Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Pierre Lefebvre

Sur la structure des demi-groupes, d'après les travaux de J. A. Green et W. D. Munn

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 12, nº 2 (1958-1959), exp. nº 13, p. 1-24

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1958-1959__12_2_A1_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL,
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1958/59

-:-:-:-

2 février 1959

SUR LA STRUCTURE DES DEMI-GROUPES,
D'APRÈS LES TRAVAUX DE J. A. GREEN ET W. D. MUNN

par Pierre LEFEBVRE

INTRODUCTION. - Dans le mémoire [12], publié en 1951, dont nous exposons ici les résultats, J. A. GREEN a voulu jeter les bases d'une théorie systématique des demi-groupes. On sait que l'extrême généralité de cette notion rend le propos difficile. Les travaux postérieurs au mémoire de GREEN permettent de juger de la fécondité de cette tentative : nous essaierons d'en donner une idée en exposant les résultats récemment publiés [14] [15] par W. D. MUNN ; pour les autres, en particulier pour ceux de A. H. CLIFFORD, nous nous bornerons à des indications bibliographiques.

Un demi-groupe est un ensemble D dans lequel est définie une opération associative :

$$\forall\ x\ ,\ y\ ,\ z\ \in D\ ;\quad x(yz) = (xy)z\ .$$

Le point de départ du travail de GREEN est l'étude de certaines équivalences définies dans D à propos des idéaux principaux (à gauche, à droite, bilatères). On s'intéresse par la suite à la structure des classes de ces équivalences et on caractérise certains types de demi-groupes par des propriétés particulières de ces classes.

1. Définition et propriétés des équivalences $\overline{\ell}$, $\overline{r}$, $\overline{f}$ et $\overline{d}$.

Dans un demi-groupe D , l'idéal principal à gauche engendré par un élément $x \in D$ est l'ensemble $(x)_L = Dx \cup x$. C'est l'intersection de tous les idéaux à gauche de D qui contiennent x . De même, tout élément $x \in D$ engendre un idéal principal à droite $(x)_R = xD \cup x$ et un idéal principal bilatère $(x)_F = DxD \cup xD \cup Dx \cup x$.

Si deux éléments x , $y \in D$ engendrent le même idéal principal à gauche, nous écrirons : $x \equiv y(\overline{\ell})$, définissant ainsi une relation d'équivalence $\overline{\ell}$ dans le demi-groupe D . De la même façon, nous écrirons $x \equiv y(\overline{r})$ si et seulement si $(x)_R = (y)_R$ et $x \equiv y(\overline{f})$ si et seulement si $(x)_F = (y)_F$; $\overline{\ell} \cap \overline{r}$ est l'équivalence définie par $x \equiv y \quad (\overline{\ell} \cap \overline{r})$ si et seulement si $x \equiv y(\overline{\ell})$ et $x \equiv y(\overline{r})$.

Nous désignerons les classes d'équivalence modulo $\overline{\ell}$, $\overline{r}$, $\overline{f}$, contenant $x \in D$, respectivement par L_x, R_x, F_x.

Aucune de ces équivalences n'est en général régulière [10]; on peut toutefois noter que $\overline{r}$ est régulière à gauche et $\overline{\ell}$ à droite. En outre, $x \equiv y(\overline{\ell})$ implique $x \equiv y(\overline{f})$, ce que nous exprimons par l'inclusion des équivalences $\overline{\ell} \subseteq \overline{f}$; de même, on a $\overline{r} \subseteq \overline{f}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $x \equiv y(\overline{\ell})$ est que, ou bien $x = y$, ou bien $\exists\ a , b \in D$ vérifiant $ax = y$; $by = x$.

On donne une condition tout à fait analogue pour que : $x \equiv y(\overline{r})$, mais exprimer que x et y engendrent le même idéal bilatère requiert un choix parmi dix conditions du même type. En fait, nous n'aurons besoin par la suite que du cas où D possède un élément-unité ; lorsuq'il en est ainsi, l'égalité $(x)_F = DxD = DyD = (y)_F$ est vérifiée si et seulement si : $\exists\ a , b , c , d \in D$ vérifiant $axb = y$; $cyd = x$.

Pour justifier la restriction précédente, on remarque qu'un demi-groupe D qui n'a pas d'élément-unité peut toujours être plongé dans un autre D_1 qui en possède. On pose $D_1 = D \cup \{1\}$; le produit de deux éléments $x , y \in D_1$ est égal au produit xy dans D si $x , y \in D$; sinon, on pose : $x.1 = 1.x = x \quad \forall x \in D_1$
On démontre ensuite que :

THÉORÈME 1.1. - Les idéaux principaux à droite, à gauche et bilatères de D_1, qui sont engendrés par un élément $x \in D$, sont les mêmes que les idéaux correspondants de D.

La démonstration est immédiate ; pour chaque équivalence $\overline{r}$, $\overline{\ell}$ ou $\overline{f}$, il y a une seule classe supplémentaire, qui est celle formée par le seul élément ℓ.

THÉORÈME 1.2. - Les deux équivalences $\overline{\ell}$ et $\overline{r}$ sont permutables (ou associables, suivant la terminologie de P. DUBREIL [11] [10]).

On démontre que, si pour deux éléments quelconques $x , y \in D$, il existe $z \in D$ tel que

(1) $$x \equiv z(\overline{\ell}) \qquad \text{et} \qquad z \equiv y(\overline{r})$$

on peut trouver $w \in D$ vérifiant :

(2) $$x \equiv w(\overline{r}) \quad \text{et} \quad w \equiv y(\overline{\ell})$$

Les relations (1) impliquent l'existence d'éléments a, b, c, $d \in D$ vérifiant

$$ax = z \;,\quad bz = x \quad \text{et} \quad zc = y \;,\quad yd = z$$

(sauf peut-être si $x = z$ ou si $z = y$; dans ce cas, on prend ou bien $w = y$ ou bien $w = x$). En posant $w = xc = bzc = by$, nous voyons que

(3) $$wd = byd = bz = x \quad \text{avec} \quad xc = w \quad \text{d'où} \quad x \equiv w(\overline{r})$$

et

(4) $$aw = axc = zc = y \quad \text{avec} \quad by = w \quad \text{d'où} \quad w \equiv y(\overline{\ell})$$

COROLLAIRE 1.1. - La relation $\overline{d} = \overline{\ell}.\overline{r} = \overline{r}.\overline{\ell}$ est une équivalence.

REMARQUE. On a, d'une manière évidente : $\overline{\ell} \subsetneq \overline{d}$ et $\overline{r} \subsetneq \overline{d}$. Autrement dit, chaque $\overline{d}$-classe est la somme, soit de $\overline{\ell}$-classes, soit de $\overline{r}$-classes.

Dans le même ordre d'idée, on compare les équivalences $\overline{d}$ et $\overline{f}$.

2. Comparaison des équivalences $\overline{d}$ et $\overline{f}$.

Si $x \equiv y(\overline{d})$ les équations (3) et (4) du paragraphe précédent montrent que $x \equiv y(\overline{f})$ c'est-à-dire $\overline{d} \subsetneq \overline{f}$. L'inclusion est en général stricte, comme le montre le contre-exemple suivant :

Soit T le demi-groupe libre engendré par les symboles x, y, z, u, a, b ; T est l'ensemble des suites finies (ou mots) A, B ... formées à partir de ces six symboles, le produit de A par B étant le mot AB obtenu par juxtaposition. Les relations $xay = b$, $zbu = a$ définissent dans T une équivalence régulière $\overline{q}$: deux mots A et B appartiennent à la même $\overline{q}$-classe $\overline{A}$ $(= \overline{B})$ si et seulement si B peut être déduit de A par une suite finie de "transformations élémentaires", dont chacune appartient à l'un des quatre types suivants : remplacer la lettre b par la suite xay, remplacer la lettre a par zbu, remplacer xay par b, remplacer zbu par a. L'ensemble $T/\overline{q}$ de ces $\overline{q}$-classes est un demi-groupe (avec la multiplication $\overline{A}.\overline{B} = \overline{AB}$). On a évidemment, dans $T/\overline{q}$, $\overline{a} \equiv \overline{b}(\overline{f})$. Mais il n'y a pas, dans $T/\overline{q}$, d'élément qui soit $\overline{\ell}$ ou $\overline{r}$ équivalent à $\overline{a}$, sauf $\overline{a}$ lui-même. Or on a $\overline{a} \neq \overline{b}$, donc finalement $\overline{a} \not\equiv \overline{b}(\overline{d})$.

