SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

PIERRE GABRIEL

La localisation dans les anneaux non commutatifs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 13, n° 1 (1959-1960), exp. n° 2, p. 1-35

http://www.numdam.org/item?id=SD 1959-1960 13 1 A2 0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres (Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



16 novembre **1959**

LA LOCALISATION DANS LES ANNEAUX NON COMMUTATIFS

par Pierre GABRIEL

Le rédacteur introduit ici un formalisme un peu nouveau. Son but est de trouver un langage qui remplace en algèbre non commutative la notion de faisceau qui a envahi récemment l'algèbre commutative [8], [17]. Le point de vue adopté n'est certainement pas définitif et le rédacteur n'a pas pu développer toutes les applications. En particulier, il n'a pas eu la place matérielle de parler des anneaux qui sont des modules noethériens sur leur centre, ni des théorèmes de dualité auxquels ces anneaux satisfont.

On peut cependant considérer comme encourageante l'explication qui est donnée au chapitre II du rôle des faisceaux en algèbre commutative : rôle qui est de donner une construction explicite de certaines catégories quotients de la catégorie de tous les modules sur un anneau commutatif noethérien.

Une dernière remarque concerne la bibliographie : le rédacteur a voulu déchiffrer un grand nombre d'articles qui traitent plus ou moins de la question. Il se croit donc obligé de citer tous les mémoires dont il a tiré quelque idée.

CHAPITRE I : La localisation dans les catégories abéliennes.

1. Catégories avec enveloppes injectives.

Dans tout l'exposé C désignera une catégorie abélienne possédant une famille de générateurs [7].

Un morphisme injectif $i: M \longrightarrow I$ de C est dit essentiel si tout sous-objet Q de I est nul dès que $Q \cap M = 0$. On appellera enveloppe injective de M tout morphisme injectif essentiel i de M dans un objet injectif I de M de M dans un objet injectif M est déterminé à un isomorphisme près et M alors M est déterminé à un isomorphisme près et M alors M est déterminé à un est de M admet une enveloppe injective.

PROPOSITION 1. - Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- a. C est une catégorie avec enveloppes injectives.
- b. Tout objet de C peut se plonger dans un objet injectif, et si $M \subset N$,

il existe un sous-objet Q de N, maximal pour l'égalité M N Q = 0.

- (a) \Longrightarrow (b): Car si M \subseteq N, le plongement de M dans son enveloppe injective I se prolonge en un morphisme \checkmark : N \longrightarrow I. Il suffit alors de poser Q = Ker \checkmark .
- (b) \Longrightarrow (a): Car si M C J , J injectif, soit Q maximal pour l'égalité Q ∩ M = C . De même, soit I un sous-objet de J contenant M et maximal pour l'égalité I ∩ Q = O . Alors J/Q est extension essentielle de M et contient I . Le morphisme identique de I dans J se prolonge en un morphisme injectif $\chi: J/Q \longrightarrow J$, $\chi(J/Q)$ est extension essentielle de M et contient I . Donc $I = \chi(J/Q)$, I + Q = J , $I \cap Q = 0$ et I est enveloppe injective de M .

Voici quelques exemples bien connus de catégories avec enveloppes injectives :

- C est une catégorie abélienne ou les limites inductives existent et sont exactes; par exemple, la catégorie de tous les modules unitaires à gauche sur un anneau avec élément unité. Une telle catégorie possède des enveloppes injectives [5].
- Si, en plus des conditions précitées, C possède une famille de générateurs formée d'objets noethériens, on dira que <u>la catégorie</u> C est localement noethérienne. Alors l'enveloppe injective E(M) de tout M est somme directe d'injectifs indécomposables et l'étude de E(M) équivaut "à l'étude de la décomposition primaire de M " [5].
- La notion d'enveloppe projective est duale de la notion d'enveloppe injective. Ainsi un morphisme surjectif $p: P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ est dit essentiel si pour Q C P, l'égalité Q + Ker p = P entraîne Q = P.
- Si A est un anneau avec élément 1 , les A-modules linéairement compacts [10] forment une catégorie abélienne avec limites projectives exactes. Si de plus A est commutatif et noethérien, la duale de cette catégorie est <u>localement noethérienne</u>.
- On trouvera dans [2], [4] d'autres exemples de catégories avec enveloppes projectives. Cette notion y est reliée à la notion de radical et au relèvement des idempotents. Bien entendu, toute théorie convenable démontre d'abord l'existence d'enveloppes projectives et en déduit le relèvement des idempotents.

2. Sous-catégories. Catégories quotients.

Ce paragraphe est consacré au déroulement de sorites bien connus en algèbre homologique ([7], [16]).

Si C est une catégorie abélienne, on rappelle qu'une sous-catégorie <u>épaisse</u>

D de C est une carégorie abélienne dont la classe des objets est une sous-classe de la classe des objets de C et qui est telle que :

a. Si M , N sont des objets de D , alors $\operatorname{Hom}_{\widehat{\mathbb{D}}}(M , \mathbb{R}) = \operatorname{Hom}_{\widehat{\mathbb{C}}}(M , \mathbb{R})$, l'addition et la composition des morphismes étant "la même" que dans $\widehat{\mathbb{C}}$.

b. Tout objet de $\underline{\underline{C}}$ isomorphe à un sous-objet ou un objet quotient de $\underline{\underline{D}}$ appartient à $\underline{\underline{D}}$; toute extension de deux objets de $\underline{\underline{D}}$ est dans $\underline{\underline{D}}$.

La donnée de C et D permet de construire la catégorie abélienne quotient C/D:

Les objets de C/D coïncident avec les objets de C. Si M et N sont deux objets de C, M' et N' deux sous-objets de M et N, on a une application canonique de $\operatorname{Hom}_{C}(M, N)$ dans $\operatorname{Hom}_{C}(M', N/N')$. Quand M' et M' parcourent les sous-objets de M et M tels que M/M' C D et M' C D, alors les groupes $\operatorname{Hom}_{C}(M', N/N')$ forment un système inductif de groupes abéliens. On rosera par définition :

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}/\mathbb{D}}(M, \mathbb{N}) = \varinjlim \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(M', \mathbb{N}/\mathbb{N}')$$

Ainsi $\text{Hom}_{\mathbb{C}/\mathbb{D}}(\mathbb{M}$, $\mathbb{N})$ est muni d'une structure de groupe abélien et il reste à définir une loi de composition :

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}/\mathbb{D}}(\mathbb{M},\mathbb{N}) \times \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}/\mathbb{D}}(\mathbb{N},\mathbb{P}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}/\mathbb{D}}(\mathbb{M},\mathbb{P})$$

Mous renvoyons pour cela le lecteur au travail de GROTHENDIECE [7]. Fous nous contenterons de compléter le dictionnaire pour la commodité du lecteur :

Si M est un objet de C, on notera par D(M) l'objet de C/D défini par M.

- Si $u: M \longrightarrow \mathbb{N}$ est un morphisme de C, alors le morphisme $D(u): D(M) \longrightarrow D(N)$ est nul si et seulement si $Im \ u \not = \underline{D}$.
 - Le morphisme D(u) est injectif si et seulement si Ker $u \in D$.
 - Le morphisme D(u) est surjectif si et seulement si $Coker \ u \in D$.
 - On a les égalités :

$$D(Ker u) = Fer D(u)$$
, $D(Coim u) = Coim D(u) = Im D(u) = D(Im u)$

$$D(Coker u) = Coker D(u)$$

- Si M et N sont deux objets de C , alors D(M) et D(N) sont isomorphes dans C/D si et seulement si M et N contiennent des sous-objets M₁ , M₂ et N₁ , N₂ qui satisfont aux conditions suivantes :

$$M_1 \in M_2 \in M$$
, $N_1 \in N_2 \in M$

$$M_1 \in D$$
, $M/M_2 \in D$, $N_1 \in D$, $N/N_2 \in D$

 M_2/M_1 et N_2/N_1 sont isomorphes (comme objets de C).

3. Sous-catégories localisantes.

Les raisonnements du paragraphe précédent étaient "autoduaux"; ils pouvaient s'appliquer aussi bien à <u>C</u> qu'è la catégorie duale. Pous allons maintenant imposer à <u>C</u> et <u>D</u> des conditions supplémentaires qui ne seront plus autoduales. On pourra en déduire des résultats sur les objets injectifs, non sur les objets projectifs.

HYPOTHÈSE \mathcal{L} . - Si M est un objet de C et $(N_i)_{i \in I}$ une famille de sous-objets de M , alors la famille $(N_i)_{i \in I}$ admet une borne supérieure dans M , que l'on notera sup N_i . $i \in I$

HYPOTHÈSE \mathcal{L} . - Avec les notations de l'hypothèse \mathcal{L} , si \mathbb{N}_{i} appartient à \mathbb{D} pour tout i , alors sup \mathbb{N}_{i} appartient à \mathbb{D} .

Il va sans dire que (S) est satisfait pour toutes les catégories raisonnables et n'apporte aucune restriction "dans la pratique". La restriction imposée à D par (\mathcal{L}) est par contre réelle. On dira que D est une sous-catégorie localisante de C si elle satisfait à (\mathcal{L}) . On supposera à partir de maintenant que (S) et (\mathcal{L}) sont satisfaits.

La première conséquence en est que <u>la sous-catégorie localisante</u> <u>D</u> <u>satisfait</u> <u>aussi à l'hypothèse</u> . De même si <u>C</u> possède une famille de générateurs, il en va de même de <u>D</u>. Si <u>M</u> appartient à <u>D</u> et possède une enveloppe injective I dans <u>C</u>, le plus gros sous-objet de I appartenant à <u>D</u> est l'enveloppe injective de M dans <u>D</u>. Ainsi si <u>C</u> est une catégorie avec enveloppes injectives, alors <u>D</u> est à enveloppes injectives; si <u>C</u> est localement noethérien. <u>D</u> est localement noethérien.

Ces propriétés de transfert de C à D peuvent être répétées pour la catégorie quotient C/D:

Si M est un objet de C, il contient un sous-objet maximum M_1 appartenant à D et $M' = M/M_1$ ne contient pas de sous-objet de D autre que O. Le quotient M' est le plus petit quotient N de M tel que D(M) = D(N).

En outre, tout morphisme u de C , u : $^{\vee} \longrightarrow \mathbb{N}$, induit des morphismes u' de C et D(u) de C/D :

$$u' : M' \longrightarrow N'$$
, $D(u) : D(M) \longrightarrow D(N)$

Dire que D(u) est injectif équivaut à dire que u' est injectif. Si I est un injectif de C qui ne contient pas de sous-objet de D autre que C, alors D(I) est un injectif de C/D. De même, dire que D(u) est essentiel, c'est dire que U' est essentiel. En particulier:

- Si C est une catégorie avec enveloppes injectives, C/D est une catégorie avec enveloppes injectives.

