Paul Jaffard

Dimension des anneaux de polynômes, I

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, nº 2 (1957-1958), exp. nº 22, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_2_A8_0>

Séminaire P. DUBREIL
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1957/58
-:-:-:-

28 avril 1958

DIMENSION DES ANNEAUX DE POLYNÔMES, I.

par Paul JAFFARD

1. Introduction.

Tous les anneaux que nous considérerons seront commutatifs et munis d'un élément unité.

Etant donné un anneau A , rappelons que l'on appelle dimension de A la longueur maximale des chaînes d'idéaux premiers de A , l'anneau A tout entier n'étant pas considéré comme un idéal premier, mais (0) l'étant dans le cas où A est intègre. On notera cette dimension $\dim A$. En particulier les corps (commutatifs) s'identifient aux anneaux d'intégrité de dimension 0 .

Nous noterons par la suite $A^{(n)}$ l'anneau des polynômes à n variables sur A , et nous nous proposerons d'étudier le comportement de $\dim A^{(n)}$ lorsque n est suffisamment grand.

Rappelons brièvement les résultats suivants (dûs pour la plus grande part à KRULL) :

Si A est un anneau noethérien, on a l'égalité :

$$\dim A^{(n)} = \dim A + n$$

En particulier, si K est un corps :

$$\dim K^{(n)} = n$$

De manière générale (que A soit noethérien ou non), on a les inégalités :

(1) $$\dim A + 1 \leqslant \dim A^{(1)} \leqslant 2 \dim A + 1$$

SEIDENBERG a montré d'autre part que $\dim A^{(1)}$ pouvait prendre toutes les valeurs comprises entre $\dim A + 1$ et $2 \dim A + 1$.

Par récurrence sur n , l'inégalité (1) donne :

(2) $$\dim A + n \leqslant \dim A^{(n)} \leqslant 2^n (\dim A + 1) - 1$$

En fait les inégalités (2) peuvent être améliorées :

l'idéal premier $\mathfrak{P}$ de $A^{(n)}$ sera dit <u>reposer</u> sur l'idéal (premier) $\mathfrak{p}$ de A si on a $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$. On a alors le :

THÉORÈME 1 (KRULL). - <u>Si les idéaux d'une chaîne de</u> $A^{(n)}$ <u>reposent tous sur un même idéal premier de</u> A , <u>cette chaîne est nécessairement de longueur inférieure ou égale à</u> n .

Soit

$$\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_s$$

une telle chaîne.

On a
$$\mathfrak{P}_0 \cap A = \mathfrak{P}_1 \cap A = \ldots = \mathfrak{P}_s \cap A = \mathfrak{p}$$

On peut passer au quotient par $\mathfrak{P}_0$ dans $A^{(n)}$, ce qui implique un passage au quotient par $\mathfrak{p}$ dans A , et supposer par suite $\mathfrak{P}_0 = (0)$, $\mathfrak{p} = (0)$.

A est alors un anneau d'intégrité ayant un corps des fractions K . On a

$$\mathfrak{P}_i \cap A = (0) \quad (1 \leq i \leq s) .$$

Or les idéaux de $A^{(n)}$ ayant une intersection vide avec l'ensemble multiplicativement clos A^* , formé par les éléments non nuls de A , sont en correspondance biunivoque (conservant l'inclusion) avec les idéaux de l'anneau $(A^{(n)})_{A^*} = B$ (anneau des fractions de $A^{(n)}$ relativement au sous-ensemble A^*). On voit facilement que B est isomorphe à $K^{(n)}$, donc une chaîne de B ne peut avoir une chaîne strictement supérieure à n , ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRE. - <u>On a l'inégalité</u> :

(3)
$$\dim A^{(n)} \leqslant (n + 1) \dim A + n .$$

En effet, toute chaîne d'idéaux premiers de $A^{(n)}$ est de la forme :

$$(0) = \mathfrak{P}_{0,0} \subset \mathfrak{P}_{0,1} \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_{0,\alpha(0)} \subset \mathfrak{P}_{1,0} \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_{i,0} \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_{i,\alpha(i)}$$
$$\subset \mathfrak{P}_{i+1,0} \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_{k,\alpha(k)}$$

avec $\mathfrak{P}_{i,j} \cap A = \mathfrak{P}_{i',j'} \cap A$ si et seulement si $i = i'$.