On peut donner, toutefois, certaines conditions suffisantes pour que $\overline{d} = \overline{f}$. On peut d'ailleurs raisonner sur un demi-groupe ayant un élément-unité, car on a $\overline{d} = \overline{f}$ dans D si et seulement si on a $\overline{d} = \overline{f}$ dans D_1 (théorème 1.1).

THÉORÈME 2.1. - $\overline{d} = \overline{f}$ <u>si tout élément</u> $a \in D$ <u>est d'ordre fini.</u>

Cela signifie que l'ensemble $\{a , a^2 , a^3 ,\ldots\}$ a un nombre fini d'éléments distincts. On sait qu'il existe alors une puissance finie de a idempotente [17] [19] .

Si $a \equiv b(\overline{f})$, il existe $x , y , z , u \in D$ vérifiant $xay = b$, $zbu = a$.

D'où : $xz.b.uy = b$ et, pour tout entier r positif, $(xz)^r b(uy)^r = b$.

On choisit r de manière que $(uy)^r$ soit idempotent et on multiplie à droite par $(uy)^r$: il vient : $b(uy)^r = b$. En posant $c = bu$, on a : $c.y.(uy)^{r-1} = b$ (ou $cy = b$, si $r = 1$) d'où $bu = c \equiv b(\overline{r})$. De même $zb \equiv b(\overline{\ell})$; d'où $zbu \equiv bu(\overline{\ell})$ c'est-à-dire : $a \equiv c(\overline{\ell})$ et par conséquent $a \equiv b(\overline{d})$.

En particulier, $\overline{d} = \overline{f}$ pour tout demi-groupe fini. Le théorème 8.2 fournit une autre classes importante de demi-groupes ayant cette propriété.

Nous étudions maintenant la structure d'une classe quelconque de l'équivalence $\overline{d}$.

3. <u>Structure d'une</u> $\overline{d}$-<u>classe</u>.

DÉFINITION 3.1. - <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>deux idéaux à gauche de</u> D . <u>Un</u> D-<u>isomorphisme de</u> A <u>sur</u> B <u>est une application biunivoque</u> μ <u>de</u> A <u>sur</u> B <u>possédant la propriété</u> $d(a\mu) = (da)\mu$, $\forall\, d \in D$ <u>et</u> $\forall\, a \in A$.

LEMME 3.1. - <u>Si</u> $x \equiv y(\overline{r})$ <u>et si</u> $a , b \in D$ <u>vérifient</u> $xa = y$, $yb = x$, <u>les applications</u>

$$(\theta) : \; z \rightarrow za , \quad z \in (x)_L$$

$$(\varphi) : \; w \rightarrow wb , \quad w \in (y)_L$$

<u>sont des</u> D-<u>isomorphismes inverses de</u> $(x)_L$ <u>sur</u> $(y)_L$ <u>et de</u> $(y)_L$ <u>sur</u> $(x)_L$. <u>En particulier,</u> θ <u>applique</u> L_x <u>sur</u> L_y , φ <u>applique</u> L_y <u>sur</u> L_x . <u>Les éléments qui se correspondent par</u> θ (ou par φ) <u>sont</u> $\overline{r}$-<u>équivalents</u>.

De l'associativité dans D résulte la propriété $d(a\mu) = (da)\mu \; \forall d \in D$ et $\forall a \in A$ pour $\mu = \theta$ ou $\mu = \varphi$.

De $xa = y$ et $yb = x$, on déduit $xab = x$. Si $z \in (x)_L$, ou bien $z = x$ ou bien $z = dx$ pour un $d \in D$. Dans chaque cas $zab = z$, si bien que le produit $\theta\varphi$ est l'application identique de $(x)_L$. De même, $\varphi\theta$ est l'application identique de $(y)_L$, Donc θ et φ sont des applications biunivoques inverses de $(x)_L$ sur $(y)_L$ et de $(y)_L$ sur $(x)_L$. L_x et L_y étant les ensembles de générateurs respectivement de $(x)_L$ et de $(y)_L$, se correspondent dans les D-isomorphismes précédemment définis.

Enfin, soit $z \in (x)_L$ et $z' = z\theta \in (y)_L$. On a : $z' = za$, $z'b = z$ c'est-à-dire $z \equiv z'(\overline{r})$.

On peut alors préciser la structure d'une $\overline{d}$-classe :

THÉORÈME 3.1. - Soit Δ une $\overline{d}$-classe quelconque d'un demi-groupe D . On représente par R_i , L_j les $\overline{r}$-classes et les $\overline{\ell}$-classes distinctes de D contenues dans Δ ; i et j décrivent indépendamment des ensembles d'indices I et J ; on suppose que I et J ont un certain indice 1 en commun (ce qui est possible, puisque seuls les cardinaux de I et J interviennent, et que chacun de ces ensembles a au moins un élément). Dans ces conditions :

a. Si J a plus d'un élément, il existe pour tout $j \in J$ des éléments a_j , $b_j \in D$ tels que les applications :

$$\theta_j : z \longrightarrow za_j \qquad z \in L_1$$

$$\varphi_j : w \longrightarrow wb_j \qquad w \in L_j$$

sont des applications biunivoques inverses de L_1 sur L_j et de L_j sur L_1 ; θ_1 et φ_1 sont chacune l'application identique de L_1 .

b. Si I a plus d'un élément, il existe pour tout $i \in I$ des éléments c_i , $d_i \in D$ tels que les applications :

$$\psi_i : z \longrightarrow c_i z \qquad z \in R_1$$

$$\chi_i : w \longrightarrow d_i w \qquad w \in R_i$$

sont des applications biunivoques inverses de R_1 sur R_i et de R_i sur R_1 ;

ψ_1 <u>et</u> χ_1 <u>sont chacune l'application identique de</u> R_1 .

c. <u>Si</u> $A_{ij} = R_i \cap L_j$, <u>les applications</u> $\sigma_{ij} = \psi_i \theta_j = \theta_j \psi_i$ <u>et</u> $\tau_{ij} = \chi_i \varphi_j = \varphi_j \chi_i$ <u>induisent respectivement sur</u> A_{11} <u>et</u> A_{ij} <u>des applications biunivoques inverses de ces ensembles sur</u> A_{ij} <u>et</u> A_{11} . <u>Si</u> I (et/ou J) <u>a seulement un élément, ou interprète</u> θ_1 , φ_1 (et/ou ψ_1 , χ_1) <u>comme des applications identiques</u>. <u>Autrement dit, toutes les classes de l'équivalence</u> $\bar{\ell} \cap \bar{r}$ <u>contenues dans</u> Δ <u>sont des ensembles équipotents</u>.

a. Soit $j \in J$, $j \neq 1 \in J$; si $x \in L_1$, $z \in L_j$ puisque $x \equiv z(\bar{d})$ il existe $y \in D$ tel que $x \equiv y(\bar{r})$ et $y \equiv z(\bar{\ell})$. Cela signifie que : $x \in L_1$, $y \in L_j$ et $x \equiv y(\bar{r})$. Il existe donc, d'après le lemme 3.1, des éléments a_j , b_j possédant les propriétés requises.

Ceci est vrai pour $j \neq 1$; pour $j = 1$, nous définissons alors $a_1 = b_1 =$ n'importe quel produit $a_j b_j$, ce qui donne $xa_1 = xb_1 = x$ et nous voyons, comme dans la démonstration du lemme, que les applications correspondantes sont chacune l'application identique de L_1 .

b. Démonstration analogue, en utilisant le lemme dual du lemme 3.1.

c. Pour I et J quelconques, on voit d'abord que θ_j et ψ_i sont permutables, soit à cause de l'associativité dans D , soit parce que l'une des applications (ou les deux) est l'application identique. D'après le lemme, θ_j respecte l'équivalence $\bar{r}$ dans L_1 ; de même, ψ_i respecte l'équivalence $\bar{\ell}$ dans R_1 ; donc $A_{11}\theta_j \subseteq A_{1j}$ et $A_{11}\sigma_{ij} \subseteq A_{1j}\psi_i \subseteq A_{ij}$. De même $A_{ij}\tau_{ij} \subseteq A_{11}$ et puisque $\sigma_{ij}\tau_{ij}$ et $\tau_{ij}\sigma_{ij}$ sont les applications identiques de A_{11} et A_{ij} , on a $A_{11}\sigma_{ij} = A_{ij}$, $A_{ij}\tau_{ij} = A_{11}$.

