donc de montrer que $\mathrm{Hom}_A(E , A/p)$ est différent de 0. Or, $\mathrm{Hom}_A(E , A/p)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{A/p}(E/pE , A/p)$ qui est différent de 0, d'après le lemme 2, et le lemme 1.

3. On peut se demander quand le A-module $L(E^*)$ est isomorphe à $L(E)$. Nous n'insisterons pas sur ce genre de résultats. On montre que $L(E^*)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}_A(E , E^{**})$ où E^{**} est le bidual de E. Une condition suffisante est donc que E soit isomorphe à E^{**}. Le résultat suivant se démontre en utilisant la platitude.

THÉORÈME. - <u>Soit A un anneau noethérien intègre et soit E un A-module de type fini sans torsion. L'application canonique h de E dans son bidual E^{**} est</u>

injective et le conoyau de h est un module de torsion.

Il est d'autre part, immédiat, puisque E^{**} est sans torsion, qu'une condition necessaire pour que h soit un isomorphisme de $\dot{E}$ sur E^{**} est que E soit sans torsion.

II. Une généralisation du module de torsion.

PROPOSITION et DÉFINITION. - Soient A un anneau commutatif, K son anneau total des quotients, E un A-module et T un sous-module : il y a équivalence entre :

1° T est le noyau de l'homomorphisme canonique $E \dashrightarrow E \otimes_A K$;

2° T est l'ensemble des $x \in E$ dont l'annulateur contient un élément régulier de A. T sera appelé le sous-module de torsion généralisée de E.

L'équivalence de 1° et 2° est classique, et nous renvoyons, par exemple, à l'appendice de [1]. Il serait évidemment possible de définir plus généralement la S-torsion de E pour toute partie multiplicative de A, le cas considéré ici étant celui où S est l'ensemble des éléments réguliers de A.

$x \in T$ signifie, donc, qu'il existe un élément régulier $a \in A$ tel que $ax = 0$.

La définition a les conséquences suivantes :

(T_1) si A est intègre, T est le sous-module de torsion.

(T_2) T est caractéristique.

(T_3) le quotient E/T du module E par son sous-module de torsion généralisée n'a pas de torsion généralisée.

(T_4) si E est fidèle et T de type fini (par exemple, si E est noethérien fidèle), E/T est fidèle.

(T_5) si A n'est pas intègre, le sous-module de torsion généralisée T de E n'est pas forcément pur.

(T_6) le dual E^* de E est isomorphe au dual $(E/T)^*$ de E/T.

(T_7) si le A-module E n'a pas de torsion généralisée, l'application canonique de E dans $E \otimes_A K$ où K est l'anneau total des quotients de A est injective.

III. $L(E)$ commutatifs.

1. Anneau des endomorphismes d'un idéal.

Soient A un anneau commutatif à élément unité, et K son anneau total des quotients, si I est un idéal de A, on note $(I : I)$ l'ensemble des $a \in K$ tels que $aI \subset I$.

PROPOSITION. - L'anneau $L(I)$ des A-endomorphismes de l'idéal I est isomorphe à $(I : I)$ si I contient au moins un élément régulier.

En effet, dans le cas général, si $a \in (I : I)$, $aI \subset I$ et la multiplication par a définit, donc, un endomorphisme de I, d'où une application $h : (I : I) \to L(I)$ qui est évidemment un homomorphisme pour les structures de modules et d'anneaux. Le noyau de h est $(0 : I)$, ensemble des $a \in K$ tels que $aI = 0$.

Si x est un élément régulier de I et si $y \in I$, $xu(y) = yu(x)$ montre que $u(y) = (u(x)/x)\, y$ avec $u(x)/x \in K$ et même $\in (I : I)$. Alors, h est surjectif et $(0 : I) = 0$, donc h est un isomorphisme. Dans le cas général, nous voyons que $(I : I)/(0 : I)$ se plonge dans $L(I)$, mais l'exemple suivant montre qu'il n'y a pas égalité : $A = k[x, y]$ avec $x^2 = xy = yx = y^2 = 0$ et $I = (x, y)$. On en déduit les corollaires suivants.

COROLLAIRE 1. - Si I contient un élément régulier, $L(I)$ est commutatif.

COROLLAIRE 2. - Si A est intègre, il en est de même de $L(I)$.

COROLLAIRE 3. - Si A est noethérien intégralement clos (i. e. intégralement fermé dans son anneau total des quotients) et si l'idéal I contient un élément régulier, alors $L(I) = A$.

En effet, $L(I) = (I : I)$ se plonge alors dans K. Il contient A et est entier sur A puisque c'est un A-module de type fini (si A est noethérien). L'hypothèse faite sur A implique donc bien $L(I) = A$.

