

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MICHEL ZISMAN

Cohomologie des variétés analytiques complexes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, n° 2 (1957-1958), exp. n° 21,
p. 1-19

http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_2_A7_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

---:---:---

21 avril et 12 mai 1958

Séminaire P. DUBREIL
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1957/58

---:---:---

COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES COMPLEXES

par Michel ZISMAN

1. Quelques rappels.

Soit V une variété analytique complexe de dimension complexe n [8] (toutes les variétés seront supposées dénombrables à l'infini).

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de V par des ouverts U_i homéomorphes à une boule ouverte de \mathbb{C}^n (\mathbb{C} = ensemble des complexes).

On désigne par :

$$f_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

la matrice jacobienne définie par le passage des coordonnées de U_i à celles de U_j

$$\varphi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(2n, \mathbb{R})$$

la matrice réelle $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ (où $f_{ij} = A + iB$, $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$).

L'ensemble $(f_{ij})_{i,j \in I}$ est un cocycle (cf [8]) qui définit un fibré analytique complexe noté \mathcal{C} , à fibre \mathbb{C}^n .

L'ensemble $(\varphi_{ij})_{i,j \in I}$ est un cocycle qui définit un fibré analytique réel noté ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{C}$ à fibre \mathbb{R}^{2n} : le fibré tangent réel de V .

Enfin soit ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ le fibré à fibre \mathbb{C}^{2n} défini à partir de ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{C}$ par le plongement $GL(2n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(2n, \mathbb{C})$.

On a alors les identifications canoniques

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{R}}\mathcal{C}_{\mathbb{C}} &\approx \mathcal{C} \oplus \overline{\mathcal{C}} \\ ({}_{\mathbb{R}}\mathcal{C}_{\mathbb{C}})^* &\approx T \oplus \overline{T} \\ ({}_{\mathbb{R}}\mathcal{C}_{\mathbb{C}})^*(r) &\approx \sum_{p+q=r} T^p \otimes \overline{T}^q \end{aligned}$$

($\bar{\mathcal{C}}$ = fibré défini par le cocycle \bar{f}_{ij} complexe conjugué de f_{ij} ; T dual de \mathcal{C} , Σ est la somme de Whitney).

Une r-forme différentielle différentiable (appelée r-forme dans la suite pour simplifier) de $(\mathcal{R}\mathcal{C})^{*(r)}$ qui provient d'un élément de $T^p \otimes \bar{T}^q$ est dite de type (p, q) .

La différentielle extérieure $d : (\mathcal{R}\mathcal{C})^{*(r)} \rightarrow (\mathcal{R}\mathcal{C})^{*(r+1)}$ se sépare en deux, compte tenu de l'identification précédente : on pose

$$d = d' + d''$$

où d' et d'' ont l'effet suivant sur les formes du type (p, q) :

$$d' : (p, q) \rightarrow (p + 1, q)$$

$$d'' : (p, q) \rightarrow (p, q + 1) .$$

on a alors $d'd' = d''d'' = d'd'' + d''d' = 0$ pour des raisons de types puisque $dd = 0$.

2. Métrique hermitique (cf [4] et [5]).

a. Soient V_p une variété réelle, de dimension p, F l'ensemble des matrices (n, n) définies positives symétriques, F_1 l'ensemble des matrices (n, n) symétriques. On montre sans peine que F est homéomorphe à une boule ouverte de F_1 (car F est convexe et ouvert dans F_1) F est donc contractile. Appliquons alors le théorème (5.3) de [8].

PROPOSITION 1. - Tout fibré sur V à fibre F a une section globale C^∞ .

En particulier, le sous-fibré de $\mathcal{R}\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{R}\mathcal{C}^*$ formé par les tenseurs covariants définis positifs symétriques a une section globale. Dans un système de coordonnées (x^1, \dots, x^p) cette section s'exprime à l'aide d'une matrice (g_{uv}) ($u, v = 1, 2, \dots, p$), et la forme quadratique

$$ds^2 = \sum_{uv} g_{uv} dx^u dx^v$$

est ce qu'on appelle une métrique riemannienne.

Si X et Y sont deux vecteurs tangents en un point x on peut alors définir leur produit scalaire : $\langle X, Y \rangle = \sum_{uv} g_{uv}(x) X^u Y^v$, (X^u, Y^v) , ($u, v = 1, 2, \dots, p$) étant les coordonnées de X, Y sur la base duale de la base (dx^u) de $\mathcal{R}\mathcal{C}^*$

b. Soit maintenant V une variété analytique complexe de dimension complexe n , et V_{2n} la variété analytique réelle qu'elle définit canoniquement. Soit $\alpha = 1, 2, \dots, n$, et posons $\bar{z}^\alpha = z^{\alpha*}$ où (z^α) est un système de coordonnées analytiques complexes de V . On peut prendre $(z^\alpha, z^{\alpha*})$ comme système de coordonnées de V_{2n} . Une métrique riemannienne sur V_{2n} s'exprime alors par une matrice g telle que :

$$\left| \begin{array}{l} g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \quad , \quad g_{\alpha\beta*} = g_{\beta*\alpha} \quad , \quad g_{\alpha*\beta*} = g_{\beta*\alpha*} \quad (g \text{ symétrique}) \\ g_{\alpha\beta*} = \bar{g}_{\alpha*\beta} \quad (g \text{ réelle}) . \end{array} \right.$$

Soit X un vecteur tangent réel (i.e. $X \in \mathcal{R}\mathcal{C}$). Sur la base duale de $(dz^\alpha, dz^{\alpha*})$, ses coordonnées sont $X^\alpha, X^{\alpha*} = \bar{X}^\alpha$. On pose $\mathcal{J}X =$ le vecteur de coordonnées $iX^\alpha, -iX^{\alpha*}$. C'est un vecteur réel. \mathcal{J} est un opérateur $\mathcal{R}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{R}\mathcal{C}$ tel que $\mathcal{J}^2 = -\text{Identité}$.

DEFINITION. - On dit que la métrique riemannienne g de V_{2n} définit une métrique hermitique de V , si g est compatible avec \mathcal{J} , c'est-à-dire si

$$\langle X, Y \rangle = \langle \mathcal{J}X, \mathcal{J}Y \rangle \quad \text{pour tous } X, Y \in \mathcal{R}\mathcal{C}$$

PROPOSITION 2. - Il existe toujours une métrique hermitique sur une variété analytique complexe [4].