REMARQUE. - Il résulte de cette démonstration que les A_{ij} ne sont pas vides ; cela peut aussi se voir directement : si $a \in R_i$ et $b \in L_j$, de $a \equiv b(\bar{d})$ résulte l'existence de $w \in D$ tel que $a \equiv w(\bar{r})$, $w \equiv b(\bar{\ell})$ c'est-à-dire $w \in R_i$ et $w \in L_j$.

La définition d'un ordre (partiel) dans l'ensemble des classes de chacune des équivalences $\bar{\ell}$, $\bar{r}$, et $\bar{f}$ conduit à étudier certaines conditions minimales, qui joueront par la suite un rôle important. Nous compléterons ici le mémoire de GREEN par des résultats empruntés à MUNN [14] , [15] .

4. Etude de certaines conditions minimales.

On désigne par $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ les ensembles de toutes les $\bar{r}$, $\bar{\ell}$, et $\bar{f}$-classes de D. On définit une relation d'ordre dans l'ensemble $\mathcal{R}$, par exemple de la manière suivante : soient $x, y \in D$; $R_x, R_y \in \mathcal{R}$. Nous écrirons $R_x \leq R_y$ si et seulement si : $(x)_R \subseteq (y)_R$. On définit de façon analogue un ordre dans $\mathcal{L}$ et un ordre dans $\mathcal{F}$. La notation commune $\leq$ dans les trois cas ne peut provoquer de confusion, car il sera toujours clair, d'après le contexte, auquel des ensembles $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{F}$ il se rapporte. Tout ensemble V, partiellement ordonné par une relation $\leq$, satisfait à la condition minimale pour cette relation, si tout sous-ensemble V' de V $(V' \neq \emptyset)$ contient au moins un élément minimal. Cette condition équivaut, moyennant l'axiome du choix, à la condition de chaîne descendante pour cet ensemble.

DÉFINITION 4.1. - Un demi-groupe D vérifie la condition $\mathfrak{M}_r$, $\mathfrak{M}_\ell$ ou $\mathfrak{M}_f$ suivant que l'ensemble correspondant $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{F}$ satisfait à la condition minimale pour la relation $\leq$.

Il est immédiat que l'une quelconque de ces conditions équivaut à la condition minimale pour l'ensemble des idéaux principaux correspondants (ordonné par l'inclusion). Elles sont plus faibles que les conditions minimales pour l'ensemble de tous les idéaux à droite, à gauche ou bilatères.

Nous utiliserons également dans la suite de cet exposé des conditions minimales plus faibles encore que $\mathfrak{M}_\ell$ et $\mathfrak{M}_r$.

DÉFINITION 4.2. - Un demi-groupe D vérifie la condition $\mathfrak{M}_r^*$ si l'ensemble de toutes les $\bar{r}$-classes de D contenues dans une $\bar{f}$-classe quelconque vérifie la condition minimale.

On a une définition analogue de $\mathfrak{M}_\ell^*$. Il est immédiat que $\mathfrak{M}_\ell$ entraîne $\mathfrak{M}_\ell^*$ et que $\mathfrak{M}_r$ entraîne $\mathfrak{M}_r^*$.

Les conditions $\mathfrak{M}_\ell$, $\mathfrak{M}_r$ et $\mathfrak{M}_f$ sont en général tout à fait indépendantes.

Par exemple, le demi-groupe de BAER et LÉVI [1] admettant la division à gauche constitue une seule $\bar{\ell}$-classes ; il ne possède pas d'idéaux à droite minimaux, donc il vérifie $\mathfrak{M}_\ell$ et $\mathfrak{M}_f$ sans vérifier $\mathfrak{M}_r$.

Le produit du demi-groupe de Baer et Lévi et d'un demi-groupe anti-isomorphe au demi-groupe de Baer et Lévi vérifie $\mathfrak{M}_f$, mais ne vérifie ni $\mathfrak{M}_\ell$, ni $\mathfrak{M}_r$.

Moins immédiat peut-être est le fait qu'un demi-groupe peut satisfaire $\mathfrak{M}_\ell$ sans satisfaire $\mathfrak{M}_r$ et $\mathfrak{M}_f$.

MUNN donne dans ce cas l'exemple suivant : soit S l'ensemble formé d'un élément 0 et de l'ensemble de tous les couples ordonnés (i , j) où i et j sont des entiers positifs tels que $i < j$.

La multiplication dans S est définie par les lois :

$$(i , j)(r , s) = \begin{cases} (i , s) & \text{si } j = r \\ 0 & \text{si } j \neq r \end{cases}$$

$$0x = x0 = 0 \quad \forall \quad x \in S \quad .$$

Elle est associative, S est un demi-groupe.

L'idéal à gauche engendré par (i , j) est $\{0 ; (r , j) ; 1 \leq r \leq i\}$ et cet ensemble est fini. S vérifie $\mathfrak{M}_\ell$.

De même ; l'idéal à droite R_{ij} engendré par (i , j) est $\{0 ; (i , s) ; s \geq j\}$ et l'idéal bilatère I_{ij} engendré par (i , j) est $\{0 ; (r , s) ; 1 \leq r \leq i ; s \geq j\}$ Les chaînes décroissantes $R_{ij} \supset R_{i,j+1} \supset R_{i,j+2} \ldots$ et $I_{ij} \supset I_{i,j+1} \supset I_{i,j+2} \ldots$ peuvent toutes deux être continuées indéfiniment. S ne satisfait ni à $\mathfrak{M}_r$ ni à $\mathfrak{M}_f$. Par ailleurs, GREEN démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 4.1. - <u>Si un demi-groupe</u> D <u>vérifie simultanément</u> $\mathfrak{M}_r$ <u>et</u> $\mathfrak{M}_\ell$, <u>il vérifie</u> $\mathfrak{M}_f$.

Soit D un demi-groupe vérifiant à la fois $\mathfrak{M}_\ell$ et $\mathfrak{M}_r$. Pour démontrer que D satisfait à $\mathfrak{M}_f$, nous supposerons que D a un élément-unité, car l'adjonction à D d'un élément unité affecte les ensembles $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{F}$ en ajoutant seulement à chacun d'eux un élément maximum $(R_1$, L_1 et F_1 respectivement). D'après le théorème 1.1, les ensembles $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{F}_1$ de $D_1 = D \cup \{1\}$ vérifient la condition minimale si et seulement si les ensembles $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{F}$ de D y satisfont.

On a donc $D = D^2$, et tout élément de D peut être représenté comme produit de deux éléments de D .

Soit $\mathfrak{F}'$ un sous-ensemble non-vide de $\mathfrak{F}'$. L'ensemble Z des éléments de D dont les $\overline{f}$-classes appartiennent à $\mathfrak{F}'$ n'est pas vide. On exprime chaque élément de Z de toutes les manières possibles sous la forme xy $(x , y \in D)$.

Si $\mathcal{L}'$ est l'ensemble de toutes les $\bar{\ell}$-classes L_x , pour tous les x ainsi définis, $\mathcal{L}'$ n'est pas vide, donc admet un élément minimal, par exemple L_{x_0} . Il existe $y \in D$ tel que $x_0\, y \in Z$. Soit encore $\mathcal{R}'$ l'ensemble (non vide) de tous les éléments de $\mathcal{R}$ correspondant aux y de la relation $x_0\, y \in Z$. $\mathcal{R}'$, non vide, admet un élément minimal R_{y_0} $(x_0\, y_0 \in Z)$. Nous démontrons que la $\bar{f}$-classe F_0 qui contient $x_0\, y_0$ est un élément minimal de $\mathcal{F}'$.

Soit en effet $F_1 < F_0$, $F_1 \in \mathcal{F}'$. Il existe un élément de F_1 de la forme $z = a x_0\, y_0\, b$, pour un couple a , $b \in D$. Mais alors $L_{ax_0} \in \mathcal{L}'$ avec $L_{ax_0} \leq L_{x_0}$. D'où $L_{ax_0} = L_{x_0}$, en tenant compte de la minimalité de L_{x_0} .

C'est-à-dire : $a x_0 \equiv x_0 (\bar{\ell})$. Multiplions à droite par $y_0\, b$, nous obtenons $z \equiv x_0\, y_0\, b \;\; (\bar{\ell})$, donc $x_0\, y_0\, b$ appartient à la même $\bar{f}$-classe F_1 que z . Alors $x_0\, y_0\, b \in Z$ et $R_{y_0 b} \in \mathcal{R}'$ avec $R_{y_0 b} \leq R_y$. La minimalité de R_{y_0} entraîne comme ci-dessus $y_0\, b \equiv y_0 (\bar{r})$. Multiplions à gauche par x_0 , nous obtenons $x_0\, y_0\, b \equiv x_0\, y_0 (\bar{r})$ et nous voyons que $x_0\, y_0\, b$ appartient à la $\bar{f}$-classe F_0 . Les classes F_1 et F_0 se coupant sont égales.