De même :

- Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille de générateurs de C, $(D(U_i))_{i \in I}$ est une famille de générateurs de C/D.
- La catégorie \mathbb{C}/\mathbb{D} satisfait à l'hypothèse (\mathcal{C}') et le sup commute avec le foncteur \mathbb{D} , i. e.

$$D(\sup_{i}) = \sup_{i} D(N_{i})$$

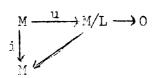
Il ne semble pas pourtant que l'existence de limites inductives dans <u>C</u> entraîne cette existence dans <u>C/D</u>. Ce sera pourtant le cas pour les catégories du paragraphe 5.

4. Le foncteur localisation.

Nous supposons toujours que $\underline{\mathbb{C}}$ est une catégorie abélienne satisfaisant à (\mathcal{S}) et que $\underline{\mathbb{D}}$ est une sous-catégorie localisante de $\underline{\mathbb{C}}$.

On dira qu'un objet M de C est D-fermé, s'il satisfait aux conditions équivalentes :

- a. Pour tout morphisme u de C, u: $P \longrightarrow Q$, tel que Ker u et Coker u appartiennent à D, les morphismes $\psi: P \longrightarrow M$ se "prolongent" en des morphismes $\psi: Q \longrightarrow M$, i. e. $\psi = \psi \circ u$.
- b. M ne contient pas de sous-objets appartenant à D autres que 0, et si $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ est une suite exacte telle que $P \in D$, alors la suite exacte se scinde (i. e. M est facteur direct dans N).
- (a) \Longrightarrow (b): Si L est un sous-objet de M appartenant à D, on a un diagramme commutatif:



où i est l'application identique. Denc I est nul.

De même, on a un diagramme commutatif :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M$$

et donc M est facteur direct.

(b) \longrightarrow (a) Car si M_P Q désigne comme d'habitude le Coker de l'application

on vérifie que M se plonge dans M_p Q comme facteur direct. En composant le morphisme canonique de Q dans M_p Q avec la projection de M_p Q sur M_p on obtient ψ .

Soit maintenant M un objet arbitraire de C. On appelle D-enveloppe de M tout morphisme u de M dans un objet D-fermé M_D , qui soit un D-isomorphisme (i. e. Ker u $\in D$, Coker u $\in D$). Si M' est le quotient de M par le plus grand sous-objet de M appartenant à D, le morphisme u induit un morphisme injectif de M' dans M_D , et M_D est évidemment extension essentielle de $M' \simeq \text{Im } u$: car si Q CM_D et Q CM_D et Q CM_D et Q CM_D est un sous-objet de M_D/M' et appartient à D; ce qui n'est pas possible d'après (b). En outre, on vérifie aisément qu'avec les notations de (a) le "prolongement" W de W est unique. Il en résulte que M_D est défini à un isomorphisme près.

PROPOSITION 2. - Si M admet une D-enveloppe u : M \rightarrow M alors on a, pour tout objet N de C .

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}/\mathbb{D}}(\mathbb{D}(\mathbb{N}), \mathbb{D}(\mathbb{M})) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}, \mathbb{M}_{\mathbb{D}})$$

On va définir l'application

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}/\mathbb{D}}(\mathbb{D}(\mathbb{N}), \mathbb{D}(\mathbb{M})) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}, \mathbb{M}_{\mathbb{D}})$$

et laisser au lecteur le soin de faire les vérifications. Si N_1 est un sous-objet de N tel que $N/N_1 \in D$ et M_1 un sous-objet de M appartenant à D, alors u induit un morphisme $u_1: M/M_1 \longrightarrow M_D$ et on a une application canonique :

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbb{N}_1, \mathbb{M}/\mathbb{M}_1) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{N}_1, \mathbb{M}_{\mathbf{D}})$$

Mais tout morphisme de N_1 dans M_D se prolonge de manière unique en un morphisme de N_1 dans M_D . On obtient ainsi une application de $Hom_{C}(N_1, M/M_1)$ dans $Hom(N_1, M_D)$. Faisant varier N_1 et M_1 , et passant à la limite inductive on aboutit à l'application cherchée :

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}/\mathbb{D}}(D(\mathbb{N}), D(\mathbb{M})) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}, \mathbb{M}_{\mathbb{D}})$$

Soient maintenant M et N deux objets de C admettant des D-enveloppes $u: \stackrel{M}{\longrightarrow} \stackrel{M}{\longrightarrow} \stackrel{M}{\longrightarrow} v: \stackrel{N}{\longrightarrow} \stackrel{K}{\longrightarrow} \stackrel{K}{\longrightarrow} n$ induit un morphisme unique $\stackrel{G}{\hookrightarrow}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
M & & & & & & \\
\downarrow & & & & & \\
\downarrow & & & & & \\
M_D & & & & & \\
\end{array}$$

En effet Ker $u \in D$ et Coker $u \in D$ et le morphisme $v \circ \hookrightarrow$ admet donc un "prolongement" unique $(\circ D) : M_D :$

PROPOSITION 3. - Si les objets M , N et P de C admettent des D-enveloppes $u: Y \longrightarrow M_D$, $v: N \longrightarrow N_D$ et $w: P \longrightarrow P_D$, alors pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\P} N \xrightarrow{\Psi} P \longrightarrow 0$$

la suite

$$0 - M_{\overline{D}} - M_{\overline{D}} - M_{\overline{D}} - M_{\overline{D}}$$

est exacte.

En effet, soit N_1 le plus grand sous-objet de N appartenant à D. Alors N_1 '' M est le plus grand sous-objet de M appartenant à D, et on a un diagramme commutatif :

$$0 \longrightarrow M/M \quad 0 \quad N_1 \xrightarrow{q_1} N/N_1$$

$$u_1 \downarrow \qquad \qquad v_1 \downarrow \qquad \qquad v_1 \downarrow$$

$$M_D \xrightarrow{M_D} N_D$$

Comme $v_1 \circ V_1$ est injectif et que u_1 est essentiel, V_D est injectif.

Par exemple, tout objet injectif I de \underline{C} qui ne contient pas de sous-objets appartenant à \underline{D} autres que O est \underline{D} -fermé. Mais si M' admet une enveloppe injective I, cette enveloppe injective ne peut évidemment contenir d'objet non nul de \underline{D} ; d'ou :

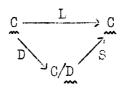
PROPOSITION. - Si C est une catégorie abélienne avec enveloppes injectives satisfaisant à (5), et si D est une sous-catégorie localisante de C, alors tout objet de C possède une D-enveloppe.

5. Le foncteur section.

Pour simplifier, nous supposerons à partir de maintenant que C est une catégorie abélienne avec enveloppes injectives. Si D est une sous-catégorie localisante de C, on choisira pour chaque objet M de C une D-enveloppe $u_M: M \longrightarrow M_D$. Alors la correspondance $M \Longrightarrow M_D$ définit un foncteur exact à gauche L de C dans C: on le nommera foncteur localisation relatif à D. Quand M varie les M définissent un morphisme du foncteur identité dans le foncteur localisation. En outre il est clair, d'après la proposition C, que le foncteur localisation est composé d'un foncteur canonique $D: C \longrightarrow C/D$ et d'un "foncteur section" C déterminé par la condition :

$$L(M) = M_{D} = S(D(M))$$

On est donc en présence du diagramme suivant :



La proposition 2 s'énonce alors ainsi : les morphismes $u_M: M \longrightarrow M_D$ induisent dans C/D un isomorphisme du foncteur identité dans le foncteur D o S .

Nous allons maintenant tirer quelques conséquences de l'existence des foncteurs S et L:

-Supposons d'abord que $(M_i)_{i\in I}$ soit un système inductif d'objets de C admettant une limite inductive dans C, soit $\varinjlim_i M_i$. Dès lors $(D(M_i))_{i\in I}$ est un système inductif d'objets de C/D et $D(\varinjlim_i M_i)$ est sa limite inductive :

Ceci résulte en effet immédiatement des égalités

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}/\mathbb{D}}(\mathbb{D}(\underbrace{\operatorname{lim}}_{i},\mathbb{M}_{i}),\mathbb{D}(\mathbb{N})) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\underbrace{\operatorname{lim}}_{i},\mathbb{M}_{i},\mathbb{N}_{\underline{D}}) = \underbrace{\operatorname{lim}}_{i} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{M}_{i},\mathbb{N}_{\underline{D}}) = \underbrace{\operatorname{lim}}_{i} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}/\mathbb{D}}(\mathbb{D}(\mathbb{M}_{i}),\mathbb{D}(\mathbb{N}))$$

-Comme conséquence de ce qui précède, si \underline{C} est une catégorie où les limites inductives sont exactes, il en va de même de $\underline{C}/\underline{D}$. De plus si $(\underline{U}_i)_{i\in I}$ est une famille de générateurs noethériens de \underline{C} , les $(\underline{D}(\underline{U}_i))_{i\in I}$ forment une famille de générateurs noethériens de $\underline{C}/\underline{D}$:

PROPOSITION 4. - Si C est une catégorie localement noethérienne, D une sous-catégorie localisante, alors D et C/D sont des catégories localement noethériennes. De plus le foncteur localisation $M \longrightarrow M_D$ commute avec les limites inductives.

Il reste à montrer que $(\varinjlim_{i})_{\underline{D}} = \varinjlim_{i}(M_{i})_{\underline{D}}$, ou $(M_{i})_{i \in I}$ est un système inductif d'objet de \underline{C} . Mais si \underline{u}_{i} désigne le morphisme canonique de \underline{M}_{i} dans $(M_{i})_{\underline{D}}$, on a des suites exactes :

$$0 \longrightarrow \text{Ker } u_{i} \longrightarrow M_{i} \longrightarrow (M_{i})_{\underline{D}} \longrightarrow \text{Coker } u_{i} \longrightarrow 0$$

D'où

$$0 \longrightarrow \varinjlim \text{ Fer } u_i \longrightarrow \varinjlim ^M_i \longrightarrow \varinjlim ^{(M_i)}_D \longrightarrow \varinjlim ^{\text{Coker }} u_i \longrightarrow 0$$

et \varinjlim Ker u ainsi que \varinjlim Coker u appartiennent manifestement à D .

