

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

JEAN-PIERRE SERRE

Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, n° 2 (1957-1958), exp. n° 23,
p. 1-18

http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_2_A9_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL
 M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
 (ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
 Année 1957/58

5 mai 1958

-:-:-:-

MODULES PROJECTIFS ET ESPACES FIBRÉS À FIBRE VECTORIELLE
 par Jean-Pierre SERRE

1. Rappel.

Tous les anneaux considérés dans cet exposé seront supposés commutatifs (sauf aux nos 10 et 11), noethériens, et pourvus d'un élément unité. Tous les modules sur ces anneaux seront supposés unitaires et noethériens (c'est-à-dire de type fini).

Soit A un anneau et soit P un A -module (A et P vérifiant les conditions ci-dessus). On dit que P est projectif (CARTAN-EILENBERG [2], I-2) s'il est facteur direct d'un A -module libre (que l'on peut choisir de type fini); il revient au même de dire que $\text{Ext}_A^q(M, N) = 0$ pour tout A -module N et tout entier $q \geq 1$.

Dans le cas local, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 1. - Si P est un module sur un anneau local A , d'idéal maximal \mathfrak{m} , les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- i. P est libre.
- ii. P est projectif.
- iii. $\text{Tor}_1^A(P, A/\mathfrak{m}) = 0$.

Il est trivial que i. \Rightarrow ii. et ii. \Rightarrow iii. Pour prouver que iii. \Rightarrow i., on choisit des éléments $p_i \in P$ dont les classes dans $P/\mathfrak{m}P$ forment une base de $P/\mathfrak{m}P$ considéré comme espace vectoriel sur A/\mathfrak{m} ; en utilisant iii. et le "lemme de Nakayama" (voir ci-après), on démontre que les p_i forment une base de P . Pour plus de détails, voir [2], VIII-5. Indiquons seulement l'énoncé du lemme de Nakayama :

LEMME 1. - Si P' est un sous-module de P tel que $P = P' + \mathfrak{m}P$, on a $P = P'$.

Revenons au cas d'un anneau A quelconque ; si \mathfrak{p} est un idéal premier de A on définit comme on sait l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$; de même, si M est un A -module, on définit le module "localisé" $M_{\mathfrak{p}}$, qui est un $A_{\mathfrak{p}}$ -module.

PROPOSITION 2. - Pour qu'un A -module M soit projectif, il faut et il suffit que tous ses modules localisés $M_{\mathfrak{p}}$ le soient.

La nécessité est triviale, puisque $M_{\mathfrak{p}} = M \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$. Inversement, supposons que les $M_{\mathfrak{p}}$ soient projectifs, et soit N un A -module. Grâce aux hypothèses noethériennes faites au début, les Ext "se localisent" : on a

$$(1) \quad \text{Ext}_A^q(M, N)_{\mathfrak{p}} = \text{Ext}_{A_{\mathfrak{p}}}^q(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}) \quad \text{pour tout entier } q \text{ et tout } \mathfrak{p}.$$

Puisque les $M_{\mathfrak{p}}$ sont projectifs, ceci montre que $\text{Ext}_A^q(M, N)_{\mathfrak{p}} = 0$ pour tout \mathfrak{p} (si $q \geq 1$). Or on vérifie tout de suite le lemme suivant :

LEMME 2. - Si un A -module R est tel que $R_{\mathfrak{p}} = 0$ pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A , on a $R = 0$.

En appliquant ce lemme à $R = \text{Ext}_A^q(M, N)$, on en déduit que $\text{Ext}_A^q(M, N) = 0$, et M est bien projectif.

En combinant les propositions 1 et 2, on obtient :

PROPOSITION 3. - Pour qu'un module soit projectif, il faut et il suffit qu'il soit localement libre.

Remarquons que, si \mathfrak{p} et \mathfrak{p}' sont deux idéaux premiers tels que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$, le module $M_{\mathfrak{p}}$ est un module localisé du module $M_{\mathfrak{p}'}$; comme tout idéal premier \mathfrak{p} est contenu dans un idéal maximal, on voit que, dans les propositions 2 et 3, on peut se borner aux idéaux premiers \mathfrak{p} qui sont maximaux.

2. Spectre premier et spectre maximal d'un anneau.

Soit A un anneau, et soit $\Omega_p(A)$, ou simplement Ω_p , l'ensemble des idéaux premiers de A . Si α est un idéal de A , on notera $W(\alpha)$ le sous-ensemble de Ω_p formé des idéaux premiers \mathfrak{p} qui contiennent α . Les $W(\alpha)$ sont les fermés d'une certaine topologie sur Ω_p ; l'espace topologique ainsi obtenu sera appelé le spectre premier de A ; le sous-espace Ω de Ω_p formé des idéaux maximaux sera appelé le spectre maximal, ou simplement le spectre, de A . On vérifie facilement les propriétés suivantes (voir par exemple [8], chap. I) :

a. L'espace Ω_p est noethérien (ses sous-ensembles ouverts vérifient la condition de chaîne ascendante), et il en est de même de tous ses sous-espaces.

b. Un sous-ensemble fermé de Ω_p est irréductible (c'est-à-dire n'est pas réunion de deux sous-ensembles fermés distincts de lui-même) si et seulement s'il est de la forme $W(\mathfrak{p})$, où \mathfrak{p} est un idéal premier.

c. L'anneau A se décompose en produit d'anneaux ayant pour spectres premiers les composantes connexes de Ω_p ; ceci permettra, pour étudier les modules sur A , de se borner au cas où Ω_p est connexe.

Dans tout espace topologique noethérien X on a la notion de hauteur d'un sous-espace fermé Y ; si Y est irréductible, on définit sa hauteur, notée $ht(Y)$, comme la borne supérieure, finie ou infinie, des entiers n tels qu'il existe une chaîne $Y = Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_n$ de sous-ensembles fermés de X irréductibles et distincts. Si Y n'est pas irréductible, on définit $ht(Y)$ comme $\text{Inf.} ht(Y')$, où Y' parcourt les sous-espaces fermés irréductibles de Y . La borne supérieure des $ht(Y)$, pour $Y \subset X$, est la dimension de X .