On part d'une métrique riemannienne quelconque g , et on montre qu'on peut la transformer de façon à la rendre compatible avec \mathcal{J} . Un calcul simple montre alors que si g est hermitique :

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha*\beta*} = 0,$$

si bien que finalement

$$ds^2 = 2 \sum_{\alpha\beta*} g_{\alpha\beta*} dz^\alpha dz^{\beta*}$$

On pose

$$\omega = i \sum_{\alpha\beta*} g_{\alpha\beta*} dz^\alpha \wedge dz^{\beta*}$$

DEFINITION. - Une variété analytique complexe est dite kählérienne, s'il existe une métrique hermitique sur V telle que la forme ω associée soit un cocycle, i.e. $d\omega = 0$.

Le théorème de de Rham permet alors d'associer à ω une classe de cohomologie de $H^2(V, R)$.

Notons que dans tous les cas ω est de type (1,1).

c. l'opérateur * (cf [4] et [5]). - On peut, par un changement de repère dans $R^{\mathcal{C}}$ et $R^{\mathcal{C}*}$ donner à ds et ω les formes simplifiées

$$ds^2 = 2 \theta^\alpha \theta^{\alpha*} \quad (\theta^{\alpha*} = \overline{\theta^\alpha})$$

$$\omega = i \theta^\alpha \wedge \theta^{\alpha*}$$

θ^α n'étant plus la différentielle d'une fonction, mais une forme de Pfaff non fermée en général.

On définit alors sur les formes de type (p, q) un opérateur linéaire :

$$* : T^{(p)} \otimes \overline{T}^{(q)} \xrightarrow{\sim} T^{(n-q)} \otimes \overline{T}^{(n-p)}$$

par :

$$*(\theta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\alpha_p} \otimes \theta^{\beta_1*} \wedge \dots \wedge \theta^{\beta_q*}) = \pm i^n \theta^{\beta_1'} \wedge \dots \wedge \theta^{\beta_{n-q}'} \otimes \theta^{\alpha_1'} \wedge \dots \wedge \theta^{\alpha_{n-p}'}$$

où

$$\begin{cases} \alpha_1 \dots \alpha_p \alpha_1' \dots \alpha_{n-p}' & \text{est une permutation de } 1, 2, \dots, n \\ \beta_1 \dots \beta_q \beta_1' \dots \beta_{n-q}' & \text{est une permutation de } 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

le signe \pm étant égal à :

$$(-1)^n (-1)^{pn} (-1)^{I(\alpha)} (-1)^{I(\beta)}$$

où $I(\alpha)$ (resp. $I(\beta)$) désigne la parité de la permutation des α (resp des β).

On montre sans peine que $** = (-1)^{p+q}$ Identité, ce qui montre bien que $*$ est un isomorphisme, car il a un inverse. On pose alors :

$$\begin{aligned} \delta &= - * d * & \delta d + d \delta &= \Delta \\ \delta' &= - * d' * & \delta' d' + d' \delta' &= \Delta' \\ \delta'' &= - * d'' * & \delta'' d'' + d'' \delta'' &= \Delta'' \end{aligned}$$

le noyau de Δ est par définition l'ensemble des formes harmoniques.

d. produit scalaire sur les formes (on suppose dans ce paragraphe que V est compacte). - Soient $\alpha, \beta \in T^{(p)} \otimes \overline{T}^{(q)}$ on pose

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_V \alpha \wedge * \overline{\beta}$$

$(\overline{\beta} \in \overline{T}^{(p)} \otimes T^{(q)})$, $* \overline{\beta} \in T^{(n-p)} \otimes \overline{T}^{(n-q)}$ donc $\alpha \wedge * \overline{\beta} \in T^n \otimes \overline{T}^n$ i.e.
 $\alpha \wedge * \overline{\beta} \in {}_R \mathcal{C}_C^*(2n)$ (pour l'intégration des formes différentielles voir [4] et [5]).

On montre sans peine que

$$\left| \begin{array}{l} \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle \\ \langle \alpha, \alpha \rangle = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \end{array} \right.$$

si bien que l'on a affaire à un vrai produit scalaire.

Enfin on montre que $\langle \alpha, \delta \beta \rangle = \langle d\alpha, \beta \rangle$, et de même pour d' , δ' , d'' , δ'' (voir la démonstration plus loin dans un cas un peu plus général).

3. DEFINITION DES ESPACES $H^p(V, W)$ ET $H^{p,q}(V, W)$.

Soit W un espace fibré à fibres vectorielles, analytique complexe sur la variété V (de dimension complexe n). \underline{W} désignera le faisceau des germes de sections holomorphes de W . (D'une façon générale le signe $\underline{\quad}$ placé sous un fibré désignera le faisceau des germes de sections holomorphes, ou C^∞ suivant les cas, de ce fibré). En particulier, si W est le fibré trivial de fibre C , \underline{W} est le faisceau des germes de fonctions holomorphes, désigné dans l'exposé précédent par C_ω . On se propose d'étudier les groupes $H^p(V, \underline{W})$.

On pose $H^{p,q}(V, W) = H^q(V, \underline{W} \otimes T^{(p)})$.

En particulier $H^{0,q}(V, W) = H^q(V, \underline{W})$.

La d'' -cohomologie. - Soit $A^{p,q}$ le fibré des formes de type (p, q) . d'' induit un homomorphisme d'espaces fibrés, et par suite des faisceaux des germes de sections C^∞ associés :

$$d'' : \underline{A}^{p,q} \rightarrow \underline{A}^{p,q+1}$$

Le noyau de $d'' : \underline{A}^{p,0} \rightarrow \underline{A}^{p,1}$ est $\underline{T}^{(p)}$, le faisceau des germes de p -formes holomorphes. On a donc la suite exacte :

$$0 \rightarrow \underline{T}^{(p)} \xrightarrow{d''} \underline{A}^{p,0} \xrightarrow{d''} \underline{A}^{p,1}$$

GROTHENDIECK [6] a montré que plus généralement

$$(1) \quad 0 \rightarrow \underline{T}^{(p)} \xrightarrow{d''} \underline{A}^{p,0} \xrightarrow{d''} \underline{A}^{p,1} \xrightarrow{d''} \dots \rightarrow \underline{A}^{p,q} \xrightarrow{d''} \dots$$

est une suite exacte (voir aussi [1]).