Les demi-groupes du théorème 2.1 sont également caractérisés par une condition minimale. On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des sous-demi-groupes principaux de D , c'est-à-dire les sous-demi-groupes $(a)_S$ engendrés par un seul élément a . Comme précédemment, $\mathcal{S}$ peut être ordonné par l'inclusion. Soit $\mathcal{M}_s$ la condition minimal correspondante.

THÉORÈME 4.2. - <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe</u> D <u>vérifie</u> $\mathcal{M}_s$ <u>est que tous les éléments de</u> D <u>soient d'ordre fini</u>.

La démonstration de ce théorème est immédiate.

Les conditions $\mathcal{M}_s$ d'une part, $\mathcal{M}_\ell$, $\mathcal{M}_r$ et $\mathcal{M}_f$ d'autre part, sont indépendantes. Par exemple, un groupe avec des éléments d'ordre infini vérifie $\mathcal{M}_r$ $\mathcal{M}_\ell$ et $\mathcal{M}_f$ mais non $\mathcal{M}_s$. Inversement, il est facile de trouver un treillis T , qui considéré comme un demi-groupe par rapport à l'une ou l'autre de ses opérations, ne satisfait ni à $\mathcal{M}_r$, ni à $\mathcal{M}_\ell$, ni à $\mathcal{M}_f$ (toutes équivalentes puisque T est commutatif). Cependant $\mathcal{M}_s$ est vérifiée, puisque tout élément est idempotent. (voir par exemple le diagramme ci-contre : ) .

Nous nous intéressons maintenant aux $\overline{f}$-classes de D et nous introduirons à cette occasion plusieurs notions dues à GREEN dont l'importance apparaîtra par la suite, en particulier dans les résultats obtenus par MUNN (facteurs principaux, régularité, semi-simplicité).

5. Etude des $\overline{f}$-classes. Facteurs principaux d'un demi-groupe.

Rappelons d'abord

1° qu'un demi-groupe est dit simple, s'il ne contient pas d'idéal autre que lui-même et éventuellement (0) et s'il n'est pas le demi-groupe zéro d'ordre 2 [17].

2° Qu'un idéal I d'un demi-groupe est dit minimal s'il ne contient pas d'idéal du demi-groupe, autre que lui-même et éventuellement (0) [4][5].

Un idéal minimal I d'un demi-groupe D n'est pas nécessairement un sous-demi-groupe simple. (Il peut contenir un idéal de lui-même qui ne soit pas un idéal de D).

On sait, d'après REES [17] qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe S soit simple est que $SxS = S \quad \forall\ x \neq 0 \ , \quad x \in S$.

Cette condition montre que tout idéal minimal d'un demi-groupe sans zéro est simple. Si D possède un zéro, on montre facilement, en utilisant cette même condition, qu'un idéal minimal I de D est, soit un demi-groupe simple, soit un demi-groupe de carré : $I^2 = \{0\}$.

Dans un demi-groupe quelconque D , chaque $\overline{f}$-classe F est formée des générateurs d'un certain idéal principal I ; I est d'ailleurs la réunion de toutes les $\overline{f}$-classes $F' \leq F$. Soit $K = I - F$ (ensemble des éléments de I n'appartenant pas à F , c'est-à-dire des non-générateurs de I) ; on montre facilement que si K n'est pas vide, c'est un idéal de D .

Soit D/K le demi-groupe quotient (ou demi-groupe différence) au sens de REES [17] ; les éléments de D/K sont ceux de D - K , avec un élément 0 . Le produit dans D/K de x , $y \in D - K$ est 0 si le produit dans D est contenu dans K , et est égal à ce produit dans D s'il est contenu dans D - K ; de plus $0.x = x.0 = 0 \quad \forall \ x \in D/K$.

DÉFINITION 5.1. - Le demi-groupe quotient I/K est appelé facteur principal de D correspondant à la $\overline{f}$-classe F.

C'est un idéal minimal de D/K, donc, d'après la remarque précédente, ou bien un sous-demi-groupe simple de D/K, ou bien un sous-demi-groupe de carré nul.

REMARQUE. - Si K est vide, I est un idéal minimal de D ; nous conviendrons alors de poser $I/K = I$ et d'inclure I parmi les facteurs principaux de D. Si D est sans zéro, I est alors l'idéal minimum de D (ou noyau) [4][20]. Ce "noyau" est une $\overline{f}$-classe simple de D.

DÉFINITION 5.2. - Une $\overline{f}$-classe est dite simple si et seulement si le facteur principal I/K correspondant est un sous-demi-groupe simple de D/K.

DÉFINITION 5.3. - Un élément $a \in D$ est dit simple si et seulement si F_a est simple.

En tenant compte des remarques précédentes sur la simplicité d'un idéal minimal d'un demi-groupe avec zéro, on voit que :

si F n'est pas simple, on a $F^2 \subseteq K$ (d'après $(I/K)^2 = \{0\}$).

si F est simple, pour tout couple $a, b \in F$ il existe $x, y \in F$ tels que $xay = b$ (d'après la condition de simplicité $SxS = S$). Nous avons d'ailleurs;

THÉORÈME 5.1. - Une condition nécessaire et suffisante pour que $a \in D$ soit simple est qu'il existe $x, y \in F_a$ tels que $xay = a$.

Que la condition soit nécessaire est immédiat. Réciproquement, si on a $xay = a$ avec $x, y, a \in F_a$, on montre aisément que F_a^2 n'est certainement pas contenu dans K, ensemble des non-générateurs de I.

Cette notion de facteur principal pourrait être introduite, avec moins de généralité, de la manière suivante :

6. Suites principales et facteurs principaux.

Une suite normale pour un demi-groupe D est une suite descendante finie de sous-demi-groupes :

$$(\Sigma) \qquad S_1 = D \supseteq S_2 \supsetneq S_3 \ldots S_i \supsetneq S_{i+1} \ldots S_n \supsetneq S_{n+1} = \emptyset$$

telle que S_{i+1} est un idéal de S_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Une suite

(Σ') est dite plus fine que (Σ), si (Σ) est une suite extraite de (Σ').

Si l'on considère une suite normale sans répétitions :

$$(\Sigma) \qquad S_1 = D \supset S_2 \supset S_3 \ldots S_i \supset S_{i+1} \ldots S_n \supset S_{n+1} = \emptyset$$

les demi-groupes quotient (au sens de REES) S_i/S_{i+1} sont appelés facteurs de la suite (avec $S_n/S_{n+1} = S_n$).

S'il n'existe pas de suite plus fine que (Σ), (Σ) est appelée suite de composition de D. Les facteurs de (Σ) sont alors les facteurs de composition de D.

REES a montré [17] que deux suites de composition sont isomorphes, c'est-à-dire que les facteurs des deux suites peuvent être mis en correspondance biunivoque de manière que les facteurs correspondants soient isomorphes.

Un facteur de composition est, soit simple, soit un demi-groupe 0 d'ordre 2.

Si, dans une suite (Σ), chaque S_i est un idéal de D, et s'il n'y a pas de suite plus fine que (Σ) ayant cette propriété, (Σ) est dite suite principale de D.

On démontre alors facilement que les demi-groupes quotient S_i/S_{i+1} sont tous des facteurs principaux de D au sens des $\overline{f}$-classes. Puisque, pour toute suite, D est la réunion des ensembles $S_i - S_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, nous voyons que les $\overline{f}$-classes de D sont représentées par les facteurs de la suite principale (Σ).

Ainsi est mis en évidence, d'une manière presque triviale, le théorème analogue au théorème sur les suites principales de sous-groupes normaux d'un groupe.

THÉORÈME 6.1. - <u>Dans un demi-groupe</u> D, <u>deux suites principales quelconques sont isomorphes, c'est-à-dire que les facteurs de deux suites peuvent être mis en correspondance biunivoque de manière que les facteurs correspondants soient isomorphes.</u>

Cependant, les facteurs principaux ont été définis ici d'une manière tout à fait indépendante de l'existence d'une suite principale pour D.

REMARQUE. - Si un demi-groupe a une suite principale, il a un idéal minimal (noyau) qui est le dernier terme non vide de la suite.

Les exemples ci-dessous, donné par MUNN [14], permettent de préciser les relations entre suites de composition et suites principales.