Si l'on prend $X = \Omega_p$, ces définitions coïncident avec les notions usuelles. Par exemple, la dimension de Ω_p est égale à $\dim(A)$, au sens de Krull. Il n'en est plus de même pour le spectre maximal Ω ; on a évidemment $\dim \Omega \leq \dim(A)$, mais cette inégalité peut être stricte, comme le montre le cas d'un anneau local où Ω est réduit à un seul point.

3. Rang d'un module projectif.

Soit P un A -module projectif. Si \mathfrak{p} est un idéal premier de A , on a vu que $P_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$ -module libre, ce qui permet de parler de son rang; nous le noterons $\text{rg}_{\mathfrak{p}}(P)$. On a évidemment :

$$(2) \quad \text{rg}_{\mathfrak{p}}(P) = [P_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p}P_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}],$$

le membre de droite désignant la dimension de $P_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p}P_{\mathfrak{p}}$ sur le corps $A_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Si \mathfrak{p} est maximal, on a $A_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = A / \mathfrak{p}A$, et de même pour P .

PROPOSITION 4. - Si P est un A -module projectif, l'entier $\text{rg}_{\mathfrak{p}}(P)$ ne dépend que de la composante connexe de \mathfrak{p} dans Ω_p .

Disons que deux idéaux premiers \mathfrak{p} et \mathfrak{p}' sont contigus si $W(\mathfrak{p}) \cap W(\mathfrak{p}') \neq \emptyset$, c'est-à-dire s'il existe un idéal premier \mathfrak{p}'' qui les contient tous les deux. On vérifie alors (cf. [8], loc. cit.) que deux idéaux premiers \mathfrak{p} et \mathfrak{p}' sont dans la même composante connexe si et seulement si il existe une suite

$\mathfrak{P} = \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}'$ d'idéaux premiers tels que \mathfrak{p}_i et \mathfrak{p}_{i-1} soient contigus pour $1 \leq i \leq n$. Pour démontrer la proposition 4, il suffit donc de prouver que $\text{rg}_{\mathfrak{p}}(P) = \text{rg}_{\mathfrak{p}'}(P)$ si $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$, ce qui est évident puisque $P_{\mathfrak{p}}$ est un module localisé de $P_{\mathfrak{p}'}$.

Lorsque $\Omega_{\mathfrak{p}}$ est connexe, on voit que $\text{rg}_{\mathfrak{p}}(P)$ ne dépend pas de \mathfrak{p} . On l'appelle le rang du module projectif P .

Plus particulièrement, supposons A intègre, et soit K son corps de fractions ; pour tout A -module M , on appelle rang de M la dimension du K -espace vectoriel $M \otimes_A K$; lorsque M est projectif, la formule (2) appliquée à l'idéal premier $\mathfrak{p} = 0$ montre que cette définition est en accord avec la précédente. Pour que M soit un module projectif de rang 1, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à un idéal inversible de l'anneau A (cf. [2], VII-3) ; la proposition 3 montre d'ailleurs qu'un idéal non nul de A est inversible si et seulement si il est localement principal. Deux idéaux inversibles α et α' de A sont isomorphes comme modules s'ils appartiennent à la même "classe", c'est-à-dire s'il existe $x \in A$ tel que $x\alpha = \alpha'$. On voit donc que le groupe des classes d'idéaux inversibles de A est isomorphe au groupe des classes de A -modules projectifs de rang 1, la multiplication étant le produit tensoriel.

4. Comparaison avec les espaces fibrés à fibre vectorielle.

Supposons que A soit l'anneau de coordonnées $k[V]$ d'une variété algébrique affine V . Pour fixer les idées, nous supposerons k algébriquement clos et V connexe. D'après le théorème des zéros de Hilbert, les points de V correspondent biunivoquement aux idéaux maximaux de A ; le spectre maximal Ω de A s'identifie à V , munie de la topologie de Zariski.

Soit maintenant E un espace fibré algébrique, de base V , à fibre vectorielle de dimension r . Les sections régulières de E forment un A -module $S(E)$; si E est trivial (i.e. isomorphe à $V \times k^r$), $S(E)$ est un module libre, et réciproquement. En utilisant le fait que E est localement trivial, on voit que $S(E)$ est localement libre, c'est-à-dire projectif (proposition 3). Inversement, tout module projectif P sur A est isomorphe à un module $S(E)$, où E est déterminé de façon unique, à un isomorphisme près (cf. [7], n° 50). On peut donc énoncer :

PROPOSITION 5. - Il y a une correspondance biunivoque entre fibrés à fibre vectorielle de base V et A -modules projectifs.

Les fibres E_x , $x \in V$, d'un fibré E se construisent à partir du module associé P , grâce à la formule :

$$E_x = P/m_x P, \quad m_x \text{ étant l'idéal maximal associé à } x.$$

Le rang du module projectif P est donc égal à la dimension r des fibres de E (que l'on appelle aussi le rang du fibré) ; l'hypothèse que V est connexe garantit que cette dimension reste constante.

La correspondance "modules projectifs \leftrightarrow fibrés" préserve les opérations de somme directe, produit tensoriel, puissance extérieure, puissance symétrique, etc.

Vu la proposition 5, il est naturel d'essayer d'étendre aux modules projectifs (sur un anneau A quelconque) les résultats (et les problèmes) relatifs aux espaces fibrés à fibre vectorielle. Par exemple, on a le théorème suivant :

Tout fibré à fibre vectorielle de base V est somme directe d'un fibré trivial et d'un fibré de rang $\leq \dim V$.