Or chacun des $\underline{\underline{A^{p,q}}}$ est fin. (1) est donc une résolution fine de $\underline{\underline{T^{(p)}}}$ (rappelons que $\underline{\underline{A^{p,q}}} \approx \underline{\underline{T^{(p)}}} \otimes \underline{\underline{\bar{T}^{(q)}}}$).

Plus généralement soit $A^{p,q}(W) = W \otimes T^{(p)} \otimes \bar{T}^{(q)}$. Si on désigne le fibré trivial de fibre C par C , $A^{p,q}(C) = A^{p,q}$.

DEFINITION. - Une section de $\underline{\underline{A^{p,q}}}(W)$ i.e. une section C^∞ de $\underline{\underline{A^{p,q}}}(W)$ est appelée une forme de type (p, q) à valeurs dans W .

LEMME 1. - d'' opère sur $\underline{\underline{A^{p,q}}}(W)$.

En effet soit r la dimension des fibres de W . La restriction de W à un ouvert U , soit W_U , est homéomorphe à $U \times C^r$. Dans U , une forme de type (p, q) à valeurs dans W s'exprime donc par un système de r formes de type (p, q) . Appliquons l'opérateur d'' à chacune de ces formes. On obtient ainsi un système de r formes de type $(p, q+1)$. Ce système est indépendant de la représentation de W_U comme produit. En effet, W étant un fibré analytique complexe, si U' est un autre ouvert tel que $W_{U'} \approx U' \times C^r$, au-dessus de $U \cap U'$, les formules du changement de cartes font intervenir des applications $U \cap U' \rightarrow GL(r, C)$ holomorphes. Or la suite exacte (1) montre en particulier que d'' s'annule sur les fonctions holomorphes.

C.Q.F.D.

d'' induit donc bien une application notée encore $d'' : \underline{\underline{A^{p,q}}}(W) \rightarrow \underline{\underline{A^{p,q+1}}}(W)$.

La suite

$$(2) \quad 0 \rightarrow \underline{\underline{W \otimes T^{(p)}}} \xrightarrow{d''} \underline{\underline{A^{p,0}}}(W) \xrightarrow{d''} \dots \rightarrow \underline{\underline{A^{p,q}}}(W) \xrightarrow{d''} \dots$$

est exacte comme on le voit facilement et chaque $\underline{\underline{A^{p,q}}}(W)$ est fin. (2) est donc une résolution fine de $\underline{\underline{W \otimes T^{(p)}}}$. Appliquons alors le théorème (6,2) de l'exposé 8, [10] :

$\Gamma(F)$ désignant le groupe des sections au-dessus de V du faisceau F , le complexe gradué

$$\Gamma(\underline{\underline{A^{p,0}}}(W)) \xrightarrow{d''} \Gamma(\underline{\underline{A^{p,1}}}(W)) \xrightarrow{d''} \dots \xrightarrow{d''} \Gamma(\underline{\underline{A^{p,q}}}(W)) \rightarrow \dots$$

a pour cohomologie, la cohomologie de V à coefficient dans le faisceau $\underline{\underline{W \otimes T^{(p)}}}$.

$\Gamma(\underline{\underline{A^{p,q}}}(W))$ étant l'ensemble des formes de type (p, q) à valeurs dans W , définies sur tout V , on a démontré :

THÉOREME 1. - $H^{p,q}(V, \underline{\underline{W}})$ s'identifie au q -ième groupe de cohomologie des formes à valeurs dans W , définies sur V , ayant p pour premier type, l'opérateur

différentiel sur ces formes étant d'' .

COROLLAIRE. - $H^{p,q}(V, \underline{W}) = 0$, si p ou $q > n$.

En effet les formes de type (p, q) où p ou q est $> n$ sont identiquement nulles.

4. Le cas où V est compacte-Dualité.

a. Dans toute la suite, V est supposée compacte. Les notations sont celles du paragraphe 3.

Soit W^* le dual de W . Si (f_{ij}) est un cocycle pour W , $({}^t f_{ij}^{-1})$ est un cocycle pour W^* . Si on considère W (qui est un fibré analytique complexe) comme étant seulement C^∞ , on peut réduire son groupe structural de $GL(r, \mathbb{C})$ à $U(r)$. Autrement dit, il existe des applications C^∞ : $h_i : U_i \rightarrow GL(r, \mathbb{C})$ telles que

$$h_i f_{ij} h_j^{-1} : U_i \cap U_j \rightarrow U(r).$$

On pose

$$g_i = {}^t h_i^{-1} h_i : U_i \rightarrow GL(r, \mathbb{C}).$$

au-dessus de U_i , tout $\alpha \in W_{U_i}$ peut s'écrire $\alpha = (u, t)$, $u \in U_i$, $t \in C^r$.

Posons alors

$$\psi(\alpha) = \psi(u, t) = (u, \overline{g_i(u)}t).$$

Un calcul immédiat montre alors que dans un changement de carte, l'élément $\psi(\alpha)$ se comporte comme un élément de W^* . ψ est donc une application $C^\infty : W \rightarrow W^*$. On voit de plus que c'est un anti-isomorphisme. (C'est-à-dire que pour tout $x \in V$, l'application induite sur les fibres $\Psi_x : W_x \rightarrow W_x^*$ est une application additive biunivoque telle que $\Psi_x(\lambda X) = \bar{\lambda} \Psi_x(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $X \in W_x$).

b. Soit $\alpha \in \Gamma(\underline{A}^{p,q}(W))$, $\beta \in \Gamma(\underline{A}^{r,s}(W^*))$.

On définit sans difficulté le produit extérieur $\alpha \wedge \beta \in \Gamma(\underline{A}^{p+r, q+s}(C))$ qui, lorsque $W = \mathbb{C}$ se réduit au produit extérieur ordinaire.