En particulier, l'application de $\varinjlim(M_i)_D$ dans $(\varinjlim(M_i)_D$ est un D-isomorphisme et il suffit de montger que $\varinjlim(M_i)_D$ est D-fermé. Ceci signifie que pour tout D-isomorphisme $v: P \longrightarrow Q$, l'application de $\varinjlim(Q, \varinjlim(M_i)_D)$ dans $\varinjlim(P, \varinjlim(M_i)_D)$ est un isomorphisme; en outre, il suffit de faire la vérification quand P et Q sont noethériens; ceci se déduit alors de l'égalité:

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}, \underline{\lim}, \mathbb{M}_{i}) = \underline{\lim}, \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}, \mathbb{M}_{i})$$

où N est noethérien.

- Soit M un objet arbitraire de C , M_1 le plus grand sous-objet de M appartenant à D , M' le quotient M/M_1 , enfin E(M) , $E(M_1)$ et E(M') les enveloppes injectives de M , M_1 et M' . Alors E(M') ne peut contenir d'objets non nuls appartenant à D (sinon M' en contiendrait). On en déduit que les enveloppes injectives de M_D et D(M) dans C et C/D ne sont autres que E(M') et D(E(M')) . Comme l'étude de la "décomposition primaire" de M "équivaut" à l'étude de l'enveloppe injective E(M) (voir [5]), on retrouve les propriétés de transfert de la décomposition primaire par localisation.

Il faut pourtant se garder de croire que E(M') est le quotient de E(M) par $E(M_1)$; car si l'inclusion M_1 C M induit un plongement de $E(M_1)$ comme facteur direct dans E(M), $E(M_1)$ M est en général différent de M_1 . Il n'y a égalité pour tout M que si M contient avec tout objet son enveloppe injective : ceci a toujours lieu en algèbre commutative, comme on le verra.

Il va de soi que <u>le foncteur</u> L <u>est exact</u> si et seulement si <u>le foncteur</u> S <u>est exact</u>. Voici d'autres propriétés équivalentes :

PROPOSITION 5. - Les assertions suivantes sont équivalentes :

- a. Le foncteur localisation $M \longrightarrow M_D$ est exact.
- b. Si on a une suite exacte $0 \longrightarrow M \longrightarrow N$, où M et N sont D-fermés, alors N/M est D-fermé.
- c. Si on a une suite exacte $0 \longrightarrow M \longrightarrow I$, ou M est D-fermé et où I est un injectif ne contenant aucun objet non nul de D, alors I/M est D-fermé.
 - $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c) : clair.$
 - (c) \Longrightarrow (a): On va montrer que le premier foncteur dérivé R^1 L de L est nul. Supposons d'abord que M appartient à D, soient I son enveloppe injective

et N le quotient I/M; de la suite exacte,

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

on déduit alors

$$0 \longrightarrow M_{\underline{D}} = 0 \longrightarrow I_{\underline{D}} \longrightarrow N_{\underline{D}} \longrightarrow R^{1} L(M) \longrightarrow 0$$

Comme $I_{\underline{D}}$ est évidemment isomorphe à $N_{\underline{D}}$, on en déduit que R^1 $L(M_{\underline{D}}) = 0$.

Supposons maintenant que M ne contienne pas d'objet non nul de D et conservons les notations précédentes. On a alors la suite exacte :

$$0 \longrightarrow M_{D} \longrightarrow I_{D} \longrightarrow N_{D} \longrightarrow R^{1} L(M) \longrightarrow 0$$

Mais (c) signifie que le morphisme $I_{D} \longrightarrow N_{D}$ est surjectif : d'ou R^{1} $L(M_{D}) = 0$.

Dans le cas général, soit M_1 le plus grand sous-objet de D contenu dans M, et soit $M' = M/M_1$. De la suite exacte

$$R^1 L(M_1) \longrightarrow R^1 L(M) \longrightarrow R^1 L(M')$$

on tire alors: $R^1 L(M) = 0$.

Supposons que le foncteur localisation L soit exact. Alors le morphisme fonctoriel de la proposition 2 se prolonge en un isomorphisme de foncteur cohomologique :

$$\operatorname{Ext}^{n}_{\underline{\mathbb{C}}/\underline{\mathbb{D}}}(\mathbb{D}(\mathbb{M}), \mathbb{D}(\mathbb{N})) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^{n}_{\underline{\mathbb{C}}}(\mathbb{M}, \mathbb{N}_{\underline{\mathbb{D}}})$$

Réciproquement cette propriété caractérise les foncteurs localisation exacts (montrer que la propriété entraîne l'assertion (c) de la proposition 5).

On remarquera enfin que l'assertion (b) de la proposition 5 signifie que les modules D-fermés forment une sous-catégorie complète de C au sens de GROTHENDIECK. Cette sous-catégorie est alors équivalente à la catégorie quotient.

6. Catégories de modules.

Soit A un anneau avec élément unité $1 \neq 0$, et soit C la catégorie des A-modules unitaires à gauche. Nous allons préciser ce qui se passe dans ce cas.

Tout d'abord, si D est une sous-catégorie localisante de A-modules, et M un A-module, alors on a une application bilinéaire

$$A \times M_{\underline{D}} \longrightarrow M_{\underline{D}}$$

Autrement dit tout $m \in M_{\widehat{D}}$ définit une application A-linéaire de A dans $M_{\widehat{D}}$. Cette application se prolonge d'une seule manière en une application A-linéaire de $A_{\widehat{D}}$ dans $M_{\widehat{D}}$, définissant une application bilinéaire :

$${\rm A}_{\rm D} \times {\rm M}_{\rm D} \longrightarrow {\rm M}_{\rm D}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que si M=A, cette application fait de A_D un anneau. De même si M est arbitraire, M_D est un A_D -module. Par exemple, si est un idéal à gauche de A, D est un idéal à gauche de D. Il ne faut cependant pas croire que si D est un idéal bilatère de D, est un idéal bilatère de D, operation of une manière générale, il ne faut pas attacher trop d'importance aux idéaux bilatères dans l'étude des modules à gauche.

Soit C' la catégorie des modules unitaires sur A_D , D' la sous-catégorie localisante formée des A_D -modules qui appartiennent à D quand on les considère comme A-modules.

Alors C'/D' est une catégorie équivalente à C/D. Tout A_D-module D'-fermé est D-fermé et réciproquement. Tout A_D-module injectif D'-fermé est D-fermé et injectif comme A-module et réciproquement.

7. Catégories de modules (suite).

Nous allons donner une formule explicite pour la construction des <u>D</u>-enveloppes. Soit pour cela F la famille des idéaux à gauche ℓ de A tels que A/ℓ ℓ D. La famille F satisfait aux propriétés suivantes :

- a. Si $m > \{ et \ \{ \in F \ , alors \ m \in F . \} \}$
- b. Si m & F et (& F, alors m n (& F.
- c. Si $\{ \in F \text{ et a } \in A \text{ , alors } (\{ : a \}) = \{ x | xa \in C \} \}$ appartient à F.
- d. Si $l \in F$ et $m \in F$, alors $l : m \in F$.

La démonstration de ces propriétés est immédiate. Les conditions (a), (b) et (c) signifient que F est une base de filtre pour une topologie qui fait de A un anneau topologique. Réciproquement D s'identifie à la sous-catégorie localisante de C qui est engendrée par les A/C ($M \in D$ si et seulement si l'annulateur de tout $M \in M$ appartient à F). En fait <u>il est équivalent de se donner D ou de la constant de se donner D ou de la constant $M \in M$ appartient à F).</u>

se donner la famille F.

Il résulte maintenant de la proposition 2 que

$$M_{\underline{D}} = \text{Hom}_{\underline{A}}(\underline{A}, \underline{M}_{\underline{D}}) = \underline{\lim}_{\underline{\ell \in F}}, \text{Hom}_{\underline{A}}(\underline{\ell}, \underline{M}')$$

où M' est le quotient de M par le plus grand sous-objet $^{\rm M}_1$ de M appartenant à D .

PROPOSITION 6. - L'objet M_{D} s'identifie canoniquement à $\lim_{A} \text{Hom}_{A}(\cline{l}, M')$. En outre l'application canonique de $\lim_{A} \text{Hom}_{A}(\cline{l}, M)$ dans $\lim_{A} \text{Hom}_{A}(\cline{l}, M')$ est injective. Elle est surjective pour tout M si et seulement si $\lim_{A} \text{Ext}_{A}^{1}(\cline{l}, M)$ est nul quand M appartient à D. Dans ce dernier cas le n-ième foncteur dérivé du foncteur localisation L s'identifie à $\lim_{A} \text{Ext}_{A}^{n}(\cline{l}, M)$.

En effet, de la suite exacte

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

on tire

$$0 \longrightarrow \underline{\lim} \operatorname{Hom}_{A}([\ , \ M_{1}) \longrightarrow \underline{\lim} \operatorname{Hom}_{A}([\ , \ M) \longrightarrow \underline{\lim} \operatorname{Hom}_{A}([\ , \ M') \longrightarrow \underline{\lim} \operatorname{Ext}_{A}^{1}([\ , \ M_{1}) \longrightarrow \underline{\lim} \operatorname{Ext}_{A}([\ , \ M_{1}) \longrightarrow \underline{\mathbb{H}}([\ , \ M_{1}) \longrightarrow \underline{\mathbb{H}([\ , \ M_{1}) \longrightarrow \underline{\mathbb{H}([\ , \ M_{1}) \longrightarrow \underline{\mathbb{H$$

On vérifie tout de suite que $\varinjlim_{\mathbf{A}} (\mathsf{L}, \mathsf{M}_1) = 0$, et donc que \longleftrightarrow est injectif. En outre $\mathsf{M}_1 \in \mathsf{D}$ et \longleftrightarrow est surjectif si $\varinjlim_{\mathbf{A}} \mathsf{Ext}^1_{\mathbf{A}}(\mathsf{L}, \mathsf{M}_1) = 0$.

COROLIAIRE 1. - $L(M) = M_{D}$ s'identifie canoniquement à $\lim_{A \to A} Hom_{A}(\{ , M \}, \underline{si})$ A est un anneau héréditaire, ou si \underline{D} contient avec tout objet l'enveloppe injective de cet objet.

La première possibilité est claire.

Pour la seconde, soient M un objet de D et I l'enveloppe injective de M . L'injectif I appartient donc à D de même que I/M . Ainsi $\lim_{A} \operatorname{Ext}_{A}^{1}(\{\ ,\ M)$ qui est isomorphe au conoyau de l'application de $\lim_{A} \operatorname{Hom}_{A}(\{\ ,\ I\}) = 0$ dans $\lim_{A} \operatorname{Hom}_{A}(\{\ ,\ I/M\}) = 0$ est nul ,

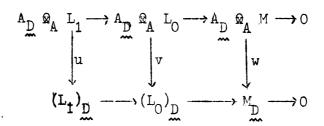
C. Q. F. D.