(La démonstration se fait facilement, par voie géométrique, cf. ATIYAH [1], théorème 2, p. 426).

Ce théorème se laisse transposer aux modules projectifs sous la forme suivante :

THÉOREME 1. - Soit A un anneau dont le spectre premier est connexe, et soit Ω son spectre maximal. Tout A -module projectif P est somme directe d'un A -module libre et d'un A -module projectif de rang $\leq \dim \Omega$.

(Pour la définition de $\dim \Omega$, voir n° 2).

La démonstration sera donnée au n° 6.

5. Résultats préliminaires.

Dans ce numéro et dans le suivant, A désigne un anneau (commutatif, noethérien, à élément unité), et P un A -module projectif (de type fini). Si x est un élément du spectre maximal Ω de A , on notera $P(x)$ la "fibre" P/xP ; si $s \in P$ on notera $s(x)$ l'image canonique de s dans $P(x) = P/xP$; des éléments s_1, \dots, s_h de P seront dits linéairement indépendants en x si les $s_i(x)$ sont des éléments linéairement indépendants

de l'espace vectoriel $P(x)$ sur le corps $A(x)$. (Cette terminologie et ces notations sont inspirées du cas géométrique).

LEMME 3. - Si s_1, \dots, s_n sont des éléments de P , l'ensemble F des $x \in \Omega$ tels que s_1, \dots, s_n soient linéairement dépendants en x est fermé dans Ω .

Le module P est facteur direct d'un module libre L et la fibre $P(x)$ est facteur direct dans $L(x)$: l'on est ramené au cas d'un module libre. En prenant le produit extérieur des s_i et l'idéal α de A engendré par les composantes de ce produit, on voit que l'on a $F = W(\alpha)$,

C.Q.F.D.

LEMME 4. - Soient x_1, \dots, x_n des points de Ω , deux à deux distincts, et soient $v_i \in P(x_i)$, $1 \leq i \leq n$. Il existe alors $s \in P$ tel que $s(x_i) = v_i$ pour tout i .

Soit α_i le produit des idéaux maximaux α_j , $j \neq i$; aucun idéal maximal de A ne contient tous les α_i , ce qui signifie que $\sum \alpha_i = A$. On a donc une décomposition $1 = \sum \xi_i$, $\xi_i \in \alpha_i$. Si l'on choisit alors des représentants $s_i \in P$ des v_i , on peut poser

$$s = \sum \xi_i s_i,$$

et l'on a

$$s(x_j) = \sum \xi_i(x_j) s_i(x_j) = \xi_j(x_j) s_j(x_j) = v_j$$

ce qui montre que s répond aux conditions posées (noter que ce lemme vaut sans supposer P projectif).

LEMME 5. - Soit $s \in P$. Pour que l'application $a \rightarrow as$ de A dans P identifie A à un facteur direct de P , il faut et il suffit que $s(x) \neq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

La condition est évidemment nécessaire. Inversement, supposons-la vérifiée, et soit $\varphi : A \rightarrow P$ l'homomorphisme défini par s . Si A' désigne l'image de A dans P (c'est-à-dire le sous-module de P engendré par s), le composé $A(x) \rightarrow A'(x) \rightarrow P(x)$ est injectif, et $A(x) \rightarrow A'(x)$ est évidemment surjectif; donc $A(x) \rightarrow A'(x)$ est bijectif, et en appliquant le lemme 2 au noyau de $A \rightarrow A'$, on voit que $A \rightarrow A'$ est lui-même bijectif. Donc A s'identifie au moyen de φ à un sous-module de P . Pour tout $x \in \Omega$, on a

$P \otimes_A A(x) = P(x)$, d'où la suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1^A(P/A, A(x)) \rightarrow A(x) \rightarrow P(x).$$

Vu l'hypothèse, l'homomorphisme $A(x) \rightarrow P(x)$ est injectif, et on a donc $\text{Tor}_1^A(P/A, A(x)) = 0$. En appliquant les propositions 1 et 3, on en déduit que P/A est projectif, et A est bien facteur direct dans P .

[Variante : On montre que A est localement facteur direct dans P en appliquant la proposition 5.2 du chapitre VIII de [2] ; on en conclut qu'il est globalement facteur direct grâce à la formule (1) du n° 1].

6. Démonstration du théorème 1.

On va établir le résultat suivant (qui est en fait plus fort que le théorème 1) :

THÉORÈME 2. - Soit F un sous-ensemble fermé de Ω , soient x_1, \dots, x_n des points de F , deux à deux distincts, et soient $v_i \in P(x_i)$. Soient s_1, \dots, s_h des éléments de P linéairement indépendants en tout point $x \notin F$. Soit enfin k un entier ≥ 0 tel que $h + k \leq \text{rg}_x(P)$ pour tout $x \in \Omega$. Il existe alors $s \in P$ et un sous-ensemble fermé F' de Ω tels que :

- a. $s(x_i) = v_i$ pour $1 \leq i \leq n$.
- b. s_1, \dots, s_h et s sont linéairement indépendants en tout point $x \notin F \cup F'$.
- c. On a $\text{ht}(F') \geq k$.

(Pour la définition de $\text{ht}(F')$, voir n° 2).

Raisonnons par récurrence sur l'entier k . Lorsque $k = 0$ on peut prendre $F' = \Omega$, la condition c. est satisfaite, et la condition b. l'est quel que soit le choix de s ; il reste à vérifier la condition a. ce qui est possible d'après le lemme 4.

Supposons maintenant $k \geq 1$, et appliquons l'hypothèse de récurrence avec $k - 1$ au lieu de k . On obtient un élément $u \in P$ et un sous-ensemble fermé G de Ω tels que :

- a'. $u(x_i) = v_i$ pour $1 \leq i \leq n$.
- b'. s_1, \dots, s_h et u sont linéairement indépendants en dehors de $F \cup G$.
- c'. $\text{ht}(G) \geq k - 1$.