On a

$$(3) \quad d''(\alpha \wedge \beta) = d'' \alpha \wedge \beta + (-1)^{p+q} \alpha \wedge d'' \beta$$

$$(4) \quad \alpha \wedge \beta = (-1)^{(p+q)(r+s)} \beta \wedge \alpha.$$

Si $r = n - p$, $s = n - q$, $\alpha \wedge \beta \in \Gamma(\underline{A}^{n,n}(C)) = \Gamma(\underline{A}^{n,n})$. On peut donc intégrer dans ce cas $\alpha \wedge \beta$ sur V : on pose

$$i(\alpha, \beta) = \int_V \alpha \wedge \beta.$$

LEMME 2. - $i(\alpha, \beta)$ ne dépend que des classes de α et β dans la d'' -cohomologie.

En effet, soit $\alpha = d'' \gamma$, $d'' \beta = 0$

$$i(\alpha, \beta) = \int_V \alpha \wedge \beta = \int_V d''(\gamma \wedge \beta) = \int_V d(\gamma \wedge \beta) = 0$$

La deuxième égalité résulte de (3), la troisième est vraie pour des raisons de type, la quatrième résulte de la formule de Stoke. i passe donc à la cohomologie et, compte tenu du théorème 1, définit une application bilinéaire à valeurs dans C .

$$i : H^{p,q}(V, W) \times H^{n-p, n-q}(W^*) \rightarrow C$$

Nous montrerons à la fin de cet exposé que i est une dualité

c. Considérons les deux anti-isomorphismes

$$\# : W \otimes T^{(p)} \otimes \bar{T}^{(q)} \rightarrow W^* \otimes T^{(n-p)} \otimes \bar{T}^{(n-q)}$$

$$\tilde{\#} : W^* \otimes T^{(r)} \otimes \bar{T}^{(s)} \rightarrow W \otimes T^{(n-r)} \otimes \bar{T}^{(n-s)}$$

définis par

$$\#(w \otimes \alpha) = \psi(w) \otimes (* \bar{\alpha}) \quad w \in W, \quad \alpha \in T^{(p)} \otimes \bar{T}^{(q)}$$

$$\tilde{\#}(w^* \otimes \alpha) = \psi^{-1}(w^*) \otimes (* \bar{\alpha}) \quad w^* \in W^*, \quad \alpha \in T^{(r)} \otimes \bar{T}^{(s)}$$

comme $* * = (-1)^{p+q} \text{id}$, on a aussi $\tilde{\#} \# = (-1)^{p+q} \text{id}$ identité.

Les opérateurs $\#$ et $\tilde{\#}$ induisent des opérateurs

$$\# : \underline{A}^{p,q}(W) \rightarrow \underline{A}^{n-p, n-q}(W^*)$$

$$\tilde{\#} : \underline{A}^{r,s}(W^*) \rightarrow \underline{A}^{n-r, n-s}(W)$$

On pose $\mathcal{S}'' = - \tilde{\#} d'' \#$ (cet opérateur généralise au cas d'un fibré W , l'opérateur \mathcal{S}'' défini dans le paragraphe 2 pour $W = C$).

Enfin, pour $\alpha, \beta \in \Gamma(\underline{A}^{p,q}(W))$ on pose

$$\langle \alpha, \beta \rangle = i(\alpha, \# \beta) = \int_V \alpha \wedge \# \beta$$

LEMME 3. - $\langle \alpha, S''\beta \rangle = \langle d''\alpha, \beta \rangle$

En effet :

$$\langle \alpha, S''\beta \rangle = - \int_V \alpha \wedge \# \# d''\# \beta = (-1)^{p+q+1} \int_V \alpha \wedge d'' \# \beta$$

$$\langle d''\alpha, \beta \rangle - \langle \alpha, S''\beta \rangle = \int_V d''\alpha \wedge \# \beta + (-1)^{p+q} \alpha \wedge d'' \# \beta = \int_V d''(\alpha \wedge \# \beta) = \int_V d(\alpha \wedge \# \beta) = 0$$

C.Q.F.D.

On pose $\Delta'' = S''d'' + d''S''$, le noyau de Δ'' étant l'ensemble des formes harmoniques à valeur dans W.

Le lemme 3 montre alors que l'ensemble des formes harmoniques est celui des formes α telles que $d''\alpha = S''\alpha = 0$.

Enfin pour toute forme α , $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0 \Rightarrow \alpha = 0$. \langle, \rangle est donc un vrai produit scalaire.

Une généralisation du théorème de Hodge-de Rham [5] fournit le

THÉOREME 2. - $\Gamma(\underline{A}^{p,q}(W)) = d''(\Gamma(\underline{A}^{p,q-1}(W))) \oplus S''(\Gamma(\underline{A}^{p,q+1}(W))) \oplus B^{p,q}(W)$

(où \oplus désigne la somme directe et $B^{p,q}(W)$ l'ensemble des formes harmoniques de type (p, q) à valeurs dans W).

Ce qui précède montre alors que les trois ensembles du second membre sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire \langle, \rangle . Le théorème 2, joint au théorème 1, donne alors

PROPOSITION 3. - $H^{p,q}(V, W) \approx B^{p,q}(W)$:

Du fait que Δ est un opérateur différentiel elliptique du second ordre et que V est compact, KODAIRA [3] déduit que les $B^{p,q}(W)$ sont des espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{C} .

Comme d'une part on a les mêmes résultats pour le faisceau $\underline{A}^{p,q}(W^*)$ et que d'autre part $\#$ est un anti-isomorphisme

$$\# : B^{p,q}(W) \rightarrow B^{n-p, n-q}(W^*),$$

la proposition 3 montre que

$$H^{p,q}(V, W) \approx H^{n-p, n-q}(V, W^*),$$

en particulier

$$H^q(V, W) \approx H^{n, n-q}(V, W^*) = H^{n-q}(V, \underline{K \otimes W^*})$$

où $K = T^{(n)}$ est un fibré linéaire.

En résumé :

THEOREME 3. - Sur une variété compacte V de dimension complexe n , les $H^{p,q}(V, W)$ sont nuls pour $p, q > n$; ce sont des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps des complexes, et $i : H^{p,q}(V, W) \times H^{n-p, n-q}(V, W^*) \rightarrow \mathbb{C}$ est une dualité.