Nous verrons par la suite un exemple où " of " n'est pas surjectif.

COROLIAIRE 2. - Supposons que la famille d'idéaux F admotte une "base de filtre" formée d'idéaux à gauche de type fini (i. e. engendrés par un nombre fini d'éléments). Alors le foncteur localisation M — commute avec les sommes directes.

Soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille de A-modules. Il s'agit de montrer que la D-enveloppe de la somme directe $\bigoplus_{i\in I} M_i$ n'est autre que la somme directe des D-enveloppes. Ceci résulte directement des deux faits suivants : d'abord le plus grand sousmodule M_1 appartenant à D de $\bigoplus_{i\in I} M_i$ est la somme directe $\bigoplus_{i\in I} (M_i)_1$ des plus grands sous-objets appartenant à D des M_i ; ensuite si $\bigoplus_{i\in I} (M_i)_1$ est un idéal de M_i de type fini M_i M_i

COROLLAIRE 3. - Si, en plus des hypothèses du corollaire 2, le foncteur localisation est exact, alors M_D s'identifie avec A_D A pour tout A-module M. La démonstration est standard : la structure de A_D -module de M fournit d'abord un morphisme du foncteur $M \Longrightarrow A_D$ A A dans le foncteur $M \Longrightarrow M_D$. Ce morphisme définit un isomorphisme de A_D A A sur M quand M = A et donc quand M est un module libre quelconque, d'après le corollaire 2. Dans le cas général, il existe une suite exacte $L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ où L_1 et L_0 sont des A-modules libres. On a alors le diagramme suivant :



dù u et v sont des isomorphismes; il en va (onc de même pour w.

REMARQUE. - La donnée de la sous-catégorie localisante D est "équivalente" à la donnée d'une famille F d'idéaux à gauche de A qui satisfait aux donditions (a), (b), (c) et (d). On peut aussi adopter un point de vue légèrement différent:

Soit en effet u l'application canonique de A dens A_D . On posera alors $\binom{*}{} = u^{-1} \binom{!}{D}$

L'opération ("de fermeture") (=) (* dans l'ensemble des idéaux à gauche satisfait à :

b'.
$$\{*()^*\% = (()^*\%)^*$$
.

b'.
$$\{* \cap m^* = (\{ \cap n_i \})^* .$$
c'. $(\{* : a\} = (\{ : a\})^*)$

Réciproquement, si l'on sordonne une opération () * satisfaisant aux axiomes (a), (b'), (c') et (d'), cette opération peut être définie à l'aide d'une localisation. (Prendre pour F la famille des idéaux (tels que [* = A).

8. Anneaux de fractions.

Soit S un système multiplicativement stable de A (sous-ensemble de A stable par multiplication). Le système S permet de définir une sous-catégorie localisante D_S :

M appartient à D_S si tout élément m de M est annulé par au moins un

La famille F_S des idéaux à gauche ℓ tels que A/ℓ ϵ E_S est déterminée par la propriété :

Tout idéal de F_S rencontre évidemment S , mais la réciproque est inexacte. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que (1) soit satisfait :

(1) Quels que soient s ϵ S et a ϵ A , il existe t ϵ S et b ϵ A tels que ta = bs.

Nous allons tout de suite retrouver cette condition. Pour cela nous noterons M_{S} au lieu de $M_{\underline{D}_{S}}$.

DÉFINITION. - Si \(\mathfrak{1} : A \to B \) est un homomorphisme d'anneaux avec élément unité, et S un système multiplicativement stable de A, on dira que (B, 4) est un anneau de fractions à gauche de A cour S si :

- a. Ker ψ est formé d'annulateurs à droite de S; autrement dit si $\psi(a) = 0$, il existe s \in S tel que sa = 0.
 - b. L'image par \(\frac{1}{2} \) de tout s \(\xi \) est inversible dans \(\xi \) (\(\frac{1}{2} \) gauche et \(\xi \) droite).
 - c. Tout $b \in B$ est de la forme $b = (s)^{-1} (a)$, $a \in A$, $s \in S$.

PROPOSITION 7. - Les assertions suivantes sont équivalentes :

A possède un anneau de fractions à gauche pour S, soit (B,).

b. S satisfait aux conditions :

(1)
$$\forall s \in S$$
, $\forall a \in A$, $\exists t \in S$ et $b \in A$ tels que $ta = bs$

- (2) Si as = 0 avec $a \in A$ et $s \in S$, il existe $t \in S$ avec ta = 0.
 - c. Les images dans \mathbf{A}_S des éléments de S sont inversibles dans \mathbf{A}_S .

En outre, si ces conditions sont remplies, tout anneau de fractions s'identifie A_S pour l'application canonique de A dans A_S ; le foncteur $M \longrightarrow M_S$ est alors exact et commute avec les limites inductives.

(a) \Longrightarrow (b) : L'assertion (2) est claire, car si as = 0 on a ψ (a) = 0. D'autre part, comme ψ (a). ψ (s) $^{-1}$ \in 3, cet élément est de la forme :

$$\varphi(a). \varphi(s)^{-1} = \varphi(r)^{-1}. \varphi(c), r \in S, c \in A,$$

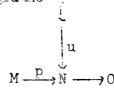
ou

$$y(r). y(a) = y(c). y(s)$$
.

Autrement dit ra - cs ϵ Ker \forall et il existe u ϵ S tel que ura = ucs . On posera donc ur = t , uc = b .

(b) \Longrightarrow (c) : On va d'abord montrer que (1) et (2) entraînent l'exactitude du foncteur $M \Longrightarrow M_S$.

En effet, donnons-nous un diagramme



où $\{$ est un idéal à gauche de F_S , et où M et Ker p sont D-fermés. Il suffit de montrer que $\{$ contient un idéal m de F_S pour lequel u "se relève" en un morphisme $v: \mathcal{R} \longrightarrow M$ (i. e. la restriction de u à m est de la forme p o v).

Mais si $s \in \{ \text{ fis}, \text{ } u(s) \text{ est de la forme } p(m) \text{ et as = 0 entraîne } am = 0 \text{ .}$ On posera donc $m_i = As$ et v(as) = am : le foncteur $M \Longrightarrow M_S$ est bien exact.

L'exactitude entraîne que dans A_S tout s'est inversible à gauche (l'idéal à gauche engendré par s'est D-fermé). D'ou s⁻¹.s = 1 et (ss⁻¹ - 1) s = 0 . Comme s'est simplifiable à gauche et à droite dans A_S , on a ss⁻¹ = 1 et le résultat.

(3) => (1) : C'est clair, de même que l'unicité de l'anneau de fractions.

REMARQUES.

1° Si A est un anneau noethérien à droite, l'assertion (1) entraîne l'assertion (2) : car si α désigne le plus grand idéal à gauche de A appartenant à \hat{D}_S , \hat{C}_S est bilatère et (2) signifie que l'image \hat{S}_S dans \hat{A}/\hat{C}_S de tout \hat{C}_S est régulier à droite (i. e. \hat{C}_S = 0 entraîne \hat{C}_S = 0). Mais \hat{C}_S est évidemment régulier à gauche et si \hat{A}/\hat{C}_S est noethérien à droite, la régularité à gauche entraîne la régularité à droite.

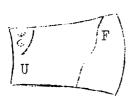
2º Si les conditions (a), (b), (c) de la proposition précédente sont satisfaites, on peut définir M_S à l'aide d'un "calcul de fractions" comme lorsque A est commutatif (voir [3]).

3º Si S est contenu dans le centre de A les conditions (1) et (2) sont vérifiées automatiquement.

CHAPITRE II : La localisation en algèbre commutative.

1. Faisceaux de modules.

Soit \mathcal{E} un espace topologique, \mathcal{U} un faisceau d'anneaux sur \mathcal{E} et \mathcal{C} la catégorie des \mathcal{O} -modules (ou faisceaux de \mathcal{U} -modules). Si \mathbb{F} est un fermé de

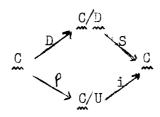


de & , U l'ouvert complénentaire de F dans & , ...
nous utiliserons les notations suivantes :

- Si M est un \mathbb{C} -module, $\mathbb{M}/\mathbb{U} = \mathbb{P}(\mathbb{M})$ désignera sa restriction à \mathbb{U} .

- f désigne donc le foncteur M = 1 M/U.
- C/U désigne la catégorie des 4/U-modules.
- i sera le foncteur qui, à tout $^{\prime 2}/\text{U-module}$, associe son image directe dans $^{\prime 2}$.
- Enfin <u>D</u> désignera la sous-catégorie localisante de <u>C</u> formée des \mathscr{Q} -modules dont la restriction \geq U est nulle.

On est alors en présence du diagramme suivant :



ou les foncteurs i et S sont caractérisés par les propriétés :

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{M}, i(\mathbb{N})) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}/\mathbb{D}}(\mathfrak{p}(\mathbb{M}), \mathbb{N})$$
 $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{M}, S(\mathbb{N})) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}/\mathbb{D}}(\mathbb{D}(\mathbb{M}), \mathbb{N})$

Autrement dit, les foncteurs p et i, D et S sont "adjoints" au sens de SHIH Veishu-CARTAN [20]. En outre, il est clair que les foncteurs S o D et i o p sont isomorphes et que <u>les foncteurs</u> D o i <u>et p o S permettent de définir une équivalence des catégories C/D et C/U.</u>

La "théorie de la localisation dans les catégories abéliennes" généralise donc une situation bien connue pour les faisceaux. On remarquera à ce propos que si $\beta(M)=0$, alors il en va de même de l'enveloppe injective E(M) de M: car si E_U désigne le sous-faisceau de F(M) dont les fibres sont nulles sur F et égales à celles de F(M) sur F, alors F(M)=0 et donc F(M)=0.

On peut refaire les mêmes raisonnements lorsque & est un schéma arithmétique au sens de CROTHEFDIECK [6] et que C est la catégorie des faisceaux algébriques quasi-cohérents sur . On explicite alors facilement les sous-catégories localisantes de C è l'aide de [5]. Le fait que toute sous-catégorie localisante de C contient avec un faisceau M, l'enveloppe injective de ce faisceau peut se voir à l'aide des théorèmes de structure de [5]. Fous allons nous contenter de voir ce qui se passe quand & est le spectre premier d'un anneau commutatif noethérien ([8], [15]).