Soit L l'ensemble des points de Ω où s_1, \dots, s_h et u sont linéairement dépendants ; d'après le lemme 3, L est fermé dans Ω . Si G' désigne la réunion de celles des composantes irréductibles de L qui ne sont pas contenues dans F , on a $G' \subset G$ et $L \subset F \cup G'$, ce qui montre que b' et c' sont vrais lorsque l'on remplace G par G' . Soient alors G'_1, \dots, G'_m celles des composantes irréductibles de G' qui sont de hauteur $k - 1$, et choisissons sur chaque G'_α un point y_α qui ne soit contenu, ni dans F , ni dans les autres G'_α . Ces hypothèses entraînent que les $s_i(y_\alpha)$ soient linéairement indépendants dans $P(y_\alpha)$, et que $u(y_\alpha)$ soit combinaison linéaire des $s_i(y_\alpha)$; de plus, l'hypothèse $h + k \leq \text{rg}_{y_\alpha}(P)$ montre que la dimension de l'espace vectoriel $P(y_\alpha)$ est $> h$; on peut donc choisir un élément $w_\alpha \in P(y_\alpha)$ linéairement indépendant des $s_i(y_\alpha)$.

Appliquons alors l'hypothèse de récurrence au sous-ensemble fermé $F \cup G'$, aux $h + 1$ éléments s_1, \dots, s_h, u , aux points x_i (avec pour valeurs associées 0), aux points y_α (avec pour valeurs associées les w_α), et à l'entier $k - 1$. Toutes les hypothèses du théorème sont vérifiées par ces données (on observera que, d'après le choix des y_α , ceux-ci sont deux à deux distincts, et distincts des x_i). On obtient ainsi un élément $t \in P$ et un sous-ensemble fermé H de Ω tels que :

$$a''. \quad t(x_i) = 0 \quad \text{et} \quad t(y_\alpha) = w_\alpha.$$

$b''. \quad s_1, \dots, s_h, u, t$ sont linéairement indépendants en dehors de $F \cup H$.

$$c''. \quad \text{ht}(H) \geq k - 1.$$

De plus, quitte à diminuer H , on peut supposer que H est contenu dans l'ensemble des points où s_1, \dots, s_h, u, t sont linéairement dépendants. Designons par H_1, \dots, H_r les composantes irréductibles de H qui ne sont pas contenues dans $F \cup G'$ et dont la hauteur est $k - 1$. Si H_β est une de ces composantes, choisissons sur H_β un point z_β qui ne soit contenu, ni dans $F \cup G'$, ni dans les autres composantes de H . En un tel point z_β , les $s_1(z_\beta), \dots, s_h(z_\beta), u(z_\beta)$ sont linéairement indépendants (d'après b') et $t(z_\beta)$ en est une combinaison linéaire ; il existe donc un élément λ_β bien déterminé du corps $A(z_\beta)$ tel que l'on ait :

$$t(z_\beta) \equiv \lambda_\beta u(z_\beta) \pmod{(s_1(z_\beta), \dots, s_h(z_\beta))}.$$

En appliquant le lemme 4 au module A et aux points y_α, z_β on voit qu'il existe $f \in A$ tel que :

a'''. $f(y_\alpha) = 0$ et $f(z_\beta) \neq \lambda_\beta$ (noter que tout corps a au moins deux éléments !).

Nous poserons alors :

$$s = u - f.t .$$

Soit K l'ensemble des points où s_1, \dots, s_h, s sont linéairement dépendants, et soient K_γ celles des composantes irréductibles de K qui ne sont pas contenues dans F ; nous poserons $F' = \cup K_\gamma$. Tout revient à montrer que F' et s vérifient bien les conditions a., b., c. de l'énoncé. C'est trivial pour b. par définition même de F' ; pour a. cela résulte de a'. et a''. Reste à vérifier c., c'est-à-dire que chacun des K_γ a une hauteur $\geq k$. Remarquons d'abord que, d'après b'', on a $K \subset F \cup H$, d'où $K_\gamma \subset H$ pour tout K_γ . Il en résulte déjà, d'après c'', que $ht(K_\gamma) \geq k - 1$. Si l'on avait l'égalité $ht(K_\gamma) = k - 1$, K_γ serait l'une des composantes irréductibles de H . Deux cas seraient possibles :

i. On aurait $K_\gamma \subset G'$, et K_γ coïnciderait avec l'un des G'_α . Mais d'après a''. et a'''. on a $s(y_\alpha) = w_\alpha$, qui est linéairement indépendant des $s_1(y_\alpha)$, ce qui est incompatible avec la définition de K .

ii. K_γ ne serait pas contenu dans G' , donc coïnciderait avec l'un des H_β . Mais, d'après a''', on a :

$$s(z_\beta) \not\equiv 0 \pmod{(s_1(z_\beta), \dots, s_h(z_\beta))},$$

ce qui est encore incompatible avec la définition de K .

On a donc nécessairement $ht(K_\gamma) > k - 1$, ce qui signifie que c. est vérifié, et achève la démonstration du théorème 2.

Revenons maintenant au théorème 1. Nous le démontrerons par récurrence sur le rang r de P (qui est bien défini puisque Ω_P est supposé connexe). Le cas $r = 0$ est trivial. Supposons donc $r \geq 1$, et distinguons deux cas :

1° On a $r \leq \dim \Omega$. On écrit $P = 0 + P$, le module réduit à 0 est libre, et le module P est de rang $\leq \dim \Omega$.

2° On a $r > \dim \Omega$. On applique le théorème 2 en prenant $F = \emptyset$, $h = 0$, $k = r$, et aucun point x . On a bien $h + k \leq \text{rg}_x(P)$ pour tout $x \in \Omega$. On obtient ainsi un élément $s \in P$ et un sous-ensemble fermé F' de Ω tels que :

b. $s(x) \neq 0$ pour tout $x \notin F'$.

c. $ht(F') \geq r$.