Remarquons que l'on n'a pas forcément $L(I) = A$ dans le cas général : si A' est la clôture intégrale de A non intégralement clos et si $\mathfrak{f}$ est le conducteur de A' dans A, $(\mathfrak{f} : \mathfrak{f}) = A'$ et $L(\mathfrak{f}) = A'$ où $\mathfrak{f}$ est considéré, indifféremment, comme un A ou un A'-module.

2. Passage au contre-module.

Si A est un anneau (commutatif) et si E est un A-module, nous désignerons par E' le contre-module de E, c'est-à-dire le $L(E)$-module à gauche défini comme suit :

La structure du groupe abélien de E' coïncide avec celle de E ;

Le produit $u.x$ où $u \in L(E)$ et $x \in E'$ est défini par $u.x = u(x)$.

PROPOSITION. - <u>L'anneau</u> $L(E')$ <u>des</u> $L(E)$-<u>endomorphismes de</u> E' <u>est le centre de</u> $L(E)$.

Il suffit de remarquer qu'un endomorphisme de E' est un endomorphisme du groupe abélien E qui commute à tout u de $L(E)$; il commute, en particulier, aux homothéties, et appartient donc à $L(E)$ et puisqu'il doit commuter à tout élément de $L(E)$, il est dans le centre de E. La réciproque est immédiate.

COROLLAIRE. - <u>Si</u> $L(E)$ <u>est commutatif</u>, $L(E') = L(E)$.

Nous voyons donc, que, pour la recherche des E tels que $L(E)$ soit commutatif, il est naturel de chercher à caractériser les A-modules E tels que $L(E) = A$.

3. <u>Étude des</u> E <u>tels que</u> $L(E) = A$.

Nous allons essentiellement caractériser de tels E qui sont des idéaux.

THÉORÈME. - <u>Soit</u> A <u>un anneau noethérien et soit</u> E <u>un</u> A-<u>module de type fini tel que</u> $L(E) = A$. <u>Alors, les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

1° E <u>est isomorphe à un idéal (convenable) de</u> A ;

2° <u>Il existe une injection</u> h <u>de</u> E <u>dans</u> A.

3° <u>Il existe un homomorphisme libre</u> $h : E \dashrightarrow A$, <u>c'est-à-dire tel que</u> $h(E)$ <u>soit fidèle.</u>

4° <u>Il existe une application bilinéaire libre</u> $h' : E \times E \longrightarrow E$.

L'équivalence de 1° et 2° est évidente et indépendante de l'hypothèse $L(E) = A$. 3° implique 2° : soit, en effet, $h : E \longrightarrow A$ tel que $h(E)$ soit fidèle. Le noyau $\ker(h)$ de h est caractéristique puisque $L(E) = A$ implique que tout sous-module de E est caractéristique. On peut donc écrire la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(E\ ,\ \ker(h)) \longrightarrow L(E) \longrightarrow L(E/\ker(h)) \qquad .$$

Les homothéties de E induisent évidemment les homothéties de $E/\ker(h)$. Puisque ce module est isomorphe à $h(E)$ supposé fidèle, si $L(E) = A$, $L(E)$ se plonge dans $L(E/\ker(h))$ l'injection étant l'homomorphisme correspondant à la flèche de droite. Il en résulte que $\mathrm{Hom}_A(E\ ,\ \ker(h)) = 0$ et $\ker(h) = 0$ car $L(E) = A$ implique la fidélité de E. Donc h est injectif.

2° implique 3° de façon évidente.

L'équivalence de 3° et 4° résulte de ce que, si $L(E) = A$, $\mathrm{Hom}_A(E , A)$ peut s'écrire $\mathrm{Hom}_A(E , \mathrm{Hom}_A(E , E))$ qui est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}_A(E \otimes_A E , E)$. Cette condition 4° met, partiellement, en évidence la recherche d'une structure d'anneau sur E ; l'associactivité n'apparaît pas sous cette forme.

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> A <u>un anneau noethérien intègre et soit</u> E <u>un</u> A-<u>module de type fini. Il y a équivalence entre</u> :

1° $L(E) = A$.

2° E <u>est isomorphe à un idéal</u> I <u>de</u> A <u>tel que</u> $(I : I) = A$.

En effet, il existe $h : E \longrightarrow A$, $h \neq 0$ puisque E est fidèle et un tel h est libre : $ah(E) = 0$ impliquerait $ah(x) = 0$ avec $h(x) \neq 0$, donc $a = 0$. Une autre méthode, sans doute plus naturelle, est la suivante :

Soient A un anneau noethérien et E un A-module de type fini tel que $L(E) = A$. Le sous-module de torsion généralisée T est caractéristique et nous pouvons (même si $L(E) \neq A$) écrire la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(E , T) \longrightarrow L(E) \longrightarrow L(E/T) \quad .$$

Nous avons montré (T_4) que E/T était fidèle comme E . Un raisonnement analogue à celui fait ci-dessus montre que $\mathrm{Hom}_A(E , T) = 0$ si $L(E) = A$ et, par suite, que $T = 0$. Donc,

THÉORÈME. - <u>Soient</u> A <u>un anneau noethérien et</u> E <u>un</u> A-<u>module de type fini tel que</u> $L(E) = A$, <u>alors, l'annulateur d'un élément</u> $x \neq 0$ <u>de</u> E <u>est formé uniquement de diviseurs de</u> 0 .