2. Le cas d'un anneau commutatif noethérien.

Nous supposerons connus [8], [15], [18]. Soit A un anneau commutatif noethérien, et soit C la catégorie de tous les A-modules. Toute sous-catégorie localisante D de C est alors déterminée par les modules noethériens qu'elle contient, et donc aussi par les modules de la forme A/ qu'elle contient, où / est un idéal premier de A. Ceci va nous permettre de tout interpréter à l'aide du spectre premier V(A) de A.

Pour cela associons d'abord à toute sous-catégorie localisante \underline{D} de \underline{C} l'ensemble $\underline{F}_{\underline{D}}$ des points \underline{A} de $\underline{V}(\underline{A})$ tels que $\underline{A}/\underline{D}$. Alors $\underline{F}_{\underline{D}}$ contient avec tout point \underline{A} tous les points de l'adhérence de \underline{D} (i. e. tous les \underline{A} tels que $\underline{A}/\underline{D}$ soit un quotient de $\underline{A}/\underline{D}$). Autrement dit, l'ensemble $\underline{F}_{\underline{D}}$ est une réunion d'ensembles fermés de $\underline{V}(\underline{A})$ et il est clair que la correspondance $\underline{D} \longrightarrow \underline{F}_{\underline{D}}$ entre sous-catégories localisantes de \underline{C} et sous-ensembles de $\underline{V}(\underline{A})$ qui sont

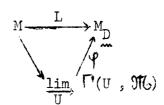
réunion de fermés est biunivoque.

Ceci dit, examinons d'abord le cas ou D est engendré, comme sous-catégorie localisante de C par un nombre fini de modules A/p, p premier. Alors F_D est un sous-ensemble fermé de V(A) et nous noterons U_D le complémentaire de F_D dans V(A). Comme la catégorie C s'identifie à la catégorie des faisceaux algébriques quasi-cohérents sur V(A), on voit, d'après ce qui a été dit au paragraphe précédent, que C/D n'est autre que la catégorie des faisceaux algébriques quasi-cohérents sur U_D . De la même façon, le foncteur localisation $M \longrightarrow M_D$ s'identifie au foncteur section $M \longrightarrow V(D_D$, M_D), où M_D désigne le faisceau sur V(A) associé au module M.

Dans le cas général, où \underline{D} n'est pas engendré par un nombre fini de A/p, \underline{D} est la "borne supérieure" des sous-catégories localisantes "de type fini" qu'elle contient. Si \underline{D}_i est une telle sous-catégorie, on a évidemment pour tout module \underline{M} une application canonique de $\underline{M}_{\underline{D}_i} = \Gamma(\underline{U}_{\underline{D}_i}, \underline{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}})$ dans $\underline{M}_{\underline{D}}$. Faisant varier \underline{D}_i , on aboutit à un morphisme de foncteurs

où D_{i} parcourt les sous-catégories localisantes de type fini contenues dans D_{i} .

PROPOSITION 8. - Si $F_{D_{i}}$ est l'ensemble des points du spectre qui correspond à D_{i} , on a un diagramme commutatif de foncteurs :



où U parcourt le filtre des ouverts contenant $V(A) - F_D$, et où ψ est un isomorphisme.

Dans le cas où D n'est pas de tupe fini, le spectre V(A) ne semble pas donner

une interprétation de la catégorie quotient C/D. L'utilité de la théorie des faisceaux en algèbre commutative est de donner une construction des catégories quotients C/D et des foncteurs localisation M—; MD quand D est une souscatégorie localisante de type fini.

3. Application à une formule de SERRE [17].

PROPOSITION 9. - Soient A un anneau commutatif noethérien, a un idéal de A, U l'ouvert de V(A) formé des idéaux premiers & de A qui ne contiennent pas C. Si alors M est un A-module, M. le faisceau sur V(A) associé à M, on a un isomorphisme:

$$H^{n}(U, \mathcal{V}(L)) \leftarrow \underset{i}{\underbrace{\lim}} \operatorname{Ext}_{A}^{n}(\alpha^{i}, M)$$

Il suffit évidemment de montrer qu'il y a un isomorphisme quand n=0; mais $H^O(U,M_O)=\Gamma(U,M_O)$ s'identifie au foncteur M_D , ou D est **la** sous-catégorie localisante engendrée par les A-modules A/D, ou D où D. Cette sous-catégorie D contient évidemment les enveloppes injectives des modules de D. Il résulte donc du chapitre D s'identifie à D D comme les D où D parcourt les idéaux tels que D appartienne à D. Comme les D i entier positif, forment une base de filtre pour ces idéaux, le résultat est démontré.

Nous allons appliquer ceci aux <u>faisceaux algébriques cohérents sur l'espace projectif</u> $P_n(k)$, où k est un corps algébriquement clos. On rappelle à ce propos que le groupe des classes de diviseurs de l'espace projectif est isomorphe à Z. Pour tout entier algébrique n il existe donc un faisceau cohérent $\mathcal{O}(n)$ localement isomorphe au faisceau d'anneaux locaux $\mathcal{O} = \mathcal{O}(0)$ de $P_n(k)$. En outre, on a les formules

$$\mathcal{O}(m) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(n) \cong \mathcal{O}(m+n)$$

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{O}(m), \mathcal{O}(n)) \simeq \mathcal{O}(n-m)$$

bien connues en géométrie algébrique.

D'autre part, on a une application canonique de k^{n+1} - $\{0\}$ dans $P_n(k)$. Cette application Ψ est en fait un morphisme algébrique, et l'image réciproque d'une hypersurface de $P_n(k)$ est une hypersurface conique de k^{n+1} - $\{0\}$. En particulier, l'image réciproque d'un ouvert affine de $P_n(k)$ est un ouvert affine de k^{n+1} - $\{0\}$; si $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ est une suite exacte de faisceaux

quasi-cohérents de k^{n+1} - $\{0\}$, la suite des images directes par \forall est exacte [15]: $0 \longrightarrow {}^{\downarrow}_*(M) \longrightarrow {}^{\downarrow}_*(M) \longrightarrow {}^{\downarrow}_*(P) \longrightarrow 0$. De plus on a la formule:

$$H^{i}(k^{n+1} - \{0\}, M) \simeq H^{i}(P_{n}(k), \Psi_{*}(M))$$

En particulier si M est un module gradué sur l'anneau gradué $k[X_0,\ldots,X_n]$, nous noterons toujours par $\psi_*(M)$ l'image directe dans $P_n(k)$ de la restriction à k^{n+1} - $\{0\}$ de M (faisceau associé à M). Si vo. désigne l'idéal (X_0,\ldots,X_n) de $A=k[X_0,\ldots,X_n]$, on a donc la jolie formule

$$H^{j}(P_{n}(k), \varphi_{*}(M)) = \lim_{i \to \infty} \mathbb{E}xt_{A}^{j}(m^{i}, M)$$

Ceci est l'un des résultats centraux de [17], du moins si l'on tient compte de ce que pour tout faisceau algébrique cohérent F sur $P_n(k)$, il existe un module gradué M sur A tel que

$$\bigvee_{*}(M) = \bigoplus_{\mathbf{r} \in Z} (\mathcal{O}(\mathbf{r}) \otimes_{\mathcal{O}} F)$$

4. La théorie des anneaux normaux commutatifs.

L'anneau A est toujours supposé commutatif; pour simplifier, nous supposerons en outre qu'il est noethérien et intègre.

Le corps des fractions K de A coı̈ncide alors avec l'enveloppe injective de A . On va s'intéresser aux sous-catégories localisantes \underline{D} de la catégorie \underline{C} de tous les A-modules pour lesquelles A s'identifie à son localisé $A_{\overline{D}}$.

Pour cela, il faut évidemment que D soit différent de C, autrement dit que K soit un A-module D-fermé. Alors $\stackrel{\Lambda}{A}_{D}$ est contenu dans $\stackrel{K}{K}$ et s'identifie à $\stackrel{\text{Lim}}{\longrightarrow} \text{Hom}_{A}(\stackrel{f}{\downarrow},A)$, où $\stackrel{\Gamma}{\downarrow}$ parcourt la famille $\stackrel{F}{\longrightarrow}$ des idéaux tels que $\stackrel{\Lambda}{\not}$ $\stackrel{C}{\longleftarrow}$.

Mais K est injectif et toute application de (dans A se prolonge en un endo-morphisme de K et est de la forme :

$$\ell \rightarrow \ell.x$$
, ou $\ell \in I$ et $x \in K$

Finalement l'égalité $A_D = A$ a lieu si et seulement si $\int_{-\infty}^{-1}$ est contenu dans

A pour tout { de F ; en outre les idéaux } tels que { $^{-1}$ = A satisfont manifestement aux conditions (a), (b), (c) et (d) du paragraphe 7 du chapitre I. D'où le résultat suivant : les sous-catégories localisantes D de C pour lesquelles A s'identifie à A_D sont contenues dans une sous-catégorie localisante te maxima \mathcal{E} pour laquelle $A \xrightarrow{\sim} A_{\mathcal{E}}$. Cette sous-catégorie localisante \mathcal{E} est engendrée par les modules A/p tels que $p^{-1} = A$.

Nous allons préciser la condition $p^{-1} = A$:

PROPOSITION 10. - Les propositions suivantes sont équivalentes (est un idéal de A):

- a. $\operatorname{Hom}_{A}(\mathcal{I}, A) = \mathcal{I}^{-1} \neq A$.
- b. $\frac{1}{2}$ est contenu dans un idéal premier $\frac{1}{2}$ tel que codh $\frac{1}{2}$ codh $\frac{1}{2}$ désigne la codimension homologique de l'anneau local $\frac{1}{2}$ au sens de SERRE [19], [18], [13]).
- c. ou bien & est contenu dans un idéal premier p tel que Ap soit un anneau de valuation discrète, ou bien l'annulateur de & dans B/A n'est pas nul, B désignant la clôture intégrale de A dans K.
- (a) \iff (b) : en effet, dire que $\begin{cases} -1 \neq A \end{cases}$, c'est dire que K contient un $\frac{x}{y}$, non dans A, tel que $\frac{x}{y}$. \checkmark CA · Autrement dit, x n'appartient pas à Ay, mais x. \checkmark CAy; ce qui signifie que \checkmark est contenu dans un idéal premier 9 associé à l'idéal principal Ay · Cette dernière propriété signifie, d'après SERRE, que la codimension homologique de Aq vaut 1 ·
- (a) \Longrightarrow (c): soit F la famille des idéaux \mathfrak{M} tels que $\mathfrak{M}^{-1} = A$, donc tels que $\Lambda/\mathfrak{M} \in \mathcal{E}$. Il est clair que \mathfrak{M} appartient à F si et seulement si les idéaux premiers minimaux de \mathfrak{M} appartiennent à F. L'inégalité $\mathfrak{L}^{-1} \neq A$ signifie donc que \mathfrak{L} est contenu dans un idéal premier \mathfrak{P} tel que $\mathfrak{P}^{-1} \neq \Lambda$. On a alors:

Soit p.p⁻¹ \(\psi \) La même relation est alors valable dans l'anneau local \(\beta \) et il est classique que ceci signifie que \(\beta \) est de valuation discrète.