(1)

	z	a	b	c	e
z	z	z	z	z	z
a	z	z	z	b	a
b	z	z	z	a	b
c	z	b	a	e	c
e	z	a	b	c	e

(2)

	z	a	b	c
z	z	z	z	z
a	z	z	z	z
b	z	z	z	a
c	z	z	a	z

Dans l'exemple (1), nous avons la suite principale : $D \supset (z, a, b) \supset (z)$.

$D \supset (z, a, b) \supset (z, a) \supset (z)$ et $D \supset (z, a, b) \supset (z, b) \supset (z)$ sont des suites de composition. Dans l'exemple (2), $D \supset (z, a, b) \supset (z, a) \supset (z)$ est à la fois une suite de composition et une suite principale, tandis que $D \supset (z, a, b) \supset (z, b) \supset (z)$ est une suite de composition mais non une suite principale. Ceci montre qu'une suite de composition n'est pas nécessairement une subdivision de quelque suite principale.

Notons encore que l'existence d'une suite de composition implique celle d'une suite principale, alors que l'inverse n'est pas vrai.

Nous montrerons ici un lemme utile dans la suite de cet exposé.

LEMME 6.1. - <u>Soit une suite de composition d'un demi-groupe</u>

$$D = S_1 \supset S_2 \dots S_i \supset S_{i+1} \dots S_{n+1} = \emptyset$$

<u>Si</u> S_{i+1} <u>est idempotent, c'est un idéal de</u> D.

Le théorème est vrai pour $i = 1, 2$; supposons $i > 2$. Supposons qu'on ait prouvé que S_i est un idéal de S_{i-j} pour un $j \leqslant i - 2$. Alors $S_{i-j} S_i S_{i-j} \subseteq S_i$. Mais $S_{i-j} S_i S_{i-j} \supseteq S_i^3 = S_i$ si bien que $S_i = S_{i-j} S_i S_{i-j}$, qui est un idéal de S_{i-j-1}. Comme S_i est un idéal de S_{i-1}, le résultat est acquis par induction sur j.

En particulier, puisque S_n^2 est un idéal de S_n, nous avons $S_n^2 = S_n$, donc S_n est un idéal de D ; c'est donc l'idéal minimum ou "noyau" de D.

7. <u>Condition de régularité dans les demi-groupes.</u>

Analogue à la condition de simplicité, mais plus forte, est la condition de régularité introduite par J. Von NEUMANN pour les anneaux [16].

DÉFINITION 7.1. - *L'élément* $a \in D$ *est régulier si et seulement si il existe* $z \in D$ *vérifiant* $aza = a$.

DÉFINITION 7.2. - *Un demi-groupe* D *est régulier si tous ses éléments le sont.*

Si $F_a = F$, nous voyons comme plus haut que F^2 n'est pas contenu dans K. Par conséquent, la régularité implique la simplicité. Nous énoncerons également :

THÉORÈME 7.1. - *L'élément* $a \in D$ *est régulier si et seulement si, ou bien* R_a, *ou bien* L_a *contient un idempotent (si l'un de ces ensembles contient un idempotent, il en est de même pour l'autre).*

Si a est régulier, $(az)(az) = az$ est idempotent, et puisque $(az)a = a$, il appartient à R_a. De même, za est un idempotent contenu dans L_a.

Inversement, soit $e \in R_a$ un idempotent de D. Si $e = a$, $aaa = a$ et a est régulier. Sinon, il existe u, $z \in D$ vérifiant $eu = a$, $az = e$. La première équation montre que $ea = e(eu) = eu = a$ et d'après la seconde $aza = a$.

Nous retrouverons plus loin d'autres propriétés liées à la notion de régularité ; auparavant, nous démontrerons les théorèmes de Green qui précisent les structures des classes d'équivalences moyennant certaines conditions supplémentaires.

8. Théorèmes généraux de Green.

THÉORÈME 8.1. - *Si dans un demi-groupe quelconque* D, *un élément* x *est contenu dans la même classe* K *de l'équivalence* $\overline{\ell} \cap \overline{r}$ *que son carré* x^2 :

a. K *contient un élément idempotent* e.

b. K *est un groupe.*

De $x^2 \equiv x(\overline{\ell})$ et $x^2 \equiv x(\overline{r})$, on déduit qu'il existe u, $v \in D$ tels que $ux^2 = x$; $x^2 v = x$. Posons $e = ux = ux^2 v = xv$. On a : $e^2 = ux.xv = e$. De plus, $ux = e$ et $ex = ux.x = x$ entraînent $e \equiv x(\overline{\ell})$; $xv = e$ et $xe = x.xv = x$ entraînent $e \equiv x(\overline{r})$ donc $e \in K$. Pour montrer que K est un groupe, considérons un élément quelconque $y \in D$.

De $y \equiv e(\overline{\ell})$ et $y \equiv e(\overline{r})$ on déduit l'existence dans D des éléments y_1 et y_2 tels que $y_1 e = y = ey_2$. D'où $ey = ye = y$; e est élément-unité dans K.

Soient $x , y \in K$; $y \equiv e(\overline{r})$ implique $xy \equiv xe = x \equiv e(\overline{r})$ et $x \equiv e(\overline{\ell})$ implique $xy \equiv ey = y \equiv e(\overline{\ell})$, d'où $xy \in K$. K est donc un sous-demi-groupe de D admettant e comme élément-unité.

Montrons que tout élément $x \in K$ admet un inverse relatif à e ; si $x \in K$, de $x \equiv e(\overline{\ell})$ on déduit qu'il existe $u \in D$ tel que $ux = e$ d'où $eue.x = e$; de même, il existe $v \in D$ tel que $xv = e$; de $x.eue.x.v = xev$ on déduit $x.eue = e$.

Ces équations montrent que $eue \in K$ et est un élément inverse de x dans K, qui est par conséquent un groupe.

COROLLAIRE 8.1. - <u>Si</u> K <u>est un sous-demi-groupe de</u> D, K <u>est un groupe</u>.

Soit $x , y \in K$; on a $xy \in K$. De $xv = y$, on déduit alors $xy = x^2 v \in K$ et $x^2 v \equiv x(\overline{r})$. D'où $x^2 vv' = x$ pour un $v' \in D$ c'est-à-dire $x^2 \equiv x(\overline{r})$. On démontre de même que $x^2 \equiv x(\overline{\ell})$.

REMARQUE. - La démonstration précédente montre qu'une condition suffisante pour que K soit un groupe est qu'il existe <u>un</u> x et <u>un</u> y de K tels que $xy \in K$.

THÉORÈME 8.2. - <u>Soit</u> D <u>un demi-groupe vérifiant les conditions</u> $\mathfrak{M}_\ell$ <u>et</u> $\mathfrak{M}_r$. <u>On a</u> :

a. $\overline{d} = \overline{f}$

b. <u>si</u> L_1 <u>et</u> L_2 <u>sont deux</u> $\overline{\ell}$<u>-classes appartenant à la même</u> $\overline{d}$<u>-classe</u> (<u>ou</u> $\overline{f}$<u>-classe</u>) <u>de</u> D, <u>et si</u> $L_1 \leq L_2$, <u>on a</u> $L_1 = L_2$. <u>Autrement dit, dans toute</u> $\overline{d}$<u>-classes de</u> D, <u>les</u> $\overline{\ell}$<u>-classes sont minimales</u>.

c. <u>Tout élément simple de</u> D <u>est régulier</u>.

On suppose que D possède un élément-unité.

a. Soit $a \equiv b(\overline{f})$ et $x , y , z , u \in D$ tels que $xay = b$, $zbu = a$.

Soit $\mathcal{L}'$ l'ensemble des $\overline{\ell}$-classes qui contiennent tout élément $x \in D$ vérifiant $xay = b$ pour un $y \in D$. $\mathcal{L}'$ n'est pas vide, donc possède un élément minimal L_{x_o} ; on a $x_o ay_o = b$ pour un couple $x_o , y_o \in D$.

On a encore : $x_o zx_o.a.y_o uy_o = b$, donc $L_{x_o zx_o} \in \mathcal{L}'$ d'où $x_o zx_o \equiv x_o(\overline{\ell})$.

Il existe donc $t \in D$ tel que $tx_o zx_o = x_o$, c'est-à-dire $zx_o \equiv x_o(\overline{\ell})$. En multipliant à droite par ay_o, nous obtenons $zb \equiv b(\overline{\ell})$. En utilisant de manière analogue la condition $\mathfrak{M}_r$, nous obtiemdrions l'équivalence $bu \equiv b(\overline{r})$. En multipliant à gauche par z , on en déduit : $a \equiv zb(\overline{r})$. Finalement, $a \equiv zb(\overline{r})$ $zb \equiv b(\overline{\ell})$ et par conséquent $a \equiv b(\overline{d})$.

b. Soit $a \in L_1$, $b \in L_2$. Puisque $L_1 \leq L_2$, nous avons $zb = zb.1 = a$ pour un $z \in D$ (et $1 \in D$) , et puisque $a \equiv b(\overline{f})$ $xay = b$ pour un couple $x , y \in D$.