5. La caractéristique χ .

a. V étant compacte, d'après le théorème 3, il n'y a qu'un nombre fini de $H^{p,q}(V, W)$ non nuls, et chacun d'eux est un espace vectoriel de dimension finie,

On pose alors :

$$h^{p,q}(V, W) = \dim H^{p,q}(V, W)$$

$$h^{p,q}(V) = \dim H^{p,q}(V, \mathbb{C})$$

$$\chi^p(V, W) = \sum_{q=0}^n (-1)^q h^{p,q}(V, W), \quad \chi^0(V, W) = \chi(V, W)$$

$$\chi^p(V) = \sum_{q=0}^n (-1)^q h^{p,q}(V), \quad \chi^0(V) = \chi(V)$$

$\chi^p(V, W)$ (resp. $\chi(V, W)$ resp. $\chi^p(V)$ resp. $\chi(V)$) n'est autre que la caractéristique d'Euler-Poincaré de V dans la cohomologie à valeur dans le faisceau $\underline{W \otimes T^{(p)}}$ (resp \underline{W} , resp $\underline{T^{(p)}}$, resp $\underline{C_\omega}$)

Enfin on considère les polynômes

$$\chi_y(V, W) = \sum_{p=0}^n \chi^p(V, W) y^p$$

$$\chi_y(V) = \sum_{p=0}^n \chi^p(V) y^p$$

on a évidemment

$$\chi(V) = \chi_0(V)$$

DEFINITION. - On donne au polynôme $\chi_y(V, W)$ le nom de χ_y -caractéristique du fibré W , à $\chi(V)$ le nom de genre arithmétique de V .

b. Cas où V est kählérienne.

De $d\omega = 0$, on tire ([4]) que $\Delta'' = \Delta/2$ sur les formes différentielles à valeur dans \mathbb{C} . Les formes harmoniques pour Δ'' le sont aussi pour Δ , donc

Δ'' commute au passage à l'imaginaire conjugué. Si $\alpha \in B^{p,q}(C)$, l'application $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ est donc un anti-isomorphisme $B^{p,q}(C) \xrightarrow{\sim} B^{q,p}(C)$ comme $H^{p,q}(V, C) \approx B^{p,q}(C)$ on a donc :

$$h^{p,q}(V) = h^{q,p}(V)$$

En particulier $h^{0,q}(V) = h^{q,0}(V)$.

Mais

$$h^{q,0}(V) = \dim H^0(V, \underset{\sim}{\mathbb{T}}^{(q)}) = g_q$$

où g_q désigne le nombre des q -formes définies sur tout V , holomorphes et linéairement indépendantes.

Dans le cas kählérien on a donc

$$\text{PROPOSITION 4. - } \chi(V) = \sum_{q=0}^n (-1)^q g_q .$$

Le théorème de Hodge-de Rham classique montre d'autre part que :

$$\text{PROPOSITION 5. - } H^r(V, C) \approx \sum_{p+q=r} B^{p,q}(C) .$$

(où $H^r(V, C)$ est la cohomologie ordinaire de V à coefficients dans le faisceau constant C).

Un élément de $H^r(V, C)$ qui provient d'un élément de $B^{p,q}(C)$ par l'identification de la proposition 5 sera dit de type (p, q) .

Des homomorphismes $Z \rightarrow R \rightarrow C$, on déduit les homomorphismes $H^r(V, Z) \rightarrow H^r(V, R) \rightarrow H^r(V, C)$.

Un élément de $H^r(V, Z)$, qui donne dans $H^r(V, C)$ un élément de type (p, q) , sera encore appelé de type (p, q) .

Enfin, si $b_r(V)$ désigne le r -ième nombre de Betti de V , i.e. $b_r(V) = \dim H^r(V, C)$ on a, d'après la proposition 5 :

$$b_r(V) = \sum_{p+q=r} h^{p,q}(V) .$$

c. Quelques lemmes.

Il est commode de dire qu'un faisceau F est de type (\mathcal{J}) si $H^p(V, F) = 0$ sauf pour un nombre fini de valeurs de p , et si $\dim H^p(V, F) < +\infty$. On peut alors définir la caractéristique d'Euler-Poincaré

$$\chi(F) = \sum (-1)^p H^p(V, F)$$

LEMME 4. - Soit $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux sur V ; si deux des trois faisceaux sont de type (\mathcal{F}) le troisième l'est aussi et

$$\chi(F) = \chi(F') + \chi(F'')$$

c'est une application immédiate de la suite exacte de cohomologie associée à une suite exacte de trois faisceaux.

LEMME 5. - Soit $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow \dots \rightarrow F_n \rightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux de type (\mathcal{F}) sur V , alors

$$\sum (-1)^i \chi(F_i) = 0.$$

En effet soit N_i le noyau de $F_i \rightarrow F_{i+1}$ chacune des suites

$$0 \rightarrow N_i \rightarrow F_i \rightarrow N_{i+1} \rightarrow 0$$

est exacte. Le lemme 5 est alors une application immédiate du lemme 4.

LEMME 6. - Soit $0 \rightarrow W' \rightarrow W \rightarrow W'' \rightarrow 0$ une suite exacte de fibrés vectoriels analytiques complexes sur V , la suite

$$0 \rightarrow \underbrace{W'} \rightarrow \underbrace{W} \rightarrow \underbrace{W''} \rightarrow 0$$

est aussi exacte.

La démonstration est immédiate dès que l'on a remarqué qu'une section de \underbrace{W} (resp $\underbrace{W'}$, resp $\underbrace{W''}$) au-dessus de U n'est autre qu'une section holomorphe de W (resp W' , resp W'') au-dessus de U . La réciproque du lemme 6 est vraie, mais la démonstration est plus compliquée dans ce cas.

d. Premières propriétés de $\chi_{\mathcal{Y}}$.

PROPOSITION 6. - $\chi_{-1}(V) = \sum (-1)^{p+q} h^{p,q}(V) =$ caractéristique d'Euler-Poincaré de la cohomologie de V à coefficients dans \mathbb{C} .