En posant $\mathfrak{P}_{i,j} \cap A = \mathfrak{p}_i$, on obtient dans A la chaîne :

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_k$$

On a donc, par définition, $k \leq \dim A$.

D'autre part, le théorème 1 et les égalités :

$$\mathfrak{P}_{i,0} \cap A = \mathfrak{P}_{i,1} \cap A = \ldots = \mathfrak{P}_{i,\alpha(i)} \cap A$$

montrent que $\alpha(i) \leq n$.

La chaîne considérée a pour longueur :

$$s = \alpha(0) + (\alpha(1) + 1) + \ldots + (\alpha(k) + 1)$$

(en tenant compte des chaînons $\mathfrak{P}_{i,\alpha(i)} \subset \mathfrak{P}_{i+1,0}$).

Par suite $s \leq n + k(n + 1) \leq n + (n + 1) \dim A$. C.Q.F.D.

SEIDENBERG a donné une condition nécessaire et suffisante pour que, A étant supposé intègre et de dimension 1 , l'anneau $A^{(1)}$ soit de dimension 2. Cette dernière est que la fermeture intégrale de A soit un <u>anneau de Prüfer</u>, c'est-à-dire tel que l'ensemble des idéaux fractionnaires finis de A forme un groupe multiplicatif. Il a montré d'autre part que lorsqu'il en est ainsi, on a toujours $\dim A^{(n)} = \dim A + n$.

Or KRULL a donné une caractérisation très simple des anneaux de Prüfer : pour qu'un anneau d'intégrité A soit de Prüfer, il faut et il suffit que, quel que soit l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de A , l'anneau de fractions $A_{\mathfrak{p}}$ soit un anneau de valuation.

Dans ce qui suit nous utilisons systématiquement les méthodes valuatives introduites par SEIDENBERG et nous obtenons à partir d'elles le résultat suivant :

<u>Il existe un nombre</u> N <u>tel que pour tout</u> $n \geq N$ <u>on ait l'égalité</u> :

$$\dim A^{(n)} = (\pi + 1)\, n + \sigma$$

π <u>et</u> σ <u>étant deux constantes</u> ≥ 0 .

C'est-à-dire qu'à partir d'un entier N la dimension de l'anneau $A^{(n)}$ des polynômes à n variables sur A est une fonction linéaire de n . Nous donnons une interprétation de π particulièrement simple dans le cas où $\pi = 0$. Dans ce dernier cas, nous interprétons également σ .

Nous aurons besoin par la suite du résultat suivant dû à KRULL :

THÉORÈME 2. - K <u>étant un corps et</u> $\mathfrak{P}$ <u>un idéal premier de l'anneau de polynômes</u> $K^{(n)}$, <u>la longueur maximale</u> h <u>des chaînes d'idéaux premiers de</u> $K^{(n)}$ <u>commençant à</u> (0) <u>et finissant à</u> $\mathfrak{P}$ <u>est donnée par la formule</u> $h = n - t$

où t désigne le degré de transcendance sur K du corps des fractions de $K^{(n)}/\mathfrak{P}$.

Nous admettrons sans démonstration ce théorème (KRULL [1] , Théorème 14)

2. Dimension valuative d'un anneau.

Rappelons d'abord quelques résultats relatifs aux corps valués. Soient v une valuation de Krull d'un corps K , et Γ le groupe de valeurs correspondant. L'ensemble Γ_+ des éléments positifs ou nuls de Γ est partagé en classes d'équivalences dites étages de Γ de la manière suivante :

Deux éléments α et β appartiennent à un même étage si et seulement s'il existe deux entiers m et n tels que $\beta \leq m\alpha$ et $\alpha \leq n\beta$. On appelle rang du groupe totalement ordonné Γ le nombre (fini ou non) des étages de Γ différent de l'étage constitué par l'élément neutre 0 du groupe. En particulier les groupes de rang un ou groupes archimédiens sont caractérisés comme étant les groupes ordonnés isomorphes aux sous-groupes de $\underset{\sim}{R}$ (groupe ordonné additif des nombres réels).