De la démonstration de (a), on déduit que $zb \equiv b(\overline{\ell})$ c'est-à-dire $a \equiv b(\overline{\ell})$ d'où $L_1 = L_2$.

Cette démonstration utilise seulement $\mathfrak{M}_\ell$. Un résultat analogue peut être démontré (en utilisant $\mathfrak{M}_r$) pour les $\overline{r}$-classes qui sont contenues dans une même $\overline{f}$-classe de D .

c. Supposons que $a \in D$ soit simple. Posons $F_a = F$. D'après le théorème 5.1, il existe $x , y \in F$ tels que $xay = a$. D'où $x^2 ay^2 = a$; on a $F_{x^2} \leq F$ et de $x^2(ay^2) = a$ on déduit $F_{x^2} \geq F_a = F$ et finalement $F_x = F_{x^2}$ c'est-à-dire $x \equiv x^2(\overline{f})$. De $L_{x^2} \leq L_x$ et de $R_{x^2} \leq R_x$ résulte alors d'après (b) $x^2 \equiv x(\overline{\ell})$, $x^2 \equiv x(\overline{r})$.

Du théorème 8.1, on déduit l'existence d'un idempotent $e \in D$ vérifiant $e \equiv x(\overline{\ell} \cap \overline{r})$. En appliquant la forme à droite de (b), la relation $R_a = R_{xay} \leq R_x$ entraîne alors $x \equiv a(\overline{r})$. D'où $e \equiv a(\overline{r})$ et a est régulier d'après le théorème 7.1.

Remarquons, comme nous l'avons fait dans la démonstration de ce dernier théorème, que $ea = a$. De même, il existe un idempotent f tel que $a \equiv f(\overline{\ell})$ et $af = a$.

Toute cette démonstration repose essentiellement sur le fait que $xay = b$ et $zbu = a$ impliquent $zb \equiv b(\overline{\ell})$ et $bu \equiv b(\overline{r})$.

Ceci est également vrai dans les conditions du théorème 2.1. On peut donc énoncer :

THÉORÈME 8.3. - <u>Si</u> D <u>vérifie</u> $\mathfrak{M}_s$, <u>les résultats du théorème 8.2 sont valables.</u>

Remarquons que dans les demi-groupes satisfaisant à $\mathfrak{M}_s$, il existe une puissance finie de n'importe quel élément qui est idempotente.

D'une manière analogue, nous allons démontrer que :

THÉORÈME 8.4. – <u>Si D vérifie $\mathfrak{M}_f$, pour tout $u \in D$, il existe une puissance finie u^k de u qui est simple.</u> (L'exposant k dépendant en général de u).

La suite des idéaux principaux $(u)_F \supseteq (u^2)_F \supseteq (u^3)_F \ldots$ se termine par exemple à $(u^k)_F$. Alors $(u^{3k})_F = (u^k)_F$ et il existe $x, y \in D$ tels que $x.u^{3k}.y = u^k$. Il est clair que $x_1 = xu^k$ et $y_1 = u^k y$ sont chacun $\bar{f}$-équivalents à u^k ; de $x_1 u^k y_1 = u^k$ et du théorème 5.1 résulte alors que u^k est simple.

COROLLAIRE 8.2. – <u>Si D vérifie $\mathfrak{M}_r$ et $\mathfrak{M}_\ell$, pour tout $u \in D$, il existe une puissance finie u^k de u qui est régulière.</u>

9. <u>Cas des demi-groupes complètement simples.</u>

Il est possible de déduire des théorèmes 3.1 et 8.2 la structure des demi-groupes complètement simples [17][18].

Un demi-groupe <u>simple</u> D est complètement simple si : (i) D contient au moins un idempotent primitif, c'est-à-dire un élément $e \in D$, $e^2 = e$, $e \neq 0$ tel que si $f \in D$ vérifie $f^2 = f$, $f \neq 0$ et $ef = fe = f$, on ait $e = f$.

On déduit des résultats de CLIFFORD [5] qu'un demi-groupe simple avec 0 est complètement simple si et seulement s'il vérifie $\mathfrak{M}_r$ et $\mathfrak{M}_\ell$.

On prend alors l'ensemble D^* des éléments non nuls d'un demi-groupe complètement simple D ; c'est une $\bar{f}$-classe, et par conséquent (théorème 8.2) une $\bar{d}$-classe de D.

Du théorème 3.1 et du théorème 8.2 (b) on déduit alors facilement le théorème 2.93 de REES [17] sur la structure d'un demi-groupe complètement simple.

W. D. MUNN a étudié dans les mémoires [14][15] certaines propriétés liées à la notion de semi-simplicité. Nous donnerons maintenant l'essentiel de ses résultats.

10. <u>Demi-groupes semi-simples.</u>

DÉFINITION 10.1. – <u>Un demi-groupe D dont tous les facteurs principaux sont simples est dit semi-simple.</u> (cf. paragraphe 5).

Aucune condition minimale n'est a priori imposée. Remarquons que :

Tout demi-groupe régulier est semi-simple ; l'inverse n'est pas vrai en général, mais les théorèmes 8.3 et 8.4 montrent qu'un demi-groupe semi-simple qui vérifie $\mathfrak{M}_r$ et $\mathfrak{M}_\ell$ ou $\mathfrak{M}_s$ est régulier.

THÉORÈME 10.1. - <u>Si</u> D <u>est un demi-groupe semi-simple vérifiant</u> $\mathfrak{M}_\ell$, D <u>vérifie aussi</u> $\mathfrak{M}_f$.

Soit $\mathfrak{F}'$ un ensemble quelconque (non vide) de $\overline{f}$-classes de D et soit $\mathfrak{L}'$ l'ensemble de toutes les $\overline{\ell}$-classes de D qui sont contenues dans les classes éléments de $\mathfrak{F}'$. Puisque D vérifie $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{L}'$ contient un élément minimal, soit L_a, $a \in D$. Nous allons montrer que F_a est minimal dans $\mathfrak{F}'$.

On suppose que F_a n'est pas minimal : il existe alors un élément $b \in D$ tel que $F_b \in \mathfrak{F}'$ et $F_b < F_a$. De cette dernière relation, on déduit $b \in Da \cup aD \cup DaD$. Puisque D est semi-simple, F_b est simple et $b \in F_b.b.F_b$ (théorème 5.1). Donc : $b \in F_b(Da \cup aD \cup DaD)F_b$ d'où on déduit facilement que $b \in F_b.a.F_b$.

Soient $u, v \in F_b$ vérifiant $b = uav$. Alors $F_{ua} = F_b \in \mathfrak{F}'$ et $L_{ua} \in \mathfrak{L}'$. Mais : $L_{ua} \leq L_a$ et puisque $F_b < F_a$, $L_{ua} < L_a$, ce qui contredit la minimalité de L_a dans $\mathfrak{L}'$. F_a est minimal dans $\mathfrak{F}'$; D satisfait à $\mathfrak{M}_f$.

THÉORÈME 10.2. - <u>Toute suite principale d'un demi-groupe semi-simple est une suite de composition, et réciproquement.</u>

Soit

$$(\Sigma) \qquad D = S_1 \supset S_2 \supset S_3 \ldots, S_i \supset S_{i+1} \ldots S_n \supset S_{n+1} = \emptyset$$

une suite principale d'un demi-groupe semi-simple D. Supposons que T_i soit un idéal de S_i tel que : $S_i \supset T_i \supseteq S_{i+1}$. Puisque S_i/S_{i+1} est simple, on a $T_i = S_{i+1}$. Donc (Σ) est une suite de composition pour D ; en particulier les facteurs de composition de D coïncident avec les facteurs principaux et sont tous simples.

Inversement, soit (Σ) une suite de composition de D. D'après le lemme 6.1, pour prouver que c'est une suite principale, il suffit de prouver que $S_i^2 = S_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Supposons que soit prouvé $S_{i+1}^2 = S_{i+1}$ pour un i. Alors $S_i \supseteq S_i^2 \supseteq S_{i+1}^2 = S_{i+1}$ et puisque S_i^2 est un idéal de S_i, nous avons ou bien $S_i^2 = S_i$ ou bien $S_i^2 = S_{i+1}$. Mais l'existence d'une suite de composition entraîne l'existence d'une suite principale, qui est, d'après la condition nécessaire, aussi une suite de composition.