Si V est kählérienne, la démonstration résulte immédiatement de la proposition 5 :

$$\chi_{-1}(V) = \sum_r (-1)^r \sum_{p+q=r} h^{p,q}(V) = \sum_r (-1)^r b_r(V).$$

Dans le cas général (V compacte, analytique complexe) ou a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_{\omega} \rightarrow \underbrace{T^{(1)}} \rightarrow \dots \rightarrow \underbrace{T^{(n)}} \rightarrow \mathcal{O}$$

les homomorphismes $\underbrace{T^{(i)}} \rightarrow \underbrace{T^{(i+1)}}$ étant induits par d . Tous ces faisceaux sont de type (\mathcal{F}) (pour \mathbb{C} cela résulte du théorème 5 de [7], pour les autres

cela résulte du théorème 3). On peut donc appliquer le lemme 5 :

$\chi(C) = \sum (-1)^i \chi_{\underline{m}}(T^{(i)})$ dans les notations de ce lemme. Mais $\chi_{\underline{m}}(T^{(i)})$ est par définition égal à $\chi^i(V)$ donc

$$\chi(C) = \sum (-1)^i \chi^i(V) = \chi_{-1}(V) .$$

PROPOSITION 7. - $\chi_{+1}(V) =$ Indice de V . (pour V kählérienne compacte).

Définissons d'abord l'indice d'une variété de dimension paire $2n$, orientable.

Soit $x \in H^n(V, \mathbb{R})$, et $[V]$ un générateur de $H_{2n}(V, \mathbb{R})$ définissant l'orientation de V . $x^2 \in H^{2n}(V, \mathbb{R})$ (le produit étant le cup-produit) et $x^2([V]) \in \mathbb{R}$. On définit ainsi une forme quadratique sur l'espace vectoriel sur le corps des réels $H^n(V, \mathbb{R})$. L'indice de cette forme quadratique (nombre de carrés positifs - le nombre de carrés négatifs) est l'indice de V . Si n est impair, l'indice est nul : en effet le cup-produit étant anticommutatif $x^2 = 0$, si n est impair pour tout $x \in H^n(V, \mathbb{R})$. Si n est impair,

$\chi_1(V) = \sum_p \chi^p(V) = 0$ car la dualité (théorème 3) montre que

$$\chi^p(V) = (-1)^n \chi^{n-p}(V) = -\chi^{n-p}(V)$$

(dans le cas où n est impair $\chi_1(V) =$ indice de V , même si V n'est pas kählérienne).

Dans le cas n pair la démonstration fait intervenir une décomposition de Lepage des formes harmoniques (cf [4]). On renvoie à [2] pour la démonstration.

PROPOSITION 8. - $\chi_y(V \times V') = \chi_y(V) \chi_y(V')$ (V et V' compactes).

En effet

$$h^{p,q}(V \times V') = \sum_{\substack{r+u=p \\ s+v=q}} h^{r,s}(V) h^{u,v}(V')$$

(en effet $\Lambda^{p,q}(V \times V') = \sum_{\substack{r+u=p \\ s+v=q}} \Lambda^{r,s}(V) \otimes \Lambda^{u,v}(V')$ où $\Lambda^{p,q}(V \times V')$,

$\Lambda^{r,s}(V)$, $\Lambda^{u,v}(V')$ désignent les fibrés du paragraphe 3 au-dessus de $V \times V'$, V , V').

Donc en posant

$$\pi_{y,z}(V) = \sum h_{p,q}(V) y^p z^q$$

$$\pi_{y,z}(V \times V') = \pi_{y,z}(V) \pi_{y,z}(V') .$$

Mais $\pi_{y,-1} = \chi_y$ donc la proposition 8 est démontrée.

PROPOSITION 9. - Soit $0 \rightarrow W' \rightarrow W \rightarrow W'' \rightarrow 0$ une suite exacte de fibrés à fibres vectorielles sur V compacte. Alors

$$\chi_y(V, W) = \chi_y(V, W') + \chi_y(V, W'')$$

En effet la suite $0 \rightarrow W' \otimes T^{(p)} \rightarrow W \otimes T^{(p)} \rightarrow W'' \otimes T^{(p)} \rightarrow 0$ est encore exacte; donc, d'après les lemmes 6 et 4,

$$\chi^p(V, W) = \chi^p(V, W') + \chi^p(V, W'') \quad p = 0, 1 \dots n.$$

d'où la proposition.

PROPOSITION 10. - Soient W un fibré vectoriel sur V , à fibre C^r , dont le groupe structural peut être réduit (comme fibré analytique complexe) au groupe $\Delta(r, C)$, les fibrés diagonaux vectoriels de fibré C étant A_1, \dots, A_r ([9], paragraphe (3-3)), et W' un fibré vectoriel quelconque. On a :

$$\chi(V, W' \otimes W) = \chi(V, W' \otimes A_1) + \dots + \chi(V, W' \otimes A_r).$$

Démonstration par récurrence sur r . Si $r = 1$, la formule est évidente (car $W = A_1$). Supposons donc le résultat vrai pour $r' < r$, et démontrons-le pour r . On peut réduire le groupe structural de W/A_1 à $\Delta(r-1, C)$. Ses fibrés diagonaux sont A_2, \dots, A_r , et la suite

$$0 \rightarrow W' \otimes A_1 \rightarrow W' \otimes W \rightarrow W' \otimes (W/A_1) \rightarrow 0$$

est exacte. On déduit alors la formule cherchée des lemmes 6 et 4 et de l'hypothèse de récurrence qui s'applique au fibré W/A_1 .

6. Diviseurs.

DÉFINITION. - Soit $\underline{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de V par des ouverts. On appelle diviseur, un ensemble de fonctions (f_i) , f_i étant méromorphe non identiquement nulle dans U_i , tel que $\frac{f_i}{f_j}$ soit holomorphe sans zéros dans $U_i \cap U_j$.

Si $\{U'_{j'}\}_{j' \in I'}$ est un autre recouvrement de V , $(f_{i'})$ un diviseur défini dans ce recouvrement, on dit que (f_i) et $(f_{i'})$ définissent le même diviseur de V si $\frac{f_i}{f_{i'}}$ est sans zéro ni pôle dans $U_i \cap U'_{i'}$, quels que soient $i \in I$, $i' \in I'$.

Définition équivalente à l'aide des faisceaux.