Soit \(\beta \cdot \beta^{-1} \cdot \beta \); il en résulte que \(\beta \cdot \beta^{-1} \cdot \beta^{-1} \) est contenu dans \(\beta \cdot \beta \) furment dit, \(\beta^{-1} \) est un anneau contenant \(\beta \) et c'est manifestement un module de type fini sur \(\beta \). L'idéal \(\beta^{-1} \) est donc contenu dans \(\beta \) et (c) est ainsi démontré.

(c) \Longrightarrow (a) : c'est limpide.

Soit maintenant M un A-module sans torsion. Le module M est donc contenu dans N = K \otimes_A M qui est somme directe des A-modules isomorphes à K . La \mathcal{E} -enveloppe M $_{\mathcal{E}}$ de M s'identifie évidemment avec l'ensemble des x de N tels que (M : x) = $\{v \mid y \in A , y.x \in \mathcal{A}\}$ ne soit contenu dans aucun idéal premier \mathcal{P} tel que $\mathcal{P}^{-1} \neq A$. Autrement dit :

$$M_{\mathcal{E}} = \bigcap_{\uparrow \uparrow} M_{\uparrow}$$

Appliquant ceci au cas particulier M = A, on voit que A = A

PROPOSITION 11. - Si A est intégralement clos et si M est un A-module de type fini et sans torsion, alors Mg s'identifie canoniquement au bidual de M,

$$M_{\mathcal{E}} \simeq M^{**} = \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M, \mathbf{A}), \mathbf{A})$$

En effet, d'une part $M_{\downarrow} = \bigcap_{p-1 \neq A} M_p$, les M_p étant considérés comme plongés dans $N = K \otimes_A M$.

D'autre part M^{**} est manifestement contenu dans le bidual de N considéré comme espace vectoriel sur K. Identifiant ce bidual à N, on pourra considérer M^{**} comme plongé canoniquement dans N. On en déduit que :

$$M^{**} = \operatorname{Hom}_{A}(\operatorname{Hom}_{A}(M, A), A) = \operatorname{Hom}_{A}(\operatorname{Hom}_{A}(M, A), \bigwedge_{\wp - 1 \neq A} A_{\wp})$$

$$= \bigcap_{\wp - 1 \neq A} \operatorname{Hom}_{A}(\operatorname{Hom}_{A}(M, A), A) = \bigcap_{\wp - 1 \neq A} \operatorname{Hom}_{A_{\wp}}((\operatorname{Hom}_{A}(M, A))_{\wp}, A_{\wp})$$

$$= \bigcap_{\wp - 1 \neq A} \operatorname{Hom}_{A_{\wp}}(\operatorname{Hom}_{A_{\wp}}(M_{\wp}, A_{\wp}), A_{\wp}) .$$

Il suffit donc de démontrer que $^{M}p \cong \operatorname{Hom}_{A} (\operatorname{Hom}_{A_p} (^{M}p, A_p), A_p)$. Autrement dit on est ramené à faire la preuve quand A est un anneau de valuation discrète, ce qui ne fatiguerait personne.

Ainsi le foncteur bidual M — M** est lié de façon simple au foncteur localisation M — M, du moins quand M est un module de type fini. Ceci explique les
propriétés du foncteur bidual que certains auteurs découvrent avec étonnement [14].

On remarquera aussi que la catégorie quotient C/E a des propriétés bien agréables : sa "dimension de Krull" vaut 1, et on explicite aisément les objets injectifs et les sous-catégories localisantes de C/E. L'étude de la structure des objets noethériens de C/E devrait être aussi utile que difficile, car elle "équivaut" à l'étude des A-modules E-fermés et les A-modules projectifs sont E-fermés...

CHAPITRE III : Anneaux non commutatifs.

Ce chapitre n'est qu'une ébauche et il ne saurait en être autrement pour une branche qui n'a pas encore dépassé le stade de l'observation.

1. L'anneau des endomorphismes d'un module injectif.

Soient A un anneau avec élément unité, commutatif ou non, M un A-module à droite et I son enveloppe injective. Nous noterons par B (resp. C) l'anneau des endomorphismes du A-module M (resp. I), par C (resp. S) l'ensemble des endomorphismes de M (resp. I) tels que M (resp. I) soit extension essentielle de Ker Alors C et S sont des idéaux bilatères de B et C. En outre tout endomorphisme de M se prolonge en un endomorphisme de C et deux tels prolongements diffèrent par un élément de s. On obtient ainsi un homomorphisme injectif d'anneaux:

$$0 \longrightarrow \mathbb{B}/r \xrightarrow{\mathrm{u}} \mathbb{C}/r$$

L'anneau C/s est ce que JOHNSOF appelle le <u>centralisateur du module</u> M [9]. Nous allons d'abord expliciter quelques propriétés de C et C/s:

En effet si I n'est pas extension essentielle de Ker ψ , alors Ker ψ est contenu dans un injectif J différent de I. Le projecteur de I sur un supplémentaire de J est un idempotent de C .

La réciproque est claire

Ainsi l'idéal bilatère & de C est l'ensemble des 🕠 tels que C ne contienne pas d'idempotent. Cet idéal est donc lié de manière intrinsèque à C. En outre, les idempotents de C et de C/& se correspondent; de façon précise : tout idempotent de C/& se relève en un idempotent de C.

En effet, dire que l'image $\vec{\Psi}$ de ψ dans C/F est idempotente, c'est dire que I est extension essentielle de Ker(ψ - ψ^2). Fais Ker(ψ - ψ^2) est stable

par ψ et la restriction ψ de ψ à $\ker(\psi-\psi^2)$ est un projecteur. Si donc J_1 et J_2 sont des extensions essentielles maxima de $\ker\psi$ et $\operatorname{Im}\psi$ dans I, I est somme directe de J_1 et J_2 et ψ a même image dans C/ψ que la projection p de I sur J_2 parallèlement à J_1 ; d'où l'assertion.

De la même manière, on voit que si \bar{e}_1 , ..., \bar{e}_n sont des idempotents orthogonaux deux à deux de C/r, il existe des idempotents deux à deux orthogonaux de B, soit e_1 , ..., e_n , dont les images canoniques sont \bar{e}_1 , ..., \bar{e}_n .

Enfin si e et f sont des idemtotents de C, e et f leurs images dans $\overline{C} = C/\mathbb{Z}$, on voit facilement que les idéaux à gauche \overline{C} . et \overline{C} . f sont isomorphes comme \overline{C} -modules si et seulement si les A-modules e.I et f.I sont isomorphes, donc si et seulement si les C-modules Ce et Cf sont isomorphes.

Dans l'anneau C/s tout idéal à gauche non nul contient un idempotent non nul. En fait C/s est un anneau régulier au sens de von NEUMANN (i. e. tout idéal à gauche monogène est facteur direct; ou encore C/s est un anneau semi-héréditaire et tout idéal à gauche de type fini est facteur direct). En effet si v est un élément de C, J une extension essentielle maxima de Ker v dans I et p un projecteur de I sur un supplémentaire de J parallèlement à I, alors les images de v et p dans C/s engendrent le même idéal à gauche.

Telles sont les promiétés de factorisation en sommes directes de C . En fait C a aussi d'intéressantes propriétés de nature topologique :

Soit F un ensemble d'idéaux à gauche de C. On dira que C est linéairement compact pour F si C est tel que : pour toute famille $\bigcup_{\mathcal{A}} + L_{\mathcal{A}}$, $L_{\mathcal{A}} \in F$, declasses d'équivalences de C modulo des idéaux de F, possédant la propriété d'intersection finie (i. e. toute sous-famille finie a une intersection non vide), il existe un $\bigcup_{\mathcal{A}}$ de B appartenant à chaque classe $\bigcup_{\mathcal{A}} + L_{\mathcal{A}}$.

PROPOSITION 12. - L'anneau C est linéairement compact pour la famille des annulateurs de A-sous-modules de I.

En effet, soit M_{∞} une famille de A-sous-modules de I , L_{∞} l'ensemble des Ψ de C tels que $\Psi(\mathbb{T}_{\omega})=0$, et $\Psi_{\infty}+L_{\infty}$ une famille de classes d'équivalences ayant la propriété d'intersection finie. Si $m_{\infty}\in M_{\infty}$ est nul sauf pour un nombre fini de ∞ , alors

$$\sum_{\alpha} \Psi(m_{\alpha}) = \sum_{\alpha} \Psi(m_{\alpha}) = \Psi(\sum_{\alpha} m_{\alpha}) = 0$$

où ψ appartient à l'intersection des $\psi_{\infty} + L_{\infty}$ tels que $m_{\infty} \neq 0$. Ainsi la correspondance $\sum n_{\infty} \longrightarrow \sum \psi_{\infty}(n_{\infty})$ définit une application A-linéaire

de $M = \sum_{\alpha} M_{\alpha}$ dans I . Cette application se prolonge en un endomorphisme ψ de I et ψ est congru à ψ mod L_{α} pour tout \varkappa ,

C. Q. F. D.

En particulier, si l'on munit B de la topologie de la convergence simple, B est un anneau topologique complet.

De même B est linéairement compact pour la famille des ideaux à gauche engendrés par un idempotent et cette propriété ne fait intervenir que B et non pas I.

2. Anneaux réguliers injectifs.

Dans le paragraphe précédent peu de propriétés de I interviennent effectivement et l'on courrait étudier sous quelles conditions ce qui a été dit reste valable quand on remolace I par M, C par B et m par r (comparer avec [1]); nous nous contenterons de remarquer que "tout reste vrai" si par exemple M est l'ensemble des éléments de I annulés par un idéal bilatère de B.

En particulier, supposons que M soit égal à l'ensemble $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}/\mathbb{S}^r, \mathbb{I})$ des éléments annulés par \mathbb{S}^r , \mathbb{I} étant toujours extension essentielle de M. Alors $\mathbb{B} = \mathbb{B}/\mathbb{r}^r = \mathbb{C}/\mathbb{S}^r$ et \mathbb{B} est donc linéairement compact pour la famille des idéaux à gauche engendrés par un idempotent. L'importance de ceci est due à la

PROPOSITION 13 (UTUMI [21]). - Si B est un anneau régulier au sens de von NEUMANN, les assertions suivantes sont équivalentes :

- a. B est linéairement compact pour la famille des idéaux à gauche engendrés par un idempotent (qui sont facteurs directs dans B).
 - b. B est un B-module à droite injectif.
 - (b) ⇒ (a) : Car alore B est l'anneau des endomorphismes d'un module injectif.
- (a) \Longrightarrow (b) : En effet, soit U un idéal à droite de B et soit \hookrightarrow une application B-linéaire de u dans B. On veut montrer que \hookrightarrow est de la forme $x \longrightarrow bx$, $x \in U$, $b \in B$.