Du théorème d'isomorphisme des suites de composition résulte donc que le facteur S_i/S_{i+1} est simple, ce qui exclut l'égalité $S_i^2 = S_{i+1}$ (S_i/S_{i+1} serait de carré nul). Donc $S_i^2 = S_i$ et puisque $S_n^2 = S_n$, le résultat peut être obtenu par induction sur i. La seconde partie de la démonstration montre que nous pourrions également définir un demi-groupe semi-simple comme un demi-groupe possédant une suite de composition dont tous les facteurs sont simples. Mais cette définition est évidemment moins générale que celle de Green.

Dans le mémoire [15], MUNN introduit une généralisation de la notion de demi-groupe complètement simple.

11. Demi-groupes complètement semi-simples.

Soient D un demi-groupe et T un sous-ensemble de D. Un idempotent $e \in T$ est dit primitif dans T si c'est le seul idempotent de T vérifiant les équations $ex = xe = x$ $(x^2 = x)$.

Nous dirons qu'une $\overline{f}$-classe F de D est complètement simple si elle contient un idempotent primitif dans F. Ceci est vrai si et seulement si le facteur principal correspondant est un demi-groupe complètement simple au sens de REES [17][18], car ce facteur est, ou bien simple, ou bien de carré nul.

DÉFINITION 11.1. - <u>Un demi-groupe complètement semi-simple est un demi-groupe dans lequel toute $\overline{f}$-classe est complètement simple.</u>

Evidemment, un demi-groupe fini semi-simple est complètement semi-simple (lemme 2.4 de REES [17]). Plus généralement, un demi-groupe semi-simple satisfaisant à $\mathfrak{M}_s$ (tout élément y est d'ordre fini) est complètement semi-simple ; car chaque facteur principal est un demi-groupe simple dans lequel chaque élément a un ordre fini.

Nous verrons plus loin qu'une autre classe importante de demi-groupes complètement semi-simples est celle des demi-groupes qui sont réunions de groupes [2][9]. Un demi-groupe complètement semi-simple est régulier (cf. paragraphe 7). Rappelons également qu'un demi-groupe régulier est semi-simple. Il est facile de trouver des exemples montrant que les implications réciproques sont fausses (exemple n° 1 du paragraphe 6 pour la première ; demi-groupe de Baer et Lévi pour la deuxième).

Nous démontrons ici deux lemmes :

LEMME 11.1. - <u>Soit</u> D <u>un demi-groupe et</u> M <u>un idéal de</u> D. <u>Les</u> $\overline{\ell}$ ($\overline{r}$ <u>ou</u> $\overline{f}$) <u>classes de</u> D <u>contenues dans l'ensemble</u> $D - M$ <u>sont les</u> $\overline{\ell}$ ($\overline{r}$ <u>ou</u> $\overline{f}$) <u>classes non nulles de</u> D/M.

Soient a et b deux éléments distincts de $D - M$. Les critères pour leur $\bar{\ell}$-équivalence comme éléments de D et comme éléments de D/M sont les mêmes, à savoir qu'il existe des éléments $x , y \in D - M$ tels que $a = xb$; $b = ya$. Même démonstration pour $\bar{r}$ et $\bar{f}$.

Ce résultat montre en particulier que si D vérifie $\mathfrak{M}_\ell$, $\mathfrak{M}_r$ ou $\mathfrak{M}_f$, il en est de même de D/M.

Nous utiliserons maintenant les conditions minimales $\mathfrak{M}_\ell^*$ et $\mathfrak{M}_r^*$ définies au paragraphe 4.

LEMME 11.2. - <u>Soit</u> D <u>un demi-groupe vérifiant</u> $\mathfrak{M}_\ell^*$ <u>et</u> F <u>une</u> $\bar{f}$-<u>classe quelconque de</u> D. <u>Toute</u> $\bar{\ell}$-<u>classe de</u> D <u>contenue dans</u> F <u>est minimale dans l'ensemble de toutes les</u> $\bar{\ell}$-<u>classes contenues dans</u> F.

Soit I l'idéal engendré par F et $K = I - F$; K est un idéal de D et I/K un idéal minimal de D/K (cf. 5). Puisque D satisfait à $\mathfrak{M}_\ell^*$, il en est de même de D/K d'après le lemme 11.1, donc I/K contient un idéal à gauche minimal de D/K. Donc I/K est somme d'idéaux à gauche minimaux de D/K ([5] théorème 2.1). Autrement dit, tout idéal principal à gauche de D/K engendré par un élément non nul de I/K est minimal dans D/K. Donc toute $\bar{\ell}$-classe de D/K contenue dans F est minimale dans l'ensemble des $\bar{\ell}$-classes contenues dans F ; mais d'après le lemme, ces $\bar{\ell}$-classes sont aussi des $\bar{\ell}$-classes de D, ce qui démontre le théorème.

REMARQUE. - Ce lemme est analogue à la partie (b) du théorème 8.2, mais il est plus général.

Nous obtenons maintenant deux autres critères de complète semi-simplicité, utilisant des conditions minimales. Le premier d'entre eux dépend directement des résultats de CLIFFORD [5].

THÉORÈME 11.1. - <u>Un demi-groupe</u> D <u>est complètement semi-simple si et seulement si il est semi-simple et vérifie les conditions</u> $\mathfrak{M}_\ell^*$ <u>et</u> $\mathfrak{M}_r^*$.

Supposons que D soit complètement semi-simple. Soit F une $\bar{f}$-classe quelconque de D, I l'idéal engendré par F et $K = I - F$; I/K est complètement simple donc contient un idempotent e ; si on pose $M = I/K$, l'ensemble eM est un idéal à droite minimal dans I/K et aussi dans D/K ; de même, l'ensemble Me est un idéal à gauche minimal, dans I/K et dans D/K [5]. Les éléments non nuls de eM, par exemple, forment donc une $\bar{\ell}$-classe de D/K. Ainsi l'ensemble de toutes les $\mathcal{F}$-classes de D/K contenues dans F contient un élément minimal, donc, d'après le lemme 11.1, D vérifie $\mathfrak{M}_\ell^*$. On démontre de la même façon que D vérifie $\mathfrak{M}_r^*$.

Inversement, supposons que D soit semi-simple et satisfasse $\mathfrak{M}_\ell^*$ et $\mathfrak{M}_r^*$. Soient F, I et K définis comme ci-dessus. D/K vérifie $\mathfrak{M}_\ell^*$ et $\mathfrak{M}_r^*$ d'après le lemme 11.1. Donc I/K est un idéal minimal de D/K, simple, et contenant un idéal à gauche minimal et un idéal à droite minimal de D/K ; donc I/K est complètement simple [5]. Donc D est complètement semi-simple.

COROLLAIRE 11.1. - <u>Un demi-groupe semi-simple vérifiant $\mathfrak{M}_\ell$ et $\mathfrak{M}_r$ est complètement semi-simple.</u>

On peut encore remplacer une des conditions minimales par une autre condition.

THÉORÈME 11.2. - <u>Un demi-groupe est complètement semi-simple si et seulement s'il vérifie $\mathfrak{M}_\ell^*$ et a la propriété que toute $\bar{f}$-classe contient un idempotent.</u>

Condition nécessaire : d'après le théorème 11.1, D satisfait à $\mathfrak{M}_\ell^*$ et, d'après la définition, chaque $\bar{f}$-classe contient un idempotent.

Condition suffisante : soit e un idempotent quelconque de D et f un idempotent de F_e ayant la propriété $ef = fe = f$. De $fe = f$, on déduit $L_f \leq L_e$. Comme D vérifie $\mathfrak{M}_\ell^*$ il résulte du lemme 11.2 que L_e est minimale dans l'ensemble de toutes les $\mathcal{L}$-classes contenues dans F_e. Donc $L_f = L_e$. Il existe donc $a \in D$ tel que $e = af$ d'où : $ef = af^2 = af = e$ et $e = f$; e est primitif dans F_e. D est complètement semi-simple. Un cas particulier de ce théorème avait été obtenu par SCHWARZ [20] qui montre qu'un demi-groupe simple sans zéro est complètement simple si et seulement s'il contient un idéal à gauche minimal et un idempotent.

