Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

Michel Zisman

Le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 12, n° 1 (1958-1959), exp. n° 10, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1958-1959__12_1_A9_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)

Année 1958/59

-:-:-:-

12 janvier 1959

LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH-HIRZEBRUCH

par Michel ZISMAN

1. Caractéristique et genre de Todd.

Soient $c_1 , \dots , c_j , \dots$ des variables. On pose formellement

$$1 + c_1 x + \dots + c_n x^n = \prod_{i=1}^{n} (1 + \gamma_i x)$$

et

$$T_n^p(c_1 , \dots , c_n) = \chi_n \Big[\sum \exp(-(\gamma_{j_1} + \dots + \gamma_{j_p})) \prod_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{1 - \exp(-\gamma_i)} \Big]$$

le $\sum$ étant étendu aux $\binom{n}{p}$ combinaisons $1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n$, et χ_n signifiant que l'on ne considère dans le crochet (qui est une série formelle en les γ_i) que les termes homogènes de degré n (γ_i est considéré comme étant de degré 1).

T_n^p est donc un polynôme de poids n en $c_1 , \dots , c_n$. On pose

$$\begin{cases} T_n = T_n^0 \\ T_n(y \,;\, c_1 , \dots , c_n) = \sum_{p=0}^{n} T_n^p(c_1 , \dots , c_n) y^p \end{cases}$$

On remarque que $T_n(-1 \,;\, c_1 , \dots , c_n) = c_n$.

Soient V_{2n} une variété presque complexe, et $c_1 , \dots , c_n$ ses classes de Chern (i. e. les classes de Chern du fibré vectoriel des vecteurs tangents muni de sa structure de $GL(n , C)$ - fibré) (cf. [5]).

On désignera par $[V_{2n}]$ la classe fondamentale de V_{2n} . Comme $c_i \in H^{2i}(V_{2n} , Z)$, si $j_1 + \dots + j_p = n$, $c_{j_1} \dots c_{j_p} \in H^{2n}(V_{2n} , Z)$. La valeur de cette classe de cohomologie pour la classe caractéristique $[V_{2n}]$ est un nombre entier que l'on désignera par $c_{j_1} \dots c_{j_p}[V_{2n}]$. Comme

$T_n(y\,;\,c_1\,,\,\ldots\,,\,c_n)$ est un polynôme de poids n en $c_1\,,\,\ldots\,,\,c_n$, on peut considérer sa valeur pour $[V_{2n}]$, et on pose :

$$\begin{cases} T_y(V_{2n}) = T_n(y\,;\,c_1\,,\,\ldots\,,\,c_n)[V_{2n}] \\ T^p(V_{2n}) = T^p_n \\ T(V_{2n}) = T^0(V_{2n}) \end{cases}$$

On a, bien entendu,

$$T_y(V_{2n}) = \sum_{p=0}^{n} T^p(V_{2n})y^p \quad \text{et} \quad T(V_{2n}) = T_0(V_{2n}) \quad .$$

DÉFINITION 1. - <u>On appelle</u> T_y - <u>genre de Todd</u> (resp. <u>genre en Todd</u>), <u>de la variété presque complexe</u> V_{2n}, <u>le polynôme</u> $T_y(V_{2n})$ (resp. <u>le nombre</u> $T(V_{2n})$).

THÉORÈME 1 :

a. $T_{-1}(V_{2n}) = c_n[V_{2n}] =$ caractéristique d'Euler-Poincaré de V_{2n}

b. $T_1(V_{2n}) =$ indice de la variété V_{2n} (<u>pour une variété compacte</u>)

La démonstration de (a) est immédiate. Celle de (b) au contraire repose sur la théorie du cobordisme de Thom [3].

Soit maintenant ξ un $GL(q\,,\,c)$-fibré sur V_{2n} dont les classes de Chern sont $d_1\,,\,\ldots\,,\,d_q$; $c_1\,,\,\ldots\,,\,c_n$ désignent de nouveau les classes de Chern de V_{2n} (cf. [5]).