Les étages de Γ sont en correspondances biunivoques avec les idéaux premiers non nuls de l'anneau A de la valuation v : à l'étage $\mathfrak{E}$ est associé l'idéal premier $\mathfrak{p}$ des éléments x de A tels que $v(x) \in \mathfrak{E}$. Cette correspondance permet de donner une interprétation du rang au moyen des spécialisations :

On sait que les valuations d'un corps K sont en correspondance biunivoque (à des isomorphismes près du corps résiduel et du groupe des valeurs) avec les spécialisations de K , c'est-à-dire avec les applications de K dans les ensembles du type $k_\infty = (k \cup \infty)$ où k est un corps (corps projectif). Une telle application φ doit avoir les propriétés suivantes :

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$
$$\varphi(ab) = \varphi(a)\ \varphi(b)$$

avec $1/\infty = 0$, $1/0 = \infty$, $a + \infty = \infty$ (si $a \neq \infty$) . La spécialisation φ sera dite triviale si $\varphi(K) = 0$ (à cette dernière ne correspond pas de valuation de K) ou si φ est l'application identique de K sur lui-même (cas de $\Gamma = (0)$).

Si $\varphi(K) \supset k$, nous dirons par abus de langage que φ spécialise K sur k (quoique l'on puisse avoir $\infty \in \varphi(K)$), et on écrira $\varphi : K \to k$ ou $K \xrightarrow{\varphi} k$. On notera même parfois $\varphi(K)$ au lieu de k sans qu'aucune confusion puisse en résulter.

On définit sans peine une spécialisation produit de plusieurs spécialisations. Une spécialisation φ sera dite de *rang* s si elle est le produit de s spécialisations non triviales et n'est pas le produit de $s+1$ spécialisations non triviales.

Il est alors facile de voir que le rang de la spécialisation φ est égal au rang de la valuation correspondante (fini ou non).

Soit une spécialisation φ produit de deux spécialisations φ_1 et φ_2 :

$$\varphi : \quad K \xrightarrow{\varphi_1} k_1 \xrightarrow{\varphi_2} k_2$$

φ et φ_1 définissent deux valuations v et v_1 de K. De même φ_2 définit une valuation v_2 de k_1. On dit que v est une *valuation composée* de v_2 et v_1. La valuation v est *plus fine* que v_1, c'est-à-dire que l'anneau de la valuation v_1 contient l'anneau de la valuation v. On écrira alors $v_1 \leqslant v$ et $v_1 < v$, si v est strictement plus fine que v_1. Réciproquement si v et w sont deux valuations de K telles que v soit plus fine que w, la valuation v est la composée d'une valuation w' du corps résiduel de la valuation w et de la valuation w. Si v est une valuation de rang s du corps K, il existe exactement s valuations de K strictement moins fines que v (la valuation triviale identiquement nulle étant comprise).

Etant donnés un anneau d'intégrité A et son corps des fractions K, nous dirons qu'une valuation de K est *compatible avec* A si $v(A) \geqslant 0$. Par abréviation, nous appellerons par la suite *valuation de* A toute valuation de K compatible avec A. Si v est une valuation de A, on appelle *centre* de v sur A l'idéal premier de A formé par tous les éléments x de A tels que $v(x) > 0$. On montre que tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A $(\mathfrak{p} \neq A)$ est le centre d'une valuation de A et qu'étant donnée une valuation v de A de centre $\mathfrak{p}$ sur A et un idéal premier $\mathfrak{q}$ de A tel que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, il existe une valuation w de A, plus fine que v, et ayant $\mathfrak{q}$ pour centre sur A.

Etant donné un anneau d'intégrité A, nous considérerons dans ce qui suit les chaînes (sans répétition) de valuations de A :

$$v_0 < v_1 < \dots < v_s$$

(chaque v_i est une valuation de A strictement plus fine que v_{i-1}).

On appellera *dimension valuative* de A et on désignera par $\dim_v A$ la longueur maximale des chaînes de valuations de A (une chaîne maximale de valuations doit nécessairement commencer par la valuation nulle). C'est aussi le rang le plus élevé des valuations de A, c'est-à-dire encore le rang le plus élevé des spécialisations du corps des fractions de A qui restent finies sur A (c'est-à-dire $\infty \notin \mathfrak{p}(A)$).