COROLLAIRE 11.2. - <u>Un demi-groupe régulier satisfaisant $\mathfrak{M}_\ell^*$ (ou $\mathfrak{M}_\ell$) est complètement semi-simple.</u>

En effet, chaque $\bar{f}$-classe d'un demi-groupe régulier contient un idempotent (théorème 7.1). CLIFFORD a étudié les demi-groupes qui sont réunions de groupes [2]. Un tel demi-groupe peut être caractérisé comme réunion de groupes disjoints ([2] théorème 1) ou comme demi-groupe complètement semi-simple dans lequel chaque $\bar{f}$-classe est un sous-demi-groupe ([2] théorème 2).

Une autre caractérisation de ces demi-groupes a été obtenue par R. CROISOT [9] comme résultat d'une généralisation du concept de régularité. Un demi-groupe D vérifie les conditions (m, n) où m et n sont des entiers non négatifs tels que $m + n \geqslant 2$, si tout élément $a \in D$ appartient à l'ensemble $a^m D a^n$ (la condition $(n, 0)$ est satisfaite pour D si $a \in a^n D \ \forall a \in D$).

R. CROISOT a montré que, par rapport à l'équivalence logique, l'ensemble de ces conditions est partagé en 4 classes, pour lesquelles on peut choisir comme représentants les conditions $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ et $(2, 1)$; de plus, un demi-groupe est réunion de groupes si et seulement s'il vérifie simultanément les conditions $(2, 0)$ et $(0, 2)$, ou encore la condition unique $(2, 1)$.

Nous montrons ici que ces résultats restent valables si on remplace une des conditions $(2, 0)$ ou $(0, 2)$ par une condition minimale convenable.

THÉORÈME 11.3. - <u>Un demi-groupe est réunion de groupes si et seulement s'il vérifie à la fois les conditions</u> $(2, 0)$ <u>et</u> $\mathfrak{M}_\ell^\star$.

Soit D un demi-groupe réunion de groupes et soit $a \in D$. Il existe e, $a' \in D$ tels que $ae = a$; $aa' = e$. Donc $a = a(aa') \in a^2 D$; D vérifie la condition $(2, 0)$; D est complètement semi-simple donc satisfait $\mathfrak{M}_\ell^\star$ d'après le théorème 11.1.

Inversement, supposons que D vérifie $(2, 0)$ et $\mathfrak{M}_\ell^\star$. Nous prouverons que D est réunion de groupes en montrant que D vérifie aussi $(0, 2)$.

Soit $a \in D$; puisque $a \in a^2 D$, nous avons $F_a \leq F_{a^2}$. Mais $F_{a^2} \leq F_a$ entraîne $F_{a^2} = F_a$. D'où $L_{a^2} \subseteq F_a$. Mais aussi $L_{a^2} \leqslant L_a$ et puisque D vérifie $\mathfrak{M}_\ell^\star$, il résulte du lemme 11.2 que $L_{a^2} = L_a$. Par conséquent, on a, ou bien $a = a^2$, ou bien $a \in Da^2$ et le premier cas se ramène au second, car $a = a^2$ entraîne $a = a.a^2$. Donc D vérifie la condition $(0, 2)$.

COROLLAIRE 11.3. - <u>Un demi-groupe satisfaisant à</u> $(2, 0)$ <u>et</u> $\mathfrak{M}_\ell$ <u>est réunion de groupes.</u>

Le théorème 11.3 n'est pas vrai si on remplace $(2, 0)$ par $(0, 2)$. Ce qu'on peut vérifier en prenant le demi-groupe de Baer et Lévi [1] qui consiste en une seule $\bar{\ell}$-classe et vérifie ainsi à la fois $(0, 2)$ et $\mathfrak{M}_\ell^\star$ mais qui n'est pas réunion de groupes.

Nous terminerons enfin cet ensemble de résultats par un théorème reliant les conditions $\mathfrak{M}_\ell$, $\mathfrak{M}_r$ et $\mathfrak{M}_f$ dans un demi-groupe complètement semi-simple.

THÉORÈME 11.4. — *Si un demi-groupe complètement semi-simple vérifie une des conditions $\mathcal{M}_\ell$, $\mathcal{M}_r$ ou $\mathcal{M}_f$, il vérifie les deux autres.*

Nous avons déjà montré dans le théorème 10.1 que, dans un demi-groupe semi-simple $\mathcal{M}_\ell$ implique $\mathcal{M}_f$. Il suffira donc de prouver que, dans un demi-groupe complètement semi-simple, $\mathcal{M}_f$ implique $\mathcal{M}_\ell$.

Soit D un demi-groupe complètement semi-simple vérifiant $\mathcal{M}_f$. Soit $\mathcal{L}'$ un ensemble (non vide) quelconque de $\overline{\ell}$-classes de D. Soit $\mathcal{F}'$ l'ensemble de toutes les $\overline{f}$-classes qui contiennent les classes éléments de $\mathcal{L}'$. Puisque D vérifie $\mathcal{M}_f$, $\mathcal{F}'$ contient un élément minimal, par exemple F. Soit L un élément de $\mathcal{L}'$ contenu dans F. Nous montrons que L est minimal dans $\mathcal{L}'$. Supposons le contraire ; il existe alors $L' \in \mathcal{L}'$ telle que $L' < L$. D'après le théorème 11.2, D vérifie $\mathcal{M}_\ell^*$, donc L est minimal dans l'ensemble de toutes les $\overline{\ell}$-classes contenues dans F, d'après le lemme 11.2. Donc $L' \not\subseteq F$. Soit F' la $\overline{f}$-classe contenant L' $(F' \in \mathcal{F}')$. Puisque $L' < L$, nous avons $F' < F$ ce qui contredit la minimalité de F dans $\mathcal{F}'$. L doit être minimal dans $\mathcal{L}'$ et D vérifie $\mathcal{M}_\ell$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAER (R.) und LEVI (F.). — Vollständige irreduzibele Systeme von Gruppenaxiomen, S. B. Heidelberg Akad Wiss. Abh., t. 2, 1932, p. 3-12 (Beitr. z. Algebra, 18).

[2] CLIFFORD (A. H.). — Semigroups admitting relative inverses, Annals of Math., Series 2, t. 42, 1941, p. 1037-1049.

[3] CLIFFORD (A. H.). — Matrix representations of completely simple semigroups, Amer. J. Math., t. 64, 1942, p. 327-342.

[4] CLIFFORD (A. H.). — Semigroups containing minimal ideals, Amer. J. Math., t. 70, 1948, p. 521-526.

[5] CLIFFORD (A. H.). — Semigroups without nilpotent ideals, Amer. J. Math., t. 71, 1949, p. 834-844.

[6] CLIFFORD (A. H.). — Extensions of semigroups, Trans. Amer. math. Soc., t. 68, 1950, p. 165-173.

[7] CLIFFORD (A. H.). — A class of d-simple semigroups, Amer. J. Math., t. 75, 1953, p. 547-556.

[8] CLIFFORD (A. H.). — Bands of semigroups, Proc. Amer. math. Soc., t. 5, 1954, p. 499-504.

[9] CROISOT (Robert). — Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 3, t. 70, 1953, p. 361-379.

[10] DUBREIL (Paul). - Algèbre, tome 1 : Equivalences, Opérations, Groupes, Anneaux, Corps, 2e éd. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

[11] DUBREIL (P.) et DUBREIL-JACOTIN (Mme). - Théorie algébrique des relations d'équivalence, J. Math. pures et appl., t. 18, 1939, p. 63-95.

[12] GREEN (J. A.). - On the structure of semigroups, Annals of Math., Series 2, t. 54, 1951, p. 163-172.

[13] MILLER (D. D.) and CLIFFORD (A. H.). - Regular $\mathcal{D}$-classes in semigroups, Trans. Amer. math. Soc., t. 82, 1956, p. 270-280.

[14] MUNN (W. D.). - On semigroup algebras, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 51, 1955, p. 1-15.

[15] MUNN (W. D.). - Semigroups satisfying minimal conditions, Proc. Glasgow math. Assoc., t. 3, 1957, p. 145-152.

[16] von NEUMANN (John). - On regular rings, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 22, 1936, p. 707-713.

[17] REES (D.). - On semigroups, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 36, 1940, p. 387-400.

[18] REES (D.). - Note on semigroups, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 37, 1941, p. 434-435.

[19] SCHWARZ (S.). - Zur Theorie der Halbgruppen, Sborník Prác prírodovedeckej Faculty slovenskej Univerzity v Bratislave, t 6, 1943, p. 1-64.

[20] SCHWARZ (S.). - On the structure of simple semigroups without zero, Czech. math. J., t. 1 (76), 1951, p. 41-53.