Puisque nous avons supposé $r > \dim \Omega$, l'inégalité c. n'est possible que si P' est réduit à \emptyset ; la condition b., jointe au lemme 5, montre alors que P s'identifie à la somme directe de A et d'un module projectif P' . Comme P' est de rang $r - 1$, l'hypothèse de récurrence montre que $P' = L' + P''$, où L' est libre et où P'' est projectif de rang $\leq \dim \Omega$. On a donc $P = A + L' + P''$, d'où le résultat cherché.

REMARQUE. - Les théorèmes 1 et 2 s'appliquent aussi aux espaces fibrés analytiques, à fibre vectorielle, de base une variété de Stein connexe Ω . La dimension de Ω doit être prise au sens complexe; les sous-espaces fermés de Ω sont remplacés par les sous-espaces analytiques (fermés) de Ω ; si F est un tel sous-espace, sa hauteur est définie comme la différence $\dim(\Omega) - \dim(F)$; dans le théorème 2, les points $x_i \in \Omega$ peuvent être en nombre infini, à condition de former un sous-ensemble discret de Ω .

7. Exemple : anneaux semi-locaux.

Supposons que Ω soit fini, c'est-à-dire que A soit un anneau semi-local; on a alors $\dim \Omega = 0$ et le théorème 1 donne le résultat suivant, qui généralise la proposition 1 :

PROPOSITION 6. - Si A est un anneau semi-local à spectre premier connexe tout A -module projectif est libre.

Il va sans dire que ce résultat n'est pas difficile à démontrer directement, en utilisant les lemmes 4 et 5, par exemple.

Si le spectre premier de A n'est pas connexe, l'anneau A se décompose en produit d'anneaux semi-locaux A_i , et tout module projectif est somme directe de modules isomorphes à l'un des A_i .

8. Exemple : anneaux de dimension 1.

PROPOSITION 7. - Soit A un anneau de dimension 1, dont le spectre premier est connexe. Tout A -module projectif $P \neq 0$ est somme directe d'un module libre L et d'un module projectif P_1 de rang 1. La classe de P_1 est déterminée de manière unique par celle de P .

L'existence de la décomposition $P = L + P_1$ résulte du théorème 1 et du fait que $\dim \Omega \leq \dim A$. Si l'on pose $r = \text{rg}(P)$, on a $\text{rg}(L) = r - 1$, et le calcul de l'algèbre extérieure d'une somme directe (BOURBAKI, Algèbre, chapitre III,

paragraphe 5 , exercice 7) montre que $\wedge^r P = (\wedge^{r-1} L) \otimes P_1 = P_1$, d'où l'unicité de P_1 .

COROLLAIRE. - La classe de P est déterminée de manière unique par les deux invariants $r = \text{rg}(P)$ et $P_1 = \wedge^r P$.

Notons additivement le groupe $D(A)$ des classes de A -modules projectifs de rang 1 ; si P et P' ont respectivement pour invariants (r, α) et (r', α') , on voit tout de suite que $P + P'$ a pour invariants $(r + r', \alpha + \alpha')$, que $P \otimes P'$ a pour invariants $(rr', r\alpha' + r'\alpha)$, que $\text{Hom}(P, P')$ a pour invariants $(rr', r\alpha' - r'\alpha)$, etc.

Un cas particulier intéressant est celui où A est un anneau de Dedekind, autrement dit un anneau intègre, intégralement clos, de dimension 1 . Le groupe $D(A)$ coïncide alors avec le groupe des classes d'idéaux non nuls de A (cf. n° 3). D'autre part, un A -module P est projectif si et seulement si il est sans torsion (en effet, les deux propriétés sont locales, et les anneaux locaux $A_{\mathfrak{m}}$ de A sont principaux). On retrouve donc le théorème de Steinitz-Chevalley (cf. [3]) :

PROPOSITION 8. - Tout module non nul sans torsion sur un anneau de Dedekind est somme directe d'un module libre et d'un idéal dont la classe ne dépend que du module.

9. Exemples de dimension ≥ 2 .

Il y en a très peu. Il serait souhaitable de déterminer, pour des anneaux A assez simples, tous les A -modules projectifs indécomposables (c'est-à-dire qui ne sont pas sommes directes de modules de rang inférieur). D'après le théorème 1 , un tel module a un rang au plus égal à $\dim A$; en fait, je ne connais aucun cas où il y ait égalité (sauf, bien sûr, si $\dim A \leq 1$).

Le premier cas à considérer est celui de l'anneau des polynômes $A = k[X_1, \dots, X_n]$, où k est un corps. J'ignore si cet anneau possède des modules projectifs qui ne soient pas libres ; c'est en tout cas exclu pour $n = 1$ (puisque A est principal), et pour $n = 2$ en vertu du résultat suivant, dû à SESHADRI (non publié) :

PROPOSITION 9. - Si C est un anneau principal, tout module projectif sur l'anneau $A = C[X]$ est libre.

Pour $n \geq 3$, on a le résultat plus faible suivant :

PROPOSITION 10. - Pour tout module projectif P sur l'anneau de polynômes $A = k[X_1, \dots, X_n]$, il existe un module libre L tel que $P + L$ soit un module libre.