Mais l'idéal u est déterminé par les idempotents e_{χ} qu'il contient. De même l'application u est déterminée quand on se donne la famille des u (e_{χ}). Mais u (e_{χ}) est de la forme e_{χ} ou e_{χ} est déterminé à un élément de e_{χ} près. Si e_{χ} , ..., e_{χ} sont e_{χ} sont e_{χ} in the set engendré par un idempotent e_{χ} et e_{χ} est de la forme e_{χ} et e_{χ}

la famille $B(1 - e_{\alpha}) + b_{\alpha}$ a la propriété d'intersection finie. Il existe donc b appartenant à tous les $B(1 - e_{\alpha}) + b_{\alpha}$ et Q(x) = bx si $x \in \mathcal{U}$, C. Q. F. D.

Comme exemple d'anneau régulier injectif, on pourra prendre les produits infinis d'anneaux d'endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension infinie sur des corps gauches.

3. Retour à la localisation.

Nous allons donner une formule qui (avec les notations du paragraphe 1) permet de construire l'anneau C/x sans avoir recours à l'enveloppe injective I de M . Pour cela désignons par E la famille des sous-modules M' de M tels que M soit extension essentielle de M' . Cette famille E satisfait manifestement aux conditions suivantes

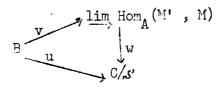
a". Si $\mathbb{N} \supset \mathbb{M}'$ et $\mathbb{M}' \in \mathbb{E}$, alors $\mathbb{N} \in \mathbb{E}$.

b". Si M' € E et M" € Z , alors M' ∩ M" € E .

c". Si $M' \in \mathbb{R}$ et $M' \in \mathbb{R}$ et si $\psi: M' \longrightarrow M$ est un morphisme de M' dans M, alors $\psi^{-1}(M'') \in \mathbb{R}$.

Les conditions (a") et (b") font de E un filtre, et permettent de définir le groupe $\lim_{M' \leftarrow E} \operatorname{Hom}_A(M', M)$. La condition (c") permet manifestement de définir sur $\lim_{M' \leftarrow E} \operatorname{Hom}_A(M', M)$ une structure d'anneau. Nous noterons par v l'application canonique de $B = \operatorname{Hom}_A(M, M)$ dans $\lim_{M \to A} \operatorname{Hom}_A(M', M)$.

PROPOSITION 14. - Il y a un isomorphisme canonique w de l'anneau \varinjlim Hom $_A$ (M', M) sur l'anneau C/S tel que le diagramme suivant soit commutatif :



Nous allons exhiber l'application w et laisser le reste de la preuve pour le lecteur. Si $\cup \$ appartient à $\cup \ \cup \ \cup \$ se prolonge en un endomorphisme de I qui est défini à un élément de $\cup \ \cup \ \cup \ \cup \$ près. On obtient ainsi une application de $\cup \ \cup \ \$

En particulier, si M = A comme A-module à droite, E s'identifie à la famille des idéaux à droite dont A est extension essentielle; en outre les conditions (a"), (b"), (c") entraînent les conditions (a), (b), (c) du chapitre I, paragraphe 7.

Enfin la proposition 14 rappelle fortement la proposition 5. Pour que la ressemblance soit complète, nous ferons pour la fin de ce paragraphe l'hypothèse $\mathcal C$:

- (C) Si A est extension essentielle de l'idéal à droite α et si $x \cdot \alpha = 0$, $x \in A$, alors x = 0.
- Si (C) est satisfait, je dis d'abord que la famille E satisfait à la condition (d) du chapitre I, paragraphe 7, en effet, si ℓ et m appartiennent à E et si ℓ est un idéal à droite non nul de A, alors $\int h \, n \neq 0$ et donc

$$(l \in n)$$
. to $C(l \cdot n) \cap n \neq 0$.

Autrement dit A est extension essentielle de \mathbb{I} . m, où \mathbb{I} . $m \in \mathbb{E}$.

THÉORÈME 1. - Si l'anneau A satisfait à la condition (C), la famille E des idéaux à droite dont A est extension essentielle définit une localisation; le localisé A_E de A est un anneau régulier injectif à droite. Comme A-module à droite, A₋ s'identifie à l'enveloppe injective de A.

4. Exemples [9], [21], [6], [11].

Voici une liste d'exemples bizarres et moins bizarres.

a. A est un anneau tel que tout idéal à droite non nul de A contient un idempotent non nul. Il revient au même de dire que si $a \in A$ et $a \neq 0$, alors il existe $x \in A$, $x \neq 0$, tel que xax = x; ou encore que tout idéal à gauche non nul de A contient un idempotent non nul. Ceci a lieu si A est un anneau régulier au sens de von NEUMANN.

Alors la condition (C) est satisfaite, car si x.a=0, α annule l'idéal à gauche Ax et donc l'idéal à gauche Ae, où e est un idempotent contenu dans Ax. Autrement dit α est contenu dans (1-e)A ce qui n'est possible que si e=0 ou si A n'est pas extension essentielle de α .

On voit en particulier que tout anneau régulier au sens de von NEUMANN se plonge dans un anneau régulier injectif. b. Soit A un anneau primitif avec socle (autrement dit A contient un idéal à droite minimal et fidèle; ceci est le cas si A est l'anneau des endomorphismes continus d'un espace vectoriel topologique). Les idéaux à droite minimaux de A engendrent alors un idéal bilatère S de A, le socle de R. Si \int est un idéal à droite arbitraire de A, alors \int S est contenu dans \int S et n'est pas nul si \int n'est pas nul. Autrement dit A est extension essentielle d'un idéal à droite \int m de A si et seulement si \int contient S. En outre la condition (C) est satisfaite et la proposition 6 montre que le localisé A_E de A n'est autre que \int Hom A (S, S).

Ainsi A_{Σ} est l'anneau des endomorphismes du socle de A qui n'est autre que le bicommutant d'un module simple.

- c. Tout anneau intègre ou quasi-simple (il n'y a pas d'idéal bilatère différent de 0 et de l'anneau) se plonge dans un anneau régulier injectif. Mous allons voir que si A est soumis à des conditions noethériennes l'anneau régulier injectif est en fait un corps gauche ou un anneau simple.
 - d. L'exemple de GOLDIE [6], [11].

THÉORÈME 2. (GOLDIE-LESIEUR-CROISOT). - Soit A un anneau avec élément unité satisfaisant aux conditions suivantes.

- a. (0) est un idéal bilatère premier de A (si a et b sont deux idéaux bilatères non nuls, alors a.b n'est pas nul).
- b. Les idéaux à droite de la forme $(0:a) = \{x | x \in A, ax = 0\}$ satisfont à la condition des chaînes ascendantes.
 - c. A ne contient pas de sommes directes infinies d'idéaux à droite.

Alors l'anneau A satisfait à la condition (\mathcal{C}) et le localisé $\mathbf{A_E}$ de A est un anneau simple. En outre si S désigne le système multiplicativement stable des éléments réguliers de A , alors A admet un anneau de fractions à droite pour S qui s'identifie à $\mathbf{A_E}$.

Montrons d'abord que A satisfait à la condition (\mathcal{C}). Il s'agit de montrer que si a $\neq 0$, il existe un b non nul dans A tel que bA \bigcap (0 : a) = 0.

Autrement dit abx = 0 doit entrainer bx = 0 ou encore $(0:ab) \in (0:b)$. Prenant c tel que (0:c) soit maximal, il existe d tel que $adc \neq 0$, car (0) est un idéal bilatère premier. Il suffit alors de choisir b = dc,

C. Q. F. D.

La condition ($\mathcal C$) est donc satisfaite et A_n est un anneau régulier injectif.

Si A_{Ξ} contenait des familles infinies d'idempotents orthogonaux deux à deux, A contiendrait des sommes infinies d'idéaux à droite : donc A_{Ξ} est semi-simple ; enfin les idéaux bilatères de A_{Ξ} coupent A suivant des idéaux bilatères et (0) ne peut être premier dans A que s'il l'est aussi dans A_{Ξ} ; l'anneau A_{Ξ} est donc simple.

Il reste à démontrer la dernière assertion. Si s \in A est régulier à gauche (i. e. $sx = 0 \Longrightarrow x = 0$), l'homothétie $x \Longrightarrow sx$ est un endomorphisme injectif de A et donc aussi de $A_{\mathbb{R}}$ (qui est extension essentielle de A). Cette homothétie est par conséquent un automorphisme de $A_{\mathbb{R}}$ et est inversible dans $A_{\mathbb{R}}$; en particulier s est régulier à droite dans A (i. e. $xs = 0 \Longrightarrow x = 0$). Ainsi S est formé des éléments réguliers à gauche de A.

Pour que la démonstration soit complète, il suffit de montrer, d'après le charitre I, que :

 $\text{C'est immédiat, car l'idéal à droite de } A \text{ } A_{\mathbb{E}} \text{ engendré par s est } A_{\mathbb{E}}.$

Soit n la longueur de $A_{\mathbb{Z}}$ comme $A_{\mathbb{E}}$ -module. Si a appartient à $A_{\mathbb{E}}$ et si ψ_a désigne l'homothétie $x \to ax$, on remarque d'abord que Ker φ_a et les longueurs : $\ell \text{ (Ker } \varphi_a) + \ell \text{ (Im } \varphi_a) = n$

Soit maintenant α un idéal à droite tel que A soit extension essentielle de α et soit

$$A_E = e_1 A_E \oplus \dots \oplus e_n A_E$$

une décomposition de A en idéaux simples (e ldempotent). Il suffit de construire un s ϵ a tel que Im ψ_s rencontre e $_1$ $_{\mathbb{E}}$, ..., $_n$ $_n$ $_{\mathbb{E}}$.

Or il existe a_1 tel que e_1 a_1 soit différent de 0 et e_1 $a_1 \in \Delta$. Alors $a_1 = e_1$ $A_E \cap \alpha \neq 0$ et $\mathcal{L}(\text{Ker } \psi_{e_1} a_1) = n - 1$.