On a :

$$d_i\,,\,c_i \in H^{2i}(V_{2n}\,,\,\mathbb{Z})$$

On pose formellement

$$\sum_{i=0}^{q} d_i\, x^i = \prod_{i=1}^{q}(1 + \delta_i\, x)$$

et

$$t(\xi) = e^{\delta_1} + \ldots + e^{\delta_q} \qquad ; \quad t_y(\xi) = e^{(1+y)\delta_1} + \ldots + e^{(1+y)\delta_q}$$

avec ces notations, on pose

$$\begin{cases} T^p(V_{2n}, \xi) = \chi_n[t(\xi) \sum \exp(-(\gamma_{i_1} + \dots + \gamma_{i_p})) \prod_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{1 - \exp(-\gamma_i)}][V_{2n}] \\ T_y(V_{2n}, \xi) = \sum_{p=0}^{n} T^p(V_{2n}, \xi) y^p \\ T(V_{2n}, \xi) = T_0(V_{2n}, \xi) \end{cases}$$

où χ_n et $\sum$ ont les mêmes significations que dans la définition précédente.

On voit immédiatement que

$$\begin{cases} T_y(V_{2n}, \xi) = \chi_n[t_y(\xi) \sum_{j=0}^{n} T_j(y ; c_1, \dots, c_j)][V_{2n}] \\ T(V_{2n}, \xi) = T^0(V_{2n}, \xi) . \end{cases}$$

DÉFINITION 2. - <u>On appelle</u> T_y<u>-caractéristique de Todd du fibré</u> ξ (resp. <u>caractéristique de Todd</u>) <u>le polynôme</u> $T_y(V_{2n}, \xi)$ (resp. <u>le nombre</u> $T(V_{2n}, \xi)$).

PROPOSITION 1. - $T_{-1}(V_{2n}, \xi) = q \times$ (caractéristique d'Euler Poincaré de V_{2n})

PROPOSITION 2. - $T^p(V_{2n}, \xi) = T(V_{2n}, T^{(p)} \otimes \xi)$ <u>où</u> $T^{(p)}$ <u>désigne le fibré vectoriel</u> <u>p-ième puissance extérieure du dual du fibré des vecteurs tangents muni de sa structure de</u> $GL(n, C)$<u>-fibré</u>.

Pour la démonstration, voir [3], paragraphe 12.

2. <u>Caractéristique virtuelle</u>.

Soient $v_1, \dots, v_r$ des 2-classes de cohomologies de $H^2(V_{2n}, \mathbb{Z})$. On désigne par $R(y ; v_i)$ la série formelle en y

$$\frac{e^{v_i(y+1)} - 1}{e^{v_i(y+1)} + y}$$

DÉFINITION 3. - <u>On appelle</u> T_y<u>-caractéristique virtuelle</u> (resp. <u>caractéristique virtuelle</u>) <u>du</u> $GL(q, C)$<u>-fibré</u> ξ <u>associé à la sous-variété virtuelle</u> $(v_1, \dots, v_r)$ <u>le polynôme</u>

$$T_y((v_1, \dots, v_r), \xi)_V = \chi_n[t_y(\xi) \prod_{i=1}^{r} R(y ; v_i) \sum_{j=0}^{\infty} T_j(y ; c_1, \dots, c_j)][V_{2n}],$$

resp. <u>le nombre</u>

$$T((v_1, \dots, v_r), \xi)_V = T_0((v_1, \dots, v_r), \xi)_V$$

Si ξ est le fibré linéaire trivial, on écrit $T_y((v_1, \dots, v_r))_V$ au lieu de $T_y((v_1, \dots, v_r), \xi)_V$, et on appelle ce polynôme le T_y-genre virtuel associé à la sous-variété virtuelle $(v_1, \dots, v_r)$. Si $y = 0$ on a le genre virtuel etc.