3. Propriétés de la dimension valuative.

Dans tout ce qui suit, toutes les fois que L' désignera un sous-corps d'un corps L, on désignera par d.t. $[L : L']$ le degré de transcendance de L sur L'.

THÉORÈME 3. - Soit K un surcorps de K' tel que d.t. $[K : K'] = d$. Si v est une valuation de rang n du corps K induisant sur k une valuation w de rang n', on a :

$$n \leqslant n' + d$$

les nombres intervenant étant finis ou non.

Soient Γ le groupe des valeurs de v, et Γ' le groupe des valeurs de w qui est un sous-groupe de Γ. Si $\gamma \geqslant 0$ est un élément de Γ', il définit un étage $\mathfrak{E}(\gamma)$ (resp. $\mathfrak{E}'(\gamma)$) dans Γ (resp. dans Γ') tel que $\mathfrak{E}'(\gamma) = \mathfrak{E}(\gamma) \cap \Gamma'$.

Tout revient donc à montrer que le groupe Γ ne peut pas avoir plus de d étages dont l'intersection avec Γ' est vide.

Soient $x_1, \dots, x_m$ des éléments de K tels que $v(x_1), \dots, v(x_m)$ définissent des étages de Γ, tous différents, et ayant une intersection vide avec Γ'. Supposons d'autre part le numérotage fait de telle manière que

$$v(x_1) < v(x_2) < \dots < v(x_m) .$$

Tout revient à montrer que $m \leqslant d$. Montrons pour cela que les x_i sont algébriquement indépendants sur K'. Supposons qu'il existe une relation algébrique entre les x_i à coefficients dans K' :

$$\sum a_{\alpha_1 \dots \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} = 0 \qquad (a_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \in K')$$

On en déduit une égalité de la forme :

$$v(a_{\alpha_1 \dots \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}) = v(a_{\beta_1 \dots \beta_m} x_1^{\beta_1} \dots x_m^{\beta_m})$$

avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq (\beta_1, \dots, \beta_m)$

Ceci entraîne :

$$v(a_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}) - v(a_{\beta_1 \ldots \beta_m}) + (\alpha_1 - \beta_1)\, v(x_1) + \ldots + (\alpha_m - \beta_m)\, v(x_m) = 0 \, .$$

Soit p le plus grand des nombres i tels que $\alpha_i - \beta_i \neq 0$. On peut toujours supposer $\alpha_p > \beta_p$.

Alors $(\alpha_1 - \beta_1)\, v(x_1) + \ldots + (\alpha_m - \beta_m)\, v(x_m)$ est un élément > 0 dont l'étage est celui de $v(x_p)$, donc $v(a_{\beta_1 \ldots \beta_m}) - v(a_{\alpha_1 \ldots \alpha_m})$ est un élément > 0 de Γ' dont l'étage dans Γ est celui de $v(x_p)$ d'où une contradiction qui entraîne le théorème.

On en déduit immédiatement le :

COROLLAIRE 1 (KRULL). - Si K est un surcorps de K' tel que d.t. $[K : K'] = d$, toute valuation de K triviale sur K' a un rang $\leq d$.

COROLLAIRE 2. - Soit A un anneau d'intégrité ayant un corps de fractions K. Si k est un sous-corps de A, la dimension valuative de A est inférieure ou égale au degré de transcendance de K sur k.

COROLLAIRE 3. - Soit A un anneau d'intégrité ayant un corps de fractions K. Si d est le degré de transcendance de K, la dimension valuative de A est inférieure ou égale à d si A est de caractéristique non nulle et inférieure ou égale à $d + 1$ si K est de caractéristique nulle.

Soit k_0 le sous-corps premier de K. On applique le théorème 3 à k_0 et K. On remarque que si la caractéristique n'est pas nulle, k_0 est un sous-corps fini, donc n'admet que des valuations triviales ($m = 0$) et si la caractéristique est 0, k_0 est isomorphe au corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels qui n'admet que des valuations de rang 0 ou 1 ($m \leq 1$).