De même $a_2 = e_2 A_E \cap a \neq 0$ et a_2 . Ker $\forall_{e_1 a_1} \cap a_2$. (Ker $\forall_{e_1 a_1} \cap A \neq 0$, car (0) est premier. Il existe donc a_2 tel que $e_2 a_2 \in a_2$ et que Ker $\forall_{e_1 a_1} \cap A \neq 0$ b'ou $f(\text{Ker } \forall_{e_1 a_1} \cap A \neq 0) = n - 2$.

Et ainsi de suite on construit a_1 , ... , a_n , tels que e_i $a_i \in \alpha$ et que

Im
$$\Psi_{e_i a_i} = e_i A$$
, Ker $\Psi_{e_1 a_1} \cap \dots \cap \text{Ker } \Psi_{e_n a_n} = 0$

Alors $s = e_1 a_1 + \dots + e_n a_n$ est manifestement régulier.

5. Quelques conséquences du théorème de Goldie-Lesieur-Croisot.

Nous supposerons à partir de maintenant que A est un anneau noethérien à droite et que p est un idéal bilatère premier de A . Alors l'anneau A/p satisfait aux conditions du théorème 2, et est donc contenu dans un anneau simple A^* qui est extension essentielle de A/p comme module à droite. En outre l'enveloppe injective I de A/p comme A-module à droite contient A^* et A^* s'identifie à l'ensemble des éléments de I annulés par p. Si l'on emploie les notations du paragraphe 1 et si M = A/p, alors B = B/p = A/p et $C/p = A^*$.

Les idéaux à droite de A/μ qui sont des annulateurs corresondent buunivoquement aux idéaux à droite de A^* . On en déduit que tout A-sous-module à droite non nul de A^* engendre la même sous-catégorie localisante de A-modules que A/μ (car est intersection finie d'annulateurs d'éléments d'un tel sous-module). En particulier si les injectifs indécomposables correspondent biunivoquement aux idéaux bilatères premiers de A, toute sous-catégorie localisante D de A-modules à droite est caractérisée par les A-modules du type A/μ qu'elle contient. On peut alors définir le spectre premier de A comme l'ensemble de ses idéaux bilatères premiers et munir ce spectre de la topologie de Zariski. De cette manière, on retrouve la correspondance entre les sous-catégories localisantes et les sous-ensembles du spectre qui sont réunion de fermés.

Tout cela se simplifie beaucoup quand A est un module noethérien sur son centre. Les phénomènes nouveaux qui apparaissent dans ce cas sont liés à la structure des injectifs et à un théorème de dualité qui généralise la dualité de MACAULAY-MATLIS [12], [5]. Nous n'avons pas le temps d'exposer cela ici, et nous nous contenterons de donner un exemple frappant d'anneau artinien. En particulier, on verra que si ϕ est un idéal bilatère mon nul de A, il n'existe pas toujours de foncteur localisation qui fasse de \mathcal{N} un idéal bilatère maximum du localisé de A.

6. Exemple: modules sur l'anneau des matrices triangulaires.

Soient k un corps et $T=T_n(k)$ le sous-anneau de $M_n(k)$ formé des matrices triangulaires. Nous allons nous intéresser aux modules à gauche sur T.

L'anneau T est formé de matrices A de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \ell_1 \end{pmatrix}$$

Le radical I est formé des matrices "dont la diagonale est nulle" :

$$a_1 = b_1 = \dots = f_1 = 0$$
.

L'anneau T/r est un produit de n corps isomorphes à k et les matrices diagonales forment un sous-anneau qui s'identifie à T/r par l'application canonique de T sur T/r ("sous-anneau de Cohen").

Les idéaux maximaux de T sont en évidence sur la représentation matricielle ; les modules simples sont isomorphes à k comme groupes abéliens, la multiplication par A se réduisant respectivement à celle par a_1 , b_1 , ..., t_1 : on notera les modules simples par S_1 , ..., S_n .

Soit E la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la case (i,i) qui vaut 1. La matrice E est idempotente, et TE est facteur direct dans T. C'est l'idéal à gauche fermé des matrices triangulaires dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la i-ième colonne:

- $TE_1 = P_1$ est simple et isomorphe à S_1 .
- • •
- $TE_i = P_i$ est un module à gauche projectif de longueur i ; il ne possède qu'un seul sous-module de longueur i 1 et ce sous-module est isomorphe à $TE_{i-1} = P_{i-1}$.

- . . .

- $TE_n = P_n$ a pour longueur n et possède une seule suite de Jordan-Hölder. Les sous-modules de P_n sont isomorphes aux P_i . En particulier, comme les P_i sont les seuls projectifs indécomposables et que tout sous-module d'un projectif indécomposable est projectif, l'anneau $T = T_n(k)$ est héréditaire. On considèrera que P_n est un Grapeau de k-espaces vectoriels et que T est l'anneau des endomorphismes de ce drapeau. Le commutant du T-module P_n est k et le bicommutant est $M_n(k)$.

En fait P_n est aussi un T-module injectif et tous les quotients de P_n

sont injectifs car T est héréditaire : on obtient de cette manière tous les injectifs indécomposables, et on notera par \mathbf{I}_k l'injectif indécomposable dont le socle est \mathbf{S}_k .

Soit maintenant M un T-module arbitraire: si deux sous-modules M' et M" de M sont injectifs, la somme M' + M" qui est un quotient de M' \oplus M" est un module injectif; le module M contient donc un sous-module injectif maximum I, et M = I \oplus N, oa N ne contient aucun sous-module injectif.

Je dis qu'alors aucune suite de comoposition de N ne possède de quotient isomorphe à S_n . Car si $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N$, avec $N_2/N_1 = S_n$, alors N_2/rN_2 contient un facteur isomorphe à S_n , et l'enveloppe projective de N_2 a P_n en facteur direct. Autrement dit N_2 contient un quotient de P_n , donc un injectif : contradiction.

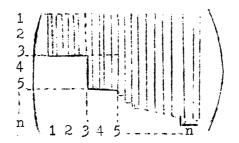
Autrement dit N appartient à la catégorie des T-modules dont aucune suite de composition n'a de quotient isomorphe à S_n . L'étude de cette catégorie S_n peut se faire directement, ou bien à l'aide de la remarque suivante :

Le module N appartient à \tilde{E} si et seulement si E_n N = 0 , donc si c'est un module sur l'anneau quotient T_n/T_n $E_n \simeq T_{n-1}$. D'ou par récurrence sur n le résultat que voici :

Tout $T_n(k)$ -module à gauche est somme directe de modules indécomposables. Tout indécomposable est déterminé par la donnée de son enveloppe injective et projective. C'est le quotient d'un sous-module de P_n .

On connaît donc tous les objets de la catégorie C des T-modules. Aussi la localisation est-elle particulièrement agréable.

Soit D une sous-catégorie localisante de C. Elle est engendrée par des modules simples (par exemple S_2 , S_3 , S_5). Alors le plus petit idéal à gauche α tel que $T/\alpha \in D$ est un idéal bilatère. En outre comme l'anneau T est héréditaire, le foncteur localisation n'est autre que $M \longrightarrow \text{Hom}_T(\alpha, M)$ (corollaire 1 de la proposition 6). Tous les foncteurs localisation sont donc exacts. Dans l'exemple choisi, T_D n'est autre que l'anneau des matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la zone hachurée :



En outre T se plonge dans T_D de la façon naturelle, c'est-à-dire en associant à toute matrice de T la "même" matrice de T_D .

L'exemple de $T_n(k)$ a le "désavantage" de toujours fournir des foncteurs localisation exacts. De même les conditions du corollaire 1 de la proposition 6 sont toujours satisfaites. Pour un contre-exemple à ce corollaire, on peut choisir la catégorie des modules sur l'anneau des endomorphismes du groupe abelien $Z/(p) \oplus Z/(p^2)$. Nous ne détaillons pas les calculs...

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] AZUMAYA (Gorô). On generalized semi-primary rings and Krull-Remak-Schmidt's theorem, Jap. J. Math., t. 19, 1944-48, p. 525-547.
- [2] CARTAN (Henri). Homologie et cohomologie d'une algèbre graduée, Séminaire Cartan, t. 11, 1958/59: Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires, n° 15.
- [3] DUBREIL (Paul). Algèbre, t. 1, 2e éd. Paris, Gauthier-Villars, 1954.
- [4] EILENBERG (Samuel). Homological dimension and syzygies, Annals of Math., Series 2, t. 64, 1956, p. 328-336.
- [5] GABRIEL (Pierre). Objets injectifs dans les catégories abéliennes, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 12, 1958/59 : Algèbre et Théorie des nombres, n° 17.
- [6] GOLDIE (A. W.). The structure of prime rings, under ascending chain conditions, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 8, 1958, p. 589-608.
- [7] GROTHENDIECK (Alexander). Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohôku math. H., Series 2, t. 9, 1957, p. 119-221.
- [8] GROTHENDIECK (Alexander). Cohomology theory of abstract algebraic varieties, Congrès international des Mathématiciens [1958. Edimbourg].
- [9] JOHNSON (R. E.). The extended centralizer of a ring over a module, Proc. Amer. math. Soc., t. 2, 1951, p. 891-896.
- [10] LEPTIN (Horst). Linear kompakte Moduln und Ringe, Math. 2., t. 62, 1955, p. 241-267.
- [11] LESIEUR (Léonce) et CROISOT (Robert). Structure des anneaux premiers noethériens à gauche, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 2545-2547.
- [12] MATLIS (Eben). Injective modules over noetherian rings, Pacific J. Math., t. 8, 1958, p. 511-528.
- [13] REES (D.). A theorem of homologival algebra, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 52, 1956, p. 605-610.
- [14] REES (D.). Polar modules, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 53, 1957, p. 554-567.
- [15] Séminaire CHEVALLEY, t. 3, 1958/59 : Variétés abéliennes et variétés de Picard.
- [16] SERRE (Jean-Pierre). Sur l'homologie des espaces fibrés et les groupes d'homotopie, Cours professé à Princeton, 1952, multigr.
- [17] SERRE (Jean-Pierre). Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.

- [18] SERRE (Jean-Pierre). Algèbre locale, Multiplicités, Cours professé au Collège de France, 1957/58, multigr.
- [19] SERRE (Jean-Pierre). Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens, Proc. Intern. Symp. on algebraic number theory [1955. Tokyo and Nikko], p. 175-189. Tokyo, Science Council of Japan, 1956.
- [20] SHIH Weishu. Ensembles simpliciaux et opérations cohomologiques, Séminaire Cartan, t. 11, 1958/59: Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires secondaires, n° 7.
- [21] UTUMI (Yuzo). On quotient rings, Osaka math. J., t. 8, 1956, p. 1-18.