PROPOSITION 3. - $T_y((v_1, \dots, v_r), \xi)_V$ est un polynôme de degré $n - r$ en y ; il est identiquement nul si $r > n$.

(Démonstration immédiate sur les définitions).

THÉORÈME 2. - Soient $v_1, \dots, v_r, u, v \in H^2(V_{2n}, \mathbb{Z})$, V_{2n} étant une variété presque complexe compacte.

a. on a

$$T_y((v_1, \dots, v_r, u+v), \xi)_V = T_y((v_1, \dots, v_r, u), \xi)_V$$
$$+ T_y((v_1, \dots, v_r, v), \xi)_V + (y-1)\, T_y((v_1, \dots, v_r, u, v), \xi)_V$$
$$- y\, T_y((v_1, \dots, v_r, u, v, u+v), \xi)_V$$

b. Soit $V' \subset V$ une sous-variété presque complexe compacte de dimension $2n-2$, $j : V' \to V$ l'injection canonique, v la 2-classe de cohomologie de V définie par V' alors

$$T_y((j^* v_2, \dots, j^* v_r), j^* \xi)_{V'} = T_y((v, v_2, \dots, v_r), \xi)_V$$

en particulier

$$T_y(V', (j^* \xi) = T_y((v), \xi)_V$$

c. $T_y((v_1, \dots, v_n), \xi)_V = q \cdot v_1, \dots, v_n [V_{2n}]$

d. si V est une Δ-variété, et si a_i désigne la classe de Chern du i-ième fibré diagonal,

$$(1+y)^n\, T(V) = \sum_{\ell=0}^{n} y^{\ell} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n} T_y((a_{i_1}, \dots, a_{i_\ell}))_V$$

démonstration : voir [3] paragraphes 12 et 13.

REMARQUE. – Dans l'exposé précédent, on a démontré un théorème analogue pour la χ_y-caractéristique virtuelle d'un $GL(q, C)$-fibré analytique sur une variété algébrique (plongée sans singularité dans un espace projectif). χ_y est un polynôme à coefficients entiers. T_y est un polynôme à coefficients rationnels. Le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch dit que $\chi_y = T_y$ sur une variété algébrique ; il exprime donc, en particulier, des propriétés de divisibilité des classes de Chern des variétés algébriques. Les généralisations du théorème de Riemann-Roch au cas où V n'est plus algébrique ni même analytique complexe (et alors χ_y ne peut plus être défini) se présentent alors comme des théorèmes de divisibilité des coefficients des polynômes T_y ou de polynômes analogues (cf. [1] et [4]).

3. Deux théorèmes sur la χ_y-caractéristique et le χ_y-genre d'une variété algébrique (cf. [7]).

NOTATIONS. – Dans toute la suite, V désigne une variété algébrique de dimension n, $F_1, \dots, F_r, A, B$ des fibrés linéaires analytiques complexes sur V, et W un fibré vectoriel analytique complexe sur V.

THÉORÈME 3. – Soit G une application qui, à toute variété V, toute sous-variété virtuelle $(F_1, \dots, F_r)$ de V, tout fibré W sur V fait correspondre une série formelle à coefficients rationnels notée $G((F_1, \dots, F_r), W)_V$ telle que

(i) $$G((F_1, \dots, F_r, A \otimes B), W)_V = G((F_1, \dots, F_r, A, W)_V$$
$$+ G((F_1, \dots, F_r, B), W)_V + (y-1)\, G((F_1, \dots, F_r, A, B), W)_V$$
$$- y\, G((F_1, \dots, F_r, A, B, A \otimes B), W)_V .$$

(ii) si $F_1 = \{S\}$ où S est un diviseur sans singularité alors

$$G((F_1, \dots, F_r), W)_V = G((F_2)_S, \dots, (F_r)_S), W_S)_S$$

(iii) $G((\ ), W)_V = \chi_y(V, W)$ (où $(\ )$ désigne la sous-variété virtuelle vide)

alors, pour tous $V, F_1, \dots, F_2, W$ on a

$$G((F_1, \dots, F_r), W)_V = \chi_y((F_1, \dots, F_r), W)_V$$

en particulier G est un polynôme à coefficients entiers.