Soient M le faisceau des germes de fonctions méromorphes non identiquement

nulles sur V (l'opération étant la multiplication des fonctions), et C_{ω}^* le faisceau des germes de fonctions holomorphes non identiquement nulles sur V (l'opération étant encore la multiplication) C_{ω}^* est un sous-faisceau de M . Soit \mathcal{D} le quotient de M par C_{ω}^* . On a une suite exacte :

$$0 \rightarrow C_{\omega}^* \xrightarrow{h} G \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow 0$$

\mathcal{D} est le faisceau des germes de diviseurs. Un diviseur est une section globale de \mathcal{D} , i. e. un élément de $H^0(V, \mathcal{D})$. $H^0(V, \mathcal{D})$ est un groupe commutatif que l'on écrit additivement (l'addition des diviseurs correspond donc à la multi-
plication des fonctions f_i). Ecrivons le début de la suite exacte de cohomologie :

$$(3) \quad H^0(V, G) \xrightarrow{h^*} H^0(V, \mathcal{D}) \xrightarrow{d} H^1(V, C_{\omega}^*)$$

Si f est une fonction méromorphe sur tout G (i.e un élément de $H^0(V, G)$) h^*f est donc un diviseur que l'on note (f) .

DEFINITION. - On dit que deux diviseurs sont linéairement dépendant si leur différence est l'image par h^* d'un élément de $H^0(V, G)$.

L'ensemble des classes d'équivalence de diviseurs est donc isomorphe à $H^0(V, \mathcal{D})/h^*H^0(V, G)$, c'est-à-dire à un sous groupe de $H^1(V, C_{\omega}^*)$ puisque la suite (3) est exacte. Mais $H^1(V, C_{\omega}^*)$ est l'ensemble des fibrés analytiques complexes sur V à fibre C^* (cf [8]). A toute classe de diviseurs, d fait donc correspondre un C^* -fibré. Si D est un diviseur, on désigne par $[D]$ le C^* -fibré $(dD)^{-1}$ (si F est un C^* -fibré, on écrit F^{-1} au lieu de F^* , F^n au lieu de $\underbrace{F \otimes \dots \otimes F}_{n \text{ fois}}$, $F^{-n} = \underbrace{F^{-1} \otimes \dots \otimes F^{-1}}_{n \text{ fois}}$); avec ces notations, le produit tensoriel est l'opération du groupe commutatif $H^1(V, C_{\omega}^*)$, comme on le voit immédiatement en se reportant aux formules du paragraphe (1.1) de [9]). Enfin on désigne par $\{D\}$ le fibré vectoriel à fibre C associé à $[D]$. Si D est donné par des fonctions f_i , un cocycle pour $[D]$ est $g_{ij} = f_i/f_j$ dans $U_i \cap U_j$.

DEFINITIONS. - Un diviseur est dit holomorphe (ou non négatif) si les f_i sont toutes holomorphes.

Un diviseur est dit sans singularité, s'il est holomorphe, et s'il existe un recouvrement $\underline{U} = \{U_i\}$ tel que, pour tout i ou bien $f_i \equiv 1$, ou bien il existe dans U_i des coordonnées locales analytiques complexes telles que f_i soit l'une des coordonnées.

Dans ce dernier cas, l'ensemble des x de V tels que $f_i(x) = 0$ pour tous les

i tels que $x \in U_i$ est une variété analytique complexe de dimension $n - 1$ fermée dans V . Réciproquement, une sous-variété analytique complexe fermée dans V définit un diviseur de V . On désignera dans la suite par le même symbole le diviseur sans singularité et la sous-variété qu'il définit.

7. Etude de $\chi(V, W)$ en fonction d'un diviseur S sans singularité.

a. Notons (s_i) les fonctions qui définissent S dans $U = \{U_i\}$. $s_{ij} = s_i/s_j$ est le cocycle qui définit $[S]$. L'ensemble des fonctions $s_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ forme donc une section globale holomorphe du fibré à fibre linéaire $\{S\}$. Soit s cette section. s s'annule sur et seulement sur la sous-variété S . Notons $(W \otimes \{S\})_S$ la restriction à la sous-variété S du fibré $W \otimes \{S\}$, $(W \otimes \{S\})_S$ le faisceau des germes de sections holomorphes du fibré $(W \otimes \{S\})_S$, $(\widehat{W \otimes \{S\}})_S$ le prolongement trivial à V du faisceau $(W \otimes \{S\})_S$.

LEMME 7. - La suite de faisceaux sur V :

$$0 \rightarrow W \rightarrow W \otimes \{S\} \rightarrow (\widehat{W \otimes \{S\}})_S \rightarrow 0$$

est exacte.

Si s' est une section locale de W , au-dessus d'un ouvert U , $s' \otimes s$ est une section locale de $W \otimes \{S\}$ au-dessus de U . Cela définit le premier des homomorphismes de la suite exacte. Le deuxième est défini à partir de la restriction à S des sections locales de $W \otimes \{S\}$. Pour la démonstration du lemme voir [2].

$$\begin{aligned} \text{PROPOSITION 11. - } \chi(V, W) &= \chi(V, W \otimes \{S\}^{-1}) + \chi(S, W_S) \\ \chi(V) &= \chi(V, \{S\}^{-1}) + \chi(S). \end{aligned}$$

(W_S désigne la restriction à S du fibré W).

En effet remarquons d'abord que S étant une sous-variété fermée d'une variété compacte est elle-même compacte, et que par conséquent $\chi(S)$, $\chi(S, W_S)$ peuvent être définies. La proposition 11 résulte alors de l'application à la suite exacte du lemme 7 (où l'on a remplacé W par $W \otimes \{S\}^{-1}$) du lemme 4, et de la proposition (3.2) de [10].

b. Désignons par $\mathcal{C}(V)$, $\mathcal{C}(S)$, (resp. $T^p(V)$, $T^p(S)$) les fibrés vectoriels tangents (resp. des p -formes différentielles holomorphes) au-dessus de V , S ; l'indice S au-dessous d'un fibré désignant encore la restriction à S de ce fibré.

LEMME 8. - $0 \rightarrow \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(V)_S \rightarrow \{S\}_S \rightarrow 0$ est une suite exacte de fibrés au-dessus de S.