Nous allons maintenant établir une inégalité qui sera fondamentale au cours de cette étude :

THÉORÈME 4. - Soit φ une spécialisation de rang n d'un corps K induisant une spécialisation de rang m sur un sous-corps k de K. On a :

$$n + \text{d.t.}\,[\varphi(K) : \varphi(k)] \leq m + \text{d.t.}\,[K : k] \tag{4}$$

Les nombres intervenant étant finis ou non.

Dans le cas où, soit m, soit d.t. $[K : k]$ est infini, l'affirmation est triviale. Supposons ces deux nombres finis. Ceci entraîne nécessairement n fini d'après le théorème 3. Il suffit donc de montrer le théorème 4 dans les cas n fini, ce que nous allons supposer désormais.

φ est le produit de n spécialisations de rang 1 :

$$K \longrightarrow K_1 \longrightarrow K_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow K_n = K' = \varphi(K) .$$

Cette suite de spécialisations induit la suite :

$$k \longrightarrow k_1 \longrightarrow k_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow k_n = k' = \varphi(k) .$$

Il suffit de montrer l'inégalité (4) pour chacune des spécialisations $K_{i-1} \longrightarrow K_i$ (et d'additionner les inégalités alors obtenues). On peut donc supposer $n = 1$.

Comme $m \leqslant n$, deux cas sont à envisager :

<u>1er Cas : $m = 1$</u> . - C'est le cas où φ n'est pas triviale sur k. Il s'agit alors de démontrer l'inégalité :

$$\text{d.t.}\ [K' : k'] \leqslant \text{d.t.}\ [K : k]$$

Soient $x'_1 , \dots , x'_d$ des éléments de K' algébriquement indépendants sur k' . Désignons par x_i un élément de K tel que $\varphi(x_i) = x'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ et montrons que les x_i sont algébriquement indépendants sur k .

Supposons qu'il existe une relation algébrique entre les x_i à coefficients dans k :

$$\sum a_{\alpha_1 \dots \alpha_d}\, x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} = 0 \tag{5}$$

les $a_{\alpha_1 \dots \alpha_d}$ étant des éléments non tous nuls de k .

Soit v la valuation (non nulle) de k définie par la spécialisation $k \longrightarrow \varphi(k)$. En multipliant les $a_{\alpha_1 \dots \alpha_d}$ par un élément convenable de k , on peut toujours supposer que :

$$\inf\, [v(a_{\alpha_1 \dots \alpha_d})\,]_{\alpha_1 \dots \alpha_d} = 0 .$$

Par suite, aucun des $\varphi(a_{\alpha_1 \dots \alpha_d})$ n'est infini et les $\varphi(a_{\alpha_1 \dots \alpha_d})$ ne sont pas tous nuls. On déduit alors de l'égalité (5) une égalité :

$$\sum \varphi(a_{\alpha_1 \dots \alpha_d})\, x'^{\alpha_1}_1 \dots x'^{\alpha_d}_d = 0$$

qui montre que les x_i' ne sont pas algébriquement indépendants sur k'. Ceci contredit les hypothèses, par suite les x_i sont algébriquement indépendants sur k et il en résulte bien

$$\text{d.t.}\ [K' : k'] \leq \text{d.t.}\ [K : k]$$

<u>2e Cas : $m = 0$</u>. – C'est le cas où φ est triviale sur k, c'est-à-dire définit un isomorphisme de k sur k'. On peut alors identifier k à k' par φ. Il faut montrer :

$$\text{d.t.}\ [K' : k'] \leq \text{d.t.}\ [K : k] - 1$$

φ n'étant pas triviale sur K, il existe un élément x de K tel que $\varphi(x) = 0$. L'élément x ne peut être algébrique sur k, sinon il existerait une relation de la forme :

$$a_0\, x^n + \dots + a_n = 0 \quad (a_i \in k \quad (0 \leq i \leq n)\ ;\quad a_n \neq 0)\ .$$

On en déduirait :

$$\varphi(a_0)\ \varphi(x)^n + \dots + \varphi(a_n) = 0$$

c'est-à-dire $\varphi(a_n) = 0$ ou $a_n = 0$ ce qui est absurde.

x étant transcendant sur k, désignons par L le sous-corps $k(x)$ de K, et par L' le sous-corps image $\varphi(L)$ de K' (en fait $\varphi(L) = L'_\infty$).