DÉMONSTRATION. - Comme χ_y vérifie les conditions (i), (ii), (iii), $G' = \chi_y - G$ vérifie les conditions (i), (ii), (iii)' où

(iii)' : $$G'(\,(\,)\,,\,W)_V = 0 \;.$$

Par récurrence sur la dimension de V on va montrer que cela entraîne que $G' = 0$ identiquement.

Par récurrence sur la dimension de V on va montrer que cela entraîne que $G' = 0$ identiquement.

D'après le théorème 4 de [7] on peut poser $\{S\} = F_1 \otimes \{T\}$ où S et T sont des diviseurs sans singularités. En appliquant (i), (ii) (où (iii)' si $r = 1$)

$$G'((\{S\}\,,\,F_2\,,\,\ldots\,,\,F_r)\,,\,W)_V = G'(((F_2)_S\,,\,\ldots\,,\,(F_r)_S)\,,\,W_S)_S$$

$$= G'((F_1\,,\,\ldots\,,\,F_r)\,,\,W)_V + G'((F_2)_T\,,\,\ldots\,,\,(F_2)_T\,,\,W_T)_T$$

$$+ (y-1)G'(((F_1)_T\,,\,(F_2)_T\,,\,\ldots\,,\,(F_r)_T)\,,\,W_T)_T$$

$$- y\, G'(((F_1)_S\,,\,(F_2)_S\,,\,\ldots\,,\,(F_r)_S\,,\,(T)_S\,,\,W_S)_S$$

d'après l'hypothèse de récurrence tous les termes autres que $G'((F_1\,,\,\ldots\,,\,F_r)\,,\,W)_V$ sont nuls. L'égalité précédente entraîne que ce terme est nul.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 4. - <u>Soit</u> G <u>une application qui à toute variété</u> V, <u>toute sous-variété virtuelle</u> $(F_1\,,\,\ldots\,,\,F_r)$ <u>de</u> V <u>fait correspondre un nombre rationnel</u> $G(F_1\,,\,\ldots\,,\,F_r)_V$ <u>tel que</u>

(i) $$G(F_1\,,\,\ldots\,,\,F_r\,,\,A\otimes B)_V = G(F_1\,,\,\ldots\,,\,F_r\,,\,A)_V + G(F_1\,,\,\ldots\,,\,F_r\,,\,B)_V + (y-1)G(F_1\,,\,\ldots\,,\,F_r\,,\,A\,,\,B)_V - y\,G(F_1\,,\,\ldots\,,\,F_r\,,\,A\,,\,B\,,\,A\otimes B)_V$$

(ii) $$G(F_1\,,\,\ldots\,,\,F_r)_V = G((F_2)_S\,,\,\ldots\,,\,(F_r)_S)_S \quad \text{si} \quad F_1 = \{S\}$$

(iii) <u>il existe un nombre rationnel</u> y_0 <u>tel que</u>

$$G(\,)_V = \chi_{y_0}(V)$$

alors

$$\chi_{y_0}(F_1\,,\,\ldots\,,\,F_r)_V = G(F_1\,,\,\ldots\,,\,F_r)_V$$

démonstration analogue à la démonstration du théorème 3.

REMARQUE. - χ_y étant un polynôme en y, il est licite de parler de la valeur de ce polynôme pour une valeur particulière y_0 de y.

4. Théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch (R-R-H) pour un fibré linéaire.

Soit V une variété algébrique $F_1, \ldots, F_r$ des fibrés analytiques-complexes linéaires sur V, W un fibré vectoriel de dimension q analytique complexe associé au $GL(q, C)$-fibré ξ, $c(F_i) = f_i$ la classe de Chern du fibré F_i ($f_i \in H^2(V_2, \underset{\sim}{Z})$).