Introduisons une variable supplémentaire X_0 , et soit $B = k[X_0, \dots, X_n]$. On peut identifier A au quotient de B par l'idéal $1 - X_0$; plus généralement, si M est un B -module, on notera M' le A -module $M/(1 - X_0)M$. On vérifie tout de suite que le foncteur $M \rightarrow M'$ est un foncteur exact de la catégorie $\mathcal{G}(B)$ des B -modules gradués dans la catégorie des A -modules; de plus, tout A -module N est de la forme M' pour un $M \in \mathcal{G}(B)$ convenable (écrire N comme le conoyau d'un homomorphisme $L_1 \xrightarrow{\varphi} L_0$, où les L_i sont libres, et "remonter" les L_i et φ). En appliquant alors le théorème des syzygies de Hilbert (cf. [2], VIII-6) au module M , on voit que N possède une résolution de longueur $n + 1$ par des modules libres :

$$0 \rightarrow L_{n+1} \rightarrow \dots \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow N \rightarrow 0.$$

Appliquons en particulier ceci au module $N = P$. La résolution ci-dessus se décompose alors ainsi :

$$L_i = N_i + N_{i+1} \quad (0 \leq i \leq n+1), \text{ avec } N_0 = P, \quad N_{n+2} = 0.$$

Par décomposition, on en déduit :

$$P + L_1 + L_3 + \dots = L_0 + L_2 + L_4 + \dots,$$

d'où le résultat cherché.

Si l'on voulait utiliser la proposition 10 pour montrer que tout A -module projectif est libre, il faudrait prouver que " $P + A$ est libre" \Rightarrow " P est libre", ce qui peut se mettre sous la forme suivante :

Si x_1, \dots, x_r sont r éléments de A tels que l'idéal qu'ils engendrent soit égal à A , il existe une matrice carrée inversible, d'ordre r , à coefficients dans A , et dont la première ligne est égale à (x_1, \dots, x_r) .

Malheureusement, cet énoncé n'a pas l'air facile à démontrer, en dépit (ou à cause) de sa forme élémentaire.

10. Le groupe des classes de modules projectifs.

La proposition 10 suggère l'introduction d'une relation d'équivalence entre modules projectifs sur l'anneau A (cf. [4]) : deux tels modules P et P' sont dits équivalents s'il existe des modules libres L et L' tels que $P + L$ soit isomorphe à $P' + L'$. Dans cette définition, il est inutile de supposer A commutatif (on pourra prendre, par exemple, l'algèbre d'un groupe fini). Si l'on note $P_0(A)$ l'ensemble des classes de A -modules projectifs, au sens précédent, on définit sur $P_0(A)$ une loi de composition au moyen de la somme directe des modules. Cette loi de composition fait de $P_0(A)$ un groupe abélien : l'associativité, la commutativité, l'existence d'un élément neutre (la classe de 0) sont évidentes ; pour voir que la classe d'un module P a un opposé, on observe que, par définition, il existe P' tel que $P + P'$ soit libre, et la classe de P' est l'opposée de la classe de P .

Lorsque A est commutatif, et de spectre premier connexe, on définit un homomorphisme $c : P_0(A) \rightarrow D(A)$ en faisant correspondre à tout module projectif de rang r sa puissance extérieure r -ième, qui est un module projectif de rang 1 ; cet homomorphisme est surjectif ; lorsque $\dim A = 1$ il est même bijectif, d'après le corollaire à la proposition 7.

La proposition 10 peut s'énoncer en disant que $P_0(A) = 0$ lorsque $A = k[X_1, \dots, X_n]$.

11. Comparaison avec la théorie de Grothendieck.

Soit A un anneau, commutatif ou non, noethérien à gauche ; soit $C_M(A)$ la catégorie des A -modules à gauche (de type fini) ; nous désignerons par $C_P(A)$ et $C_H(A)$ les sous-catégories de $C_M(A)$ formées respectivement des modules projectifs, et des modules de dimension homologique finie. On a donc :

$$C_P(A) \subset C_H(A) \subset C_M(A) .$$

Si C désigne l'une de ces catégories, on définit, avec GROTHENDIECK [5], le groupe $K(C)$ comme le groupe abélien libre engendré par les éléments de C , modulo l'identification de A à la somme $A' + A''$ si l'on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0 , \quad \text{avec } A, A', A'' \in C .$$

Nous désignerons respectivement par $P(A)$, $H(A)$, $M(A)$ les groupes $K(C_P(A))$, $K(C_H(A))$, $K(C_M(A))$. Les inclusions entre catégories définissent des homomorphismes canoniques : $P(A) \rightarrow H(A) \rightarrow M(A)$. En fait, GROTHENDIECK

a démontré :

PROPOSITION 11. - L'homomorphisme $P(A) \rightarrow H(A)$ est bijectif.

La démonstration est la même que celle du théorème 2 de [5].

Le groupe $P(A)$ est en rapport étroit avec le groupe $P_0(A)$ du numéro précédent : si l'on fait correspondre à tout module projectif P sa classe dans $P_0(A)$, on obtient une application "additive" de $\mathcal{C}_P(A)$ dans $P_0(A)$; vu le caractère universel de $P(A)$, on en déduit un homomorphisme surjectif $P(A) \rightarrow P_0(A)$. Lorsque A est commutatif, et de spectre premier connexe, le rang d'un module projectif est aussi une fonction additive du module, d'où un homomorphisme $P(A) \rightarrow \underline{\underline{Z}}$. En le combinant avec le précédent, on obtient un homomorphisme

$$\theta : P(A) \rightarrow \underline{\underline{Z}} \times P_0(A) ,$$

et l'on montre aisément que θ est bijectif. Le groupe $P_0(A)$ constitue donc la composante non triviale du groupe $P(A)$.

Indiquons, d'après GROTHENDIECK, comment on peut retrouver et généraliser la proposition 10 de ce point de vue. On commence par prouver :

PROPOSITION 12. - Si C est un anneau commutatif de dimension finie (au sens de Krull), l'homomorphisme canonique $C \rightarrow C[X]$ définit une bijection de $M(C)$ sur $M(C[X])$.

La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de C , cf. [5], proposition 8 dans le cas géométrique.

COROLLAIRE. - Si C est de dimension homologique globale finie, on a $P(C) = P(C[X])$.