Ce résultat est assez illusoire car, si A est un anneau total de quotients, il n'apporte aucune précision. Il permet de se ramener à ce cas :

En effet, E s'injecte canoniquement dans $E \otimes_A K$ si K est l'anneau total des quotients de A et, d'autre part, $L(E \otimes_A K) = L(E) \otimes_A K = K$.

Dans le cas ou A est intègre, on en déduit $E \otimes_A K = K$ et E isomorphe à un idéal que l'on peut supposer entier.

REMARQUE. - Il n'est pas vrai dans le cas où l'anneau A est intègre, que $L(E) = A$ implique E isomorphe à un idéal de A si E n'est plus supposé de type fini. On se reportera à [1] pour voir que, par exemple, si A est local intègre de corps des restes k , et si E est l'enveloppe injective de k considéré comme A-module, $L(E) = A$. Or le lemme de Nakayama montre que, dans ce cas, un module injectif n'est jamais de type fini.

Le corollaire du théorème se généralise sans difficulté comme suit :

PROPOSITION. - *Si A est somme directe d'un nombre fini d'anneaux noethériens intègres, et si le A-module de type fini E satisfait à $L(E) = A$, alors E est isomorphe à un idéal convenable de A.*

En effet, si $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ où A_i est noethérien intègre et si $e_1 , \ldots , e_n$ sont les idempotents correspondant à cette décomposition en somme directe, en posant $E_i = e_i(E)$, nous obtenons $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$, puis $L(E) = \mathrm{Hom}_A(E_1 , E) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Hom}_A(E_n , E)$, et E_i étant caractéristique,

$$\mathrm{Hom}_A(E_i , E) = L(E_i) \qquad (i = 1 , \ldots , n) \quad \text{et} \qquad L(E_i) = A_i \ldots$$

4. Quelques autres résultats.

Nous avions obtenu le contre-exemple suivant du fait que $L(E) = A$ pour un A-module de type fini E n'implique pas que E est isomorphe à un idéal de A : A est $k[x , y]$ où $x^2 = xy = yx = y^2 = 0$ et $E = Ae_1 + Ae_2$ avec les relations

$$xe_1 + ye_2 = 0 \ ; \quad ye_1 = 0 \ ; \quad xe_2 = 0 \qquad .$$

Mais nous nous sommes aperçus que ce contre-exemple rentrait, en fait, dans le cadre de deux résultats

1° E est l'enveloppe injective de k (MATLIS-GABRIEL, voir [2]).

2° Un théorème annoncé par COURTER dans un "preliminary report", sans démonstration et dont nous donnons ici l'énoncé et une démonstration.

THÉORÈME (COURTER). - *Soit A un anneau local artinien d'idéal maximal m et soit E un A-module de type fini fidèle. F désigne le sous-module de E formé des $x \in E$ tels que $mx = 0$, i. e. le plus grand A/m-espace vectoriel contenu dans E.*

On suppose que E possède un système minimal de générateurs $x_1 , \ldots , x_k$ tel que :

1° $F \subset \bigcap_{i=1}^{k} Ax_i$;

2° $\mathrm{Ann}(x_i) + \bigcap_{j \neq i} \mathrm{Ann}(x_j) = m \quad (i = 1 , \ldots , k)$.

Alors $L(E) = A$.

DÉMONSTRATION. - Remarquons d'abord que l'on ne peut avoir $\bigcap_{j \neq i} \mathrm{Ann}(x_j) = 0$ car, sinon $Ax_i = A/m$, d'après 2°, serait facteur direct de E, ce qui contredit 1°. Si $u \in L(E)$, écrivons :

$$u(x_i) = a_1 x_1 + \dots + a_j x_j + \dots + a_n x_n \quad .$$

Nous devons avoir pour $k \neq i$: $u(\bigcap_{j\neq k} \mathrm{Ann}(x_j)\, x_i) = 0$, c'est-à-dire $a_k(\bigcap_{j\neq k} \mathrm{Ann}(x_j))\, x_k = 0$ et $a_k \in \mathrm{Ann}(x_k)$: $(\bigcap_{j\neq k} \mathrm{Ann}(x_k)) = \mathrm{Ann}(x_k)$: m (d'après 2°) et finalement $a_k x_k \in F$ et $a_k x_k = c_{ki} x_i$. Ceci nous montre que l'on peut prendre u défini par $u(x_1) = a_1 x_1$, ... , $u(x_i) = a_i x_i$, ... avec $a_i \in A$.