On pose

$$\begin{cases} T_y((F_1, \ldots, F_r), W)_V = T_y((f_1, \ldots, f_r), \xi)_V \\ T_y(V, W) = T_y(V, \xi) \end{cases}$$

Comme on a

$$c(F_1 \otimes F_2) = c(F_1) + c(F_2) \qquad \text{et}$$

$c(F_S) = j^* c(F)$ si $j : S \longrightarrow V$ est l'injection canonique (cf. [5]), on en déduit que les conditions (i) (ii) des théorèmes 3 et 4 sont vérifiées.

Mais comme de plus

$$\begin{cases} T_{-1}(V) = \chi_{-1}(V) = \text{caractéristique d'Euler-Poincaré} \\ T_1(V) = \chi_1(V) = \text{indice} \end{cases}$$

On déduit du théorème 4 le théorème suivant :

THÉORÈME 5. - $\chi_1(F_1, \ldots, F_r)_V = T_1(f_1, \ldots, f_r)_V$

$$\chi_{-1}(F_1, \ldots, F_r)_V = T_{-1}(f_1, \ldots, f_r)_V$$

pour déduire de ce théorème le théorème R-R-H, on considère une Δ-variété V^Δ associée à V (on rappelle que V^Δ est algébrique si V est algébrique), ce qui est intéressant car on a les deux lemmes suivants :

LEMME 1. - Si V est une Δ-variété, alors $\chi(V) = T(V)$.

LEMME 2. - $\chi(V) = \chi(V^\Delta)$ et $T(V) = T(V^\Delta)$.

Donc $\chi(V) = \chi(V^\Delta) = T(V^\Delta) = T(V)$ soit :

THÉORÈME 6. - $\chi(V) = T(V)$.

COROLLAIRE. — $\chi(F_1 , \ldots , F_r)_V = T(F_1 , \ldots , F_r)_V$ en effet d'après le théorème 6, on peut appliquer le théorème 4 à $G = T$ et $y_0 = 0$.

Cas particulier : supposons $r = 1$: $\chi(F)_V = T(F)_V$ mais

$$\chi(F)_V = \chi(V) - \chi(V , F^{-1}) \qquad \text{([7] paragraphe 2)}$$

$$T(F)_V = T(V) - T(V , F^{-1}) \qquad \text{(définition 3)}$$

Par conséquent :

$$\chi(V , F) = T(V , F) .$$

Explicitons le résultat obtenu :

THÉORÈME 7. — (R-R-H) Soient $V(= V_n)$ une variété algébrique, F un fibré linéaire analytique complexe de classe de Chern $f \in H^2(V , Z)$, $\underset{\sim}{F}$ le faisceau des germes de sections holomorphes du fibré F.

a. Les espaces vectoriels $H^i(V , \underset{\sim}{F})$ sont de dimension finie, et sont nuls pour $i > n$.

b. $\chi(V , F) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(V , \underset{\sim}{F})$ est un polynôme en f et en les classes de Chern de V. Si on pose $1 + c_1 x + \ldots + c_n x^n = \prod_{i=1}^{n} (1 + \gamma_i x)$ on a

$$\chi(V , F) = \chi_n[e^f \prod_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{1-e^{-\gamma_i}}][V]$$

DÉMONSTRATIONS DES LEMMES. — Pour la démonstration (longue et assez technique) du lemme 2, voir [3]. Pour le lemme 1 on remarque que

$$(1 + y)^n T(V) = \sum_{\ell=0}^{n} y^\ell \sum T_y(A_{i_1} , \ldots , A_{i_\ell})_V \qquad \text{(Théorème 2 d.)}$$

$$(1 + y)^n \chi(V) = \sum_{\ell=0}^{n} y^\ell \sum \chi_y(A_{i_1} , \ldots , A_{i_\ell})_V \qquad \text{([7] proposition 5)}$$

T_y et χ_y étant des polynômes, on peut donner à y la valeur 1. Le lemme résulte alors du théorème 5.