L'hypothèse entraîne que $\mathcal{C}_H(C) = \mathcal{C}_M(C)$, d'où $P(C) = M(C)$ d'après la proposition 11. Comme $C[X]$ est aussi de dimension homologique globale finie (voir par exemple [8], chapitre IV), on a de même $P(C[X]) = M(C[X])$, et il n'y a plus qu'à appliquer la proposition 12.

Par récurrence, on déduit du corollaire que $P(C) = P(C[X_1, \dots, X_n])$. Si C est réduit à un corps k , on a évidemment $P(k) = \underline{\underline{Z}}$ et $P_0(k) = 0$, d'où $P_0(k[X_1, \dots, X_n]) = 0$, énoncé qui est bien équivalent à la proposition 10.

12. Résultats complémentaires sur les anneaux de dimension 1.

Soit A un anneau sans éléments nilpotents $\neq 0$, et dont tous les anneaux locaux $A_{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{m} \in \Omega$, sont de dimension 1. Soit A_S l'anneau total des fractions de A ; si $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ désignent les idéaux premiers minimaux de A , l'anneau A_S est le composé des corps des fractions K_i des A/\mathfrak{p}_i . Nous désignerons par \bar{A} la clôture intégrale de A dans A_S , et nous supposons que \bar{A} est un A -module de type fini. L'anneau \bar{A} , étant intégralement clos, contient les idempotents correspondant à la décomposition $A_S = \prod K_i$; il se décompose donc en produit $\bar{A} = \prod \bar{A}_i$, chaque \bar{A}_i étant un anneau de Dedekind de corps des fractions K_i .

EXEMPLES. -

i. A est l'anneau de coordonnées $k[V]$ d'une courbe algébrique affine V , et \bar{A} est l'anneau de coordonnées de sa normalisée \bar{V} ; la courbe \bar{V} est réunion de courbes non singulières disjointes \bar{V}_i , correspondant aux \mathfrak{p}_i .

ii. A est un "ordre", au sens de Dedekind, d'un corps de nombres K , c'est-à-dire un sous-anneau de K qui est un \mathbb{Z} -module libre de rang égal à $[K : \mathbb{Q}]$. L'anneau \bar{A} est l'anneau des entiers de K .

iii. $A = \mathbb{Z}[\mathcal{G}]$ est l'algèbre sur \mathbb{Z} d'un groupe abélien fini \mathcal{G} .

Soit $D(A)$ le groupe des classes de A -modules projectifs partout de rang 1; lorsque le spectre premier de A est connexe, on sait que $D(A) = P_0(A)$, cf. n° 8. Le groupe $D(\bar{A})$ est égal au produit des groupes des classes d'idéaux des anneaux de Dedekind \bar{A}_i . Dans l'exemple i., la théorie des jacobiniennes généralisées de Rosenlicht [6] montre que $D(A)$ est extension de $D(\bar{A})$ par un groupe de caractère "local". Nous allons voir que c'est là un fait général.

Soient Ω et $\bar{\Omega}$ les spectres de A et de \bar{A} ; l'inclusion $A \rightarrow \bar{A}$ définit une projection $\bar{\Omega} \rightarrow \Omega$ qui est surjective, puisque \bar{A} est entier sur A . De plus, puisque \bar{A} est un A -module de type fini, ayant même anneau total de fractions que A , le quotient \bar{A}/A est un A -module de longueur finie; il existe donc un idéal \mathfrak{c} de A , tel que $\mathfrak{c}\bar{A} \subset A$, et que $W(\mathfrak{c}) = F$ soit un sous-ensemble fini de Ω . Si $\mathfrak{m} \notin F$, on a $A_{\mathfrak{m}} = \bar{A}_{\mathfrak{m}}$, et l'image réciproque de \mathfrak{m} dans $\bar{\Omega}$ est réduite à un seul élément $\bar{\mathfrak{m}}$ (les anneaux A et \bar{A} coïncident en dehors de F); si $\mathfrak{m} \in F$, $\bar{A}_{\mathfrak{m}}$ est un anneau semi-local d'idéaux maximaux $\bar{\mathfrak{m}}_i$. Nous désignerons par \bar{F} la réunion des $\bar{\mathfrak{m}}_i$, pour $\mathfrak{m} \in F$.

Soit $\mathfrak{m} \notin F$. Puisque $\bar{A}_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}}$, l'anneau $A_{\mathfrak{m}}$ est un anneau de valuation discrète; une combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de

$\Omega - F$ sera appelé un diviseur de A . Si $\mathfrak{m} \in \Omega$, l'anneau local $A_{\mathfrak{m}}$ s'identifie à un sous-anneau du produit des corps K_i correspondant aux idéaux \mathfrak{p}_i contenus dans \mathfrak{m} ; pour tout $f \in A_S = \prod K_i$, nous noterons $f_{\mathfrak{m}}$ la composante de f dans ce produit; si $f_{\mathfrak{m}} \in A_{\mathfrak{m}}^*$, groupe multiplicatif des éléments inversibles de $A_{\mathfrak{m}}$, nous écrirons aussi $f \in A_{\mathfrak{m}}^*$, et nous dirons que f est inversible en \mathfrak{m} . Si $f \in A_S^*$, et si f est inversible en tous les points \mathfrak{m}_i de F , nous définirons le diviseur de f , noté (f) , par la formule usuelle :

$$(f) = \sum_{\mathfrak{m} \notin F} v_{\mathfrak{m}}(f_{\mathfrak{m}}) \cdot \mathfrak{m}, \quad v_{\mathfrak{m}} \text{ étant la valuation attachée à } A_{\mathfrak{m}}.$$

Un tel diviseur est dit équivalent à zéro dans A ; le groupe des classes de diviseurs de A , pour la relation d'équivalence précédente, sera noté $C(A)$.

LEMME 6. - Le groupe $C(A)$ des classes de diviseurs de A est canoniquement isomorphe au groupe $D(A)$ des classes de A -modules projectifs partout de rang 1.