L' est certainement algébrique sur k. Sinon il existerait une spécialisation $L' \longrightarrow L''$ triviale sur k. On en déduirait une spécialisation de rang 2 : $L \longrightarrow L''$ triviale sur k, ce qui contredirait le théorème 3. Donc

$$\text{d.t.}\ [L' : k] = 0$$

φ induisant une spécialisation de rang un sur L', le cas 1 montre que

$$\text{d.t.}\ [K' : L'] \leq \text{d.t.}\ [K : L]\ ,$$

ce qui s'écrit encore :

$$\text{d.t.}\ [K' : k] - \text{d.t.}\ [L' : k] \leq \text{d.t.}\ [K : k] - \text{d.t.}\ [L : k]$$

c'est-à-dire :

$$\text{d.t.}\ [K' : k] \leq \text{d.t.}\ [K : k] + \text{d.t.}\ [L' : k] - \text{d.t.}\ [L : k] = \text{d.t.}\ [K : k] + 0 - 1$$

On a bien l'inégalité :

$$\text{d.t.}\ [K' : k] \leq \text{d.t.}\ [K : k] - 1$$

ce qui démontre complètement le théorème 4.

COROLLAIRE. - d.t. $[\varphi(K) : \varphi(k)] \leq$ d.t. $[K : k]$

En effet on a toujours $m \leq n$.

Montrons maintenant le :

THÉORÈME 5. - <u>La dimension d'un anneau d'intégrité</u> A <u>est toujours inférieure ou égale à sa dimension valuative</u>.

Soit :

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$$

une chaîne d'idéaux premiers de A . Soit v_0 une valuation de A de centre $\mathfrak{p}_0$ sur A . Il existe une valuation (strictement) plus fine v_1 de A ayant pour centre $\mathfrak{p}_1$ sur A et, en continuant le procédé, on trouve une chaîne

$$v_0 < v_1 < \ldots < v_n$$

de valuations de A , ce qui montre le théorème.

Si A est un anneau de Prüfer, quel que soit l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de A , $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation. Il y a donc correspondance biunivoque entre valuations et idéaux premiers de A . Si à l'idéal premier $\mathfrak{p}$ est attachée la valuation $v_{\mathfrak{p}}$, on voit que :

$$\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p} \rightleftarrows v_{\mathfrak{q}} \leq v_{\mathfrak{p}}$$

par suite :

THÉORÈME 6. - <u>La dimension d'un anneau de Prüfer est égale à sa dimension valuative</u>.

Les résultats de SEIDENBERG montrent que l'on peut énoncer la réciproque partielle :

<u>Pour que la fermeture intégrale d'un anneau d'intégrité de dimension</u> 1 <u>soit de Prüfer, il faut et il suffit que sa dimension valuative soit égale</u> à 1.

Enfin il résultera de ce qui suit que :

<u>La dimension d'un anneau d'intégrité noethérien est égale à sa dimension valuative</u>.

Les théorèmes 3 et 5 permettent dans de nombreux cas de borner supérieurement la dimension d'un anneau, en particulier tout anneau de nombres algébriques est de dimension 1. Tout anneau de fonctions algébriques à n variables contenant le corps des constantes est de dimension inférieure ou égale à n .

Nous allons maintenant montrer le :

THÉORÈME 7. - <u>Si</u> A <u>est un anneau d'intégrité de dimension valuative</u> d , <u>l'anneau de polynômes</u> $A[x]$ <u>à une variable sur</u> A <u>a pour dimension valuative</u> $d+1$.

Désignons par K (resp. $\mathcal{K}$) le corps des fractions de A (resp. $A[x]$) et soit une valuation de rang m de l'anneau A . Elle définit une suite de m spécialisations non triviales :

$$K \longrightarrow K_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_m$$

cette suite induit sur A la suite de spécialisations :

$$A \longrightarrow A/\mathfrak{p}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A/\mathfrak{p}_m$$

Considérons le sous-anneau V de $\mathcal{K}$ ainsi défini : un élément y de $\mathcal{K}$ appartient à V s'il est nul ou de la forme :

$$y = \frac{a_0 x^m + \cdots + a_p x^p}{b_0 x^n + \cdots + b_q x^q}$$

avec a_p ; $b_q \neq 0$ et $p \geqslant q$.