REMARQUE. — La démonstration précédente utilise donc la théorie du cobordisme. Il n'est malheureusement pas possible de donner à y la valeur -1 (cas où la démonstration du théorème 5 est triviale) puisque le premier membre des égalités écrites s'annule.

5. R-R-H pour un fibré vectoriel de dimension $q \geqslant 1$.

Soient W un fibré vectoriel analytique complexe de dimension q , ξ un $GL(q , C)$-fibré associé à W et E un fibré associé à ξ de fibre $F(q) = GL(q , C)/\Delta(q , C)$. Soit φ la projection $E \to V$. Le fibré $\varphi^* W$, image inverse de W par l'application φ , est donc un $GL(q , C)$-fibré dont le groupe structural peut être réduit à $\Delta(q , C)$ (comme fibré analytique complexe) : la construction de $\varphi^* W$ à partir de W est une généralisation de la construction de V^{Δ} à partir de V . De plus, la base du fibré $\varphi^* W$ c'est-à-dire E , est une variété algébrique comme on l'a vu dans la démonstration du théorème 3 de [7].

Le lemme 2 se généralise alors et donne :

LEMME 3. - a. $T(V , W) = T(E , \varphi^* W)$

b. $\chi(V , W) = \chi(E , \varphi^* W)$

La démonstration de a. est facile (voir [3]). Celle de b. utilise des suites spectrales (voir [2]).

Soient $A_1 , \dots , A_q$ les fibrés diagonaux de $\varphi^* W$. On a

$$\chi(E , \varphi^* W) = \sum_{i=1}^{q} \chi(E , A_i) \qquad \text{([6] proposition 10)}$$

$$T(E , \varphi^* W) = \sum_{i=1}^{q} T(E , A_i) \qquad \text{([3] paragraphe 12-1-6)}$$

Comme E est algébrique et A_i linéaire, on peut appliquer R-R-H. Après utilisation du lemme 3, on trouve

THÉORÈME 8. - $\chi(V , W) = T(V , W)$.

Comme $\chi^p(V , W) = \chi(V , W \otimes T^p)$ par définition

$T^p(V , W) = T(V , W \otimes T^p)$ (proposition 2)

le théorème 8 entraîne l'égalité $\chi^p(V , W) = T^p(V , W)$, soit en multipliant par y^p et sommant sur p : $\chi_y(V , W) = T_y(V , W)$. On peut alors appliquer le théorème 3 à $G = T_y(V , W)$:

THÉORÈME 9. - (R-R-H) Soit V une variété algébrique $F_1 , \dots , F_r$ des fibrés analytiques complexes linéaires, W un fibré analytique complexe à fibre vectorielle on a

$$\chi_y((F_1 , \dots , F_r) , W)_V = T_y((F_1 , \dots , F_r) , W)_V$$

(en particulier χ_y ne dépend que de la structure continue de W).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH (M. F.) and HIRZEBRUCH (F.). - Some non embeddability theorems for differentiable manifold, Colloque international [1959. Lille], Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959 (à paraître).

[2] BOREL (A.) and HIRZEBRUCH (F.). - Characteristic classes and homogeneous spaces, I : Amer. J. et Math., t. 80, 1958, p. 458-538. II, III : à paraître.

[3] HIRZEBRUCH (Friedrich). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. - Berlin, Springer, 1956 (Ergebnisse der Mathematik ..., Neue Folge, 9).

[4] HIRZEBRUCH (Friedrich). - A riemann-Roch theorem for differentiable manifolds, Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, n° 177.

[5] ZISMAN (Michel). - Classes de Chern, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 10, 1956/57, n° 23.

[6] ZISMAN (Michel). - Cohomologie des variétés analytiques complexes, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 11, 1957/58, n° 21.

[7] ZISMAN (Michel). - La χ_y-caractéristique virtuelle d'après F. Hirzebruch, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 12, 1958/59, n° 4.