Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Reinhold Baer

Le théorème de Maschke

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 12, n° 1 (1958-1959), exp. n° 9, p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1958-1959__12_1_A8_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)

Année 1958/59

-:-:-:-

6 janvier 1959

LE THÉORÈME DE MASCHKE

par Reinhold BAER

Si Θ est un groupe d'automorphismes du groupe fini G et K un sous-groupe normal Θ-permis de G, on peut mettre les critériums de l'existence des compléments Θ-permis de K dans G en analogie avec le théorème bien connu de Maschke. Comme tout sous-espace d'un espace vectoriel possède un complément, le problème résolu par le théorème classique de Maschke est celui de savoir, quand parmi des compléments il y a un qui est permis ; mais, dans la situation que nous considérons, il n'existe en général même pas un seul complément, à plus forte raison pas de complément Θ-permis.

Nous indiquons tout d'abord deux critériums relativement spéciaux.

THÉORÈME A. - Si Θ est un groupe d'automorphismes et K un sous-groupe normal Θ-permis du groupe fini G, si de plus l'ordre $o(K)$ de K est (relativement) premier à $[G : K]$ et $o(\Theta)$, si enfin l'un au moins des groupes K et Θ est résoluble, il existe un complément Θ-permis de K dans G.

THÉORÈME B. - Si Θ est un groupe d'automorphismes et K un sous-groupe normal abélien Θ-permis du groupe G, si de plus $o(K)$ et $o(\Theta)$ sont premiers entre eux l'existence d'un complément de K dans G entraîne celle d'un complément Θ-permis.

La démonstration du théorème A repose sur le théorème appelé "Théorème de Schur" relatif à l'existence de compléments et à leur propriété d'être conjugués, tandis que la démonstration du théorème B s'appuie sur la formation de "moyenne" relative à certains homomorphismes croisés de G/K dans K. Il est intéressant de remarquer que le théorème B n'est déjà plus valable, si l'on remplace la commutativité de K par la nilpotence par exemple.

Du théorème B on peut dériver sans grande peine le résultat suivant qui met en évidence l'analogie avec le théorème classique de Maschke.

COROLLAIRE. - <u>Si</u> Θ <u>est un groupe d'automorphismes et</u> K <u>un facteur direct</u> <u>Θ-permis du groupe fini</u> G , <u>si de plus</u> $o(K)$ <u>et</u> $o(\Theta)$ <u>sont premiers entre eux, il existe un facteur direct</u> <u>Θ-permis de</u> G <u>complémentaire de</u> K .

En combinant les théorèmes A et B on peut déduire un critérium plus général. Pour l'exprimer il nous faut recourir à ce qu'on appelle l'ordre central $z(K)$ du groupe K . Si $1 = K_0 < \ldots < K_{i-1} < K_i < \ldots < K_n = K$ est une suite principale de K , l'ordre central $z(K)$ est le produit (indépendant du choix de la suite principale K_i) de tous les $[K_i : K_{i-1}]$ pour lesquels K_i/K_{i-1} est au centre de K/K_{i-1} . Cet ordre central est toujours un multiple de $[K : K']$; et nous pouvons définir l'ordre central réduit $z_o(K)$ par l'équation $z(K) = z_o(K)\,[K : K']$. Alors on a le

THÉORÈME C. - <u>Si</u> Θ <u>est un groupe d'automorphismes et si</u> K <u>est un sous-groupe normal</u> <u>Θ-permis resoluble du groupe fini</u> G , <u>si en outre</u> $o(K)$ <u>et</u> $o(\Theta)$ <u>sont premiers entre eux, si enfin</u> $z_o(K)$ <u>et</u> $[G : K]$ <u>sont eux aussi premiers entre eux l'existence d'un complement de</u> K/K' <u>dans</u> G/K' <u>entraîne l'existence d'un complement</u> <u>Θ-permis de</u> K <u>dans</u> G .

Pour prouver ce théorème on doit recourir essentiellement au normalisateur de ce qu'on appelle la représentation de Hall de K , introduite par Philip HALL. Il convient de remarquer que le théorème B , mais non le théorème A , est un cas particulier du théorème C . La cause en est que, d'après les théorèmes bien connus de Hall, seuls des groupes résolubles possèdent une représentation de Hall. Ainsi pour parvenir à un critérium plus général, il faut remplacer le concept de représentation de Hall par un concept plus général, applicable à tous les groupes finis.

Un exposé plus détaillé de ces questions est en préparation.