Soit P un A -module projectif partout de rang 1. Il existe $s \in P$ tel que $s(\mathfrak{m}) \neq 0$ pour tout $\mathfrak{m} \in F$ (lemme 4); si $\mathfrak{m} \notin F$, le module $P_{\mathfrak{m}}$ est un module libre de rang 1 sur l'anneau de valuation discrète $A_{\mathfrak{m}}$, et l'on peut parler de la valuation de s ; on définit ainsi le diviseur (s) de s . Changer s revient à remplacer (s) par un diviseur équivalent; on obtient donc un homomorphisme $D(A) \xrightarrow{\varphi} C(A)$. Un module projectif P appartient au noyau de cet homomorphisme s'il possède une section s partout non nulle, donc (lemme 5) s'il est libre. Pour vérifier que φ est surjectif, il suffit d'observer que tout produit $\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m}^{n_{\mathfrak{m}}}$, $\mathfrak{m} \notin F$, est un module projectif partout de rang 1 (utiliser la proposition 3, par exemple), dont l'image par φ est la classe du diviseur $-\sum n_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m}$.

Le résultat précédent s'applique aussi à \bar{A} , en remplaçant F par \bar{F} ; les diviseurs de \bar{A} sont les mêmes que ceux de A , seule la relation d'équivalence change: on considère comme équivalents à zéro les diviseurs de la forme (f) , avec $f \in A_S^*$ et $f \in \bar{A}_{\mathfrak{m}_i}^*$ si $\mathfrak{m}_i \in \bar{F}$. Si l'on note alors $L(\bar{A}/A)$ le groupe des classes dans A des diviseurs qui sont équivalents à zéro dans \bar{A} , on a donc une suite exacte :

$$(*) \quad 0 \rightarrow L(\bar{A}/A) \rightarrow D(A) \rightarrow D(\bar{A}) \rightarrow 0.$$

Il reste à décrire le groupe $L(\bar{A}/A)$, ce qui ne présente pas de difficulté. Indiquons simplement le résultat :

Soit $\mathfrak{C} = \prod \bar{m}_i^{n_i}$ la décomposition de \mathfrak{C} dans \bar{A} , avec $\bar{m}_i \in \bar{F}$; soit R_i le quotient du groupe multiplicatif $\bar{A}_{\bar{m}_i}^*$ par le sous-groupe formé des éléments α tels que $v_{\bar{m}_i}(1 - \alpha) \geq n_i$, et soit R le produit des groupes R_i . Soit U le sous-groupe de R engendré par les éléments inversibles de \bar{A} , et soit V le sous-groupe de R engendré par les éléments de A_S^* qui sont inversibles aux points $\bar{m}_i \in F$. Si $U.V$ désigne le sous-groupe de R engendré par U et V , on a alors un isomorphisme :

$$(**) \quad R/U.V = L(\bar{A}/A) .$$

EXEMPLE. - Soit \mathfrak{G} le groupe cyclique d'ordre p , et soit $A = \mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$. L'anneau \bar{A} est le produit $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[\xi]$, où ξ est une racine primitive p -ième de l'unité. L'idéal (p) de \mathbb{Z} , et l'idéal $(1 - \xi)$ de $\mathbb{Z}[\xi]$ ont même corps des restes \mathbb{F}_p , et A s'identifie au sous-anneau de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[\xi]$ formé des couples (n, α) ayant même image dans \mathbb{F}_p (c'est l'analogie d'un point double à tangentes distinctes dans le cas géométrique). On peut prendre $\mathfrak{C} = (p).(1 - \xi)$; le groupe R est le produit $\mathbb{F}_p^* \times \mathbb{F}_p^*$; le groupe U est le groupe $\{\pm 1\} \times \mathbb{F}_p^*$ (à cause des propriétés des unités du corps cyclotomique), et le groupe V est le sous-groupe diagonal de $\mathbb{F}_p^* \times \mathbb{F}_p^*$. On a donc $U.V = R$, d'où $L(\bar{A}/A) = 0$, et $D(A) = D(\bar{A})$. Le groupe $D(\bar{A})$ est égal à $D(\mathbb{Z}) \times D(\mathbb{Z}[\xi]) = D(\mathbb{Z}[\xi])$, d'où finalement $D(A) = P_0(A) = D(\mathbb{Z}[\xi])$, groupe des classes d'idéaux du corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\xi)$. On retrouve un résultat de Dock Sang Rim [4].

Il devrait être possible de traiter de façon analogue le cas d'un groupe abélien fini \mathfrak{G} quelconque. En tout cas, (*) et (**) montrent que $D(A)$ est un groupe fini, chaque fois que A est un \mathbb{Z} -module libre de type fini, et n'a pas d'éléments nilpotents $\neq 0$, ce qui couvre à la fois les cas ii. et iii. J'ignore si ce résultat s'étend au cas non commutatif (en supposant que le radical de A , au sens de Jacobson, est réduit à 0).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ATIYAH (M.). - Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London math. Soc., t. 7, 1957, p. 414-452.
 - [2] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, University Press, 1956 (Princeton math. Series, 19).
 - [3] CHEVALLEY (Claude). - L'arithmétique dans les algèbres de matrices. - Paris, Hermann, 1936 (Act. scient. et ind., 323).
 - [4] DOCK SANG RIM. - Modules over finite groups. - (à paraître).
 - [5] GROTHENDIECK (Alexandre). - Le théorème de Riemann-Roch (rédigé par Armand BOREL et J.-P. SERRE), Bull. Soc. math. France (à paraître).
 - [6] ROSENBLIHT (Maxwell). - Generalized jacobian varieties, Annals of Math., t. 59, 1954, p. 505-530.
 - [7] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., t. 61, 1955, p. 197-278.
 - [8] SERRE (Jean-Pierre). - Cours au Collège de France 1958 (rédigé par P. GABRIEL) (multigraphié).
-