Nous savons que $\mathrm{Ann}(x_i) = 0$ car E est supposé fidèle, et, il en résulte que $\mathrm{Ann}(x_i)$: m contient strictement $\mathrm{Ann}(x_i)$ pour au moins un i car, sinon, $\bigcap_i \mathrm{Ann}(x_i)$: $m = 0$, ce qui est contraire au fait que cette intersection contient m^{n-1} si n est tel que $m^n = 0$ et $m^{n-1} \neq 0$.

Remarquons d'autre part, que le théorème est trivialement vrai si $k = 1$ et que, dans le cas général, le sous-module engendré par x_1 , ... , x_{k-1} satisfait aux hypothèses. Supposons que $\mathrm{Ann}(x_k)$: $m \neq \mathrm{Ann}(x_k)$ et démontrons la propriété par récurrence. Nous supposons donc, que l'endomorphisme u de E est tel que

$$u(x_1) = ax_1 \ , \ \dots \ , \ u(x_i) = ax_i \ , \ \dots \ , \ u(x_{k-1}) = ax_{k-1}$$

$$u(x_k) = bx_k$$

et nous voulons montrer que l'on peut prendre $b = a$.

Si $c \in \mathrm{Ann}(x_k)$: m , $cx_k \in F$ et, par suite, $cx_k = dx_1$; on en déduit $cu(x_k) = du(x_1)$ et $c(b - a)\, x_k = 0$. Finalement, nous voyons que $b - a \in \mathrm{Ann}(x_k)$: $(\mathrm{Ann}(x_k) : m) \subset m$. On peut donc écrire $b - a = b' + c'$, où $b' \in \mathrm{Ann}(x_k)$ et $c' \in \bigcap_{i\neq k} \mathrm{Ann}(x_k)$. Nous pouvons alors écrire :

$$u(x_i) = (a + c')\, x_i \qquad \text{pour } i = 1 , \dots , k \quad .$$

Le théorème est donc démontré.

Les exemples qui suivent montrent que le résultat de Courter n'est pas contenu dans les résultats de Matlis-Gabriel.

EXEMPLES. - On prend $A = k[x , y]$ avec $x^3 = xy = yx = y^3 = 0$ et $E = Ae_1 + Ae_2$ avec les relations

$$xe_1 = 0 \qquad y^2 e_1 = 0$$

$$ye_2 = 0 \qquad x^2 e_2 = 0$$

Les conditions de Courter sont satisfaites et, par suite, $L(E) = A$. On pourrait vérifier directement que E n'est pas injectif. S'il l'était, ce serait l'enveloppe injective de k . Or celle-ci est fournie par le module $E = Ae_1 + Ae_2$

avec les relations

$$x^2 e_1 = 0 \qquad y^2 e_2 = 0$$

$$xe_2 = ye_1$$

$$ye_2 = xe_1$$

Ce deuxième exemple montre que E ne satisfait pas aux conditions de Courter et, par suite, que le résultat de Courter ne recouvre pas le résultat de Matlis.

Quelques rectifications à un exposé précédent.

Dans [3], nous avons attribué à AZUMAYA-BATHO un théorème erroné. Il faut lire (paragraphe 6, p. 12) :

THÉORÈME (AZUMAYA-BATHO). - Il y a équivalence entre :

i. R est somme directe d'algèbres de matrices sur des anneaux complètement primaires.

ii. Les idempotents qui apparaissent dans la décomposition du théorème précédent sont centraux. Ceci sera réalisé en particulier, si :

iii. R est non ramifié, i. e. $J = mR$.

D'autre part, il nous a été possible d'améliorer certains résultats obtenus, par exemple le théorème du paragraphe 2 : nous pouvons montrer que l'on peut obtenir toute représentation fidèle d'une algèbre à élément unité de dimension finie sur un corps k par réduction d'une représentation matricielle d'un $L(E)$ avec E module de type fini sur un anneau local A convenable de corps des restes k .

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CARTIER (Pierre). - Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique, Bull. Soc. math. France, t. 86, 1958, p. 177 251 (Thèse Sc. math. Paris. 1958).

[2] GABRIEL (Pierre). - Objets injectifs dans les catégories abéliennes, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 12, 1958/59, n° 17.

[3] LAFON (Jean-Pierre). - Anneau des endomorphismes d'un module de type fini sur un anneau local, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 12, 1958/59, n° 15.

[4] REES (Daniel). - The grade of an ideal or module, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 53, 1957, p. 28-42.