On voit facilement que V est un anneau de valuation de $\mathcal{K}$ qui définit une spécialisation de $\mathcal{K}$ sur K . La valuation correspondante est compatible avec $A[x]$ et $A[x]$ se trouve canoniquement spécialisé sur A , x étant spécialisé sur 0 . On en déduit la suite de spécialisations :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{K} & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & K_m \\ | & & | & & & & & & | \\ A[x] & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/\mathfrak{p}_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A/\mathfrak{p}_m \end{array}$$

Donc à toute valuation de rang m de A on peut faire correspondre une valuation de rang $m+1$ de $A[x]$. On a donc, que d soit fini ou non :

$$\dim_v A[x] \geqslant d + 1$$

Par suite, si $d = \infty$, on a $\dim_v A[x] = \dim_v A + 1$

Supposons donc $d < \infty$.

Soit $n = \dim_v A[x]$ (n fini ou non), et soit une valuation de rang n de $A[x]$. Elle définit une valuation de rang m de A et on a les spécialisations :

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{K}' \\ & | & & | \\ & K & \longrightarrow & K' \end{array}$$

Le théorème 4 permet d'écrire :

$$n + \text{d.t.}\,[\mathcal{K}' : K'] \leqslant m + \text{d.t.}\,[\mathcal{K} : K] .$$

L'égalité d.t. $[\mathcal{K} : K] = 1$ et l'inégalité $m \leqslant d$ montrent que n et d.t. $[\mathcal{K}' : K']$ sont deux nombres finis. On a donc :

$$n \leqslant m + \text{d.t.}\,[\mathcal{K} : K] - \text{d.t.}\,[\mathcal{K}' : K'] \leqslant m + \text{d.t.}\,[\mathcal{K} : K] \leqslant d + 1$$

d'où le théorème.

COROLLAIRE 1. - Quel que soit l'anneau d'intégrité A, on a :

$$\dim_v A^{(n)} = n + \dim_v A$$

COROLLAIRE 2 (SEIDENBERG). - Si A est un anneau de Prüfer, on a :

$$\dim A^{(n)} = n + \dim A$$

En effet, $\dim_v A = \dim A$ donc $\dim_v A^{(n)} = n + \dim A$ et le corollaire est une conséquence immédiate de l'inégalité (2) et du théorème 5.

THÉORÈME 8. - Si A est un anneau d'intégrité de dimension valuative finie, il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait :

$$\dim A^{(n)} = n + \delta$$

où δ est un entier inférieur ou égal à $\dim_v A$.

Considérons la fonction $f(n) = \dim_v A^{(n)} - \dim A^{(n)}$.

$$f(n+1) - f(n) = (\dim_v A^{(n+1)} - \dim_v A^{(n)}) - (\dim A^{(n+1)} - \dim A^{(n)})$$

$$= 1 - (\dim A^{(n+1)} - \dim A^{(n)}) \quad \text{(Théorème 7)} \leqslant 0 \quad \text{(Inégalité (1))}.$$

Comme $f(n)$ est une fonction décroissante bornée inférieurement par 0 (Théorème 5), elle admet une borne inférieure α qu'elle atteint pour $n = N$. Par suite $n \geqslant N$ entraîne $f(n) = \alpha$ ou $\dim A^{(n)} = \dim_v A^{(n)} - \alpha$ et, comme $\dim_v A^{(n)} = n + \dim_v A$, on voit donc que $n \geqslant N$ entraîne

$$\dim A^{(n)} = n + \dim_v A - \alpha .$$

On voit de plus que $\delta = \dim_v A - \alpha \leqslant \dim_v A$, ce qui achève de démontrer le théorème. On verra plus tard qu'en fait

$$\delta = \dim_v A .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] KRULL (Wolfgang). - Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, III. Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie, Math. Z., t. 42, 1937, p. 745-766.

[2] KRULL (Wolfgang). - Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie, Math. Z., t. 54, 1951, p. 354-387.

[3] SEIDENBERG (A.). - A note on the dimension theory of rings, Pac. J. Math., t. 3, 1953, p. 505-512.

[4] SEIDENBERG (A.). - On the dimension theory of rings, II , Pac. J. Math., t. 4, 1954, p. 603-614.