En effet soit $j : S \rightarrow V$ l'injection canonique. Si

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

est un cocycle pour $\mathcal{C}(V)$,

$$j^* g_{ij} = g_{ij} \circ j : (j^{-1} U_i) \cap j^{-1} U_j \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

est un cocycle pour $\mathcal{C}(V)_S$. S étant sans singularité, on peut supposer que la dernière coordonnée de V dans U_i (resp. U_j) est f_i resp. (f_j) , les autres étant z_1, z_2, \dots, z_{n-1} (resp. z'_1, \dots, z'_{n-1}). La dernière ligne de la matrice $j^* g_{ij}$ est donc

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial z_n}{\partial z'_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial z'_{n-1}} \end{array} \right)_{f_j=0}, \dots, \left(\begin{array}{c} \frac{\partial z_n}{\partial z'_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial z'_{n-1}} \end{array} \right)_{f_j=0}$$

soit $0, \dots, 0, \frac{f_i}{f_j}(x)$, x étant le point de coordonnées

$(z'_1, \dots, z'_{n-1}, 0)$ de U_j . Par conséquent le fibré $\mathcal{C}(V)_S$ a un groupe structural qui peut être réduit à $GL(n-1, 1; \mathbb{C})$: il admet pour sous-fibré le fibré $\mathcal{C}(S)$ (car la matrice $(n-1 \times n-1)$ qui figure en haut et à gauche de g_{ij} est un cocycle pour $\mathcal{C}(S)$), et pour fibré quotient $\{S\}_S$ (car la matrice 1×1 en bas et à droite est f_i/f_j).

C.Q.F.D.

LEMME 9. - $0 \rightarrow T^{p-1}(S) \otimes \{S\}_S^{-1} \rightarrow T^{(p)}(V)_S \rightarrow T^{(p)}(S) \rightarrow 0$ est une suite exacte de fibrés au-dessus de S.

En effet, du lemme 8 on tire, en remplaçant chaque fibré par son dual, la suite $0 \rightarrow \{S\}_S^{-1} \rightarrow T(V)_S \rightarrow T(S) \rightarrow 0$. On a d'autre part deux homomorphismes canoniques :

$$T^{(p)}(V)_S \rightarrow T^p(S) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad T^{(p-1)}(V)_S \otimes \{S\}_S^{-1} \rightarrow T^{(p)}(V)_S$$

ce dernier s'annule sur le noyau de l'homomorphisme surjectif

$$T^{p-1}(V)_S \otimes \{S\}_S^{-1} \rightarrow T^{p-1}(S) \otimes \{S\}_S^{-1} \rightarrow 0$$

et induit par conséquent un homomorphisme

$$T^{p-1}(S) \otimes \{S\}_S^{-1} \rightarrow T^p(V)_S,$$

qui est le premier homomorphisme de la suite en question. En regardant ce qui se passe dans les fibres, on voit immédiatement que cette suite est exacte.

PROPOSITION 12. - $\chi_Y(V, W) = \chi_Y(V, W \otimes \{S\}^{-1}) + \chi_Y(S, W_S) + y \chi_Y(S, (W \otimes \{S\}_S))$
(cette formule est due à KODAIRA et SPENCER).

Multiplions tensoriellement par W_S les termes de la suite exacte du lemme 9 .
Appliquons alors le lemme 4 : on obtient

$$\chi(S, W_S \otimes T^P(V)_S) = \chi^{P-1}(S, W_S \otimes \{S\}^{-1}) + \chi^P(S, W_S)$$

on applique alors la proposition 11, où W est remplacé par $W \otimes T^P(V)$ (en remarquant que $W_S \otimes T^P(W)_S = (W \otimes T^P(V))_S$) et l'on obtient la formule cherchée.

Un calcul formel (donné par récurrence sur p) la formule suivante

$$(4) \quad \chi^P(S, W_S) = \sum_{i=0}^P (-1)^i [\chi^{P-i}(V, W \otimes \{S\}^{-i}) - \chi^{P-i}(V, W \otimes \{S\}^{-i+1})]$$

REMARQUE. - Par définition même de la caractéristique le premier membre est nul si $p \geq n$ (car S est une variété de dimension $n - 1$) ; mais le second membre ne s'annule pas identiquement pour $p \geq n$. Il existe donc des relations non triviales entre les χ qui figurent au second membre. Ces relations subsistent-elles lorsque $\{S\}$ est remplacé par un fibré à fibre linéaire quelconque ? Nous verrons que la réponse est positive lorsque V est algébrique.

De l'expression (4), on tire

$$(5) \quad \chi_Y(S, W_S) = \sum_{i=0}^{\infty} (-y)^i [\chi_Y(V, W \otimes \{S\}^{-i}) - \chi_Y(V, W \otimes \{S\}^{-i-1})]$$

où la série formelle du second membre est en fait un polynôme, en vertu des relations dont on vient de parler.

Dans un prochain exposé, on donnera à l'expression (5) une forme symbolique permettant de définir plus généralement des "caractéristiques virtuelles" et d'obtenir des formules plus maniables que celles de la proposition 12. Dans le cas où V est algébrique ces formules nous permettront de calculer complètement $\chi(V)$ en fonction des classes de Chern de V : c'est ce résultat qu'on désignera sous le nom de théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DOLBEAULT (Pierre). - Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe, *Annals of Math.*, t. 64, 1956, p. 83-330 (Thèse Sc. math. Paris. 1955).
- [2] HIRZEBRUCH (Friedrich). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. - Berlin, Springer, 1956 (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, Heft 9).
- [3] KODAIRA (K.). - On cohomology groups of compact analytic varieties with coefficients in some analytic faisceaux, *Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A.*, t. 39, 1953, p. 865-868.
- [4] LICHNEROWICZ (André). - Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie. - Paris, Dunod, 1955 (Travaux et Recherches mathématiques, 2).
- [5] de RHAM (Georges). - Variétés différentiables ... - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., n° 1222).
- [6] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux analytiques sur l'espace projectif, *Séminaire H. Cartan*, t. 6, 1953/54, n° 18.
- [7] ZISMAN (Michel). - Homologie et cohomologie de Čech, II., *Séminaire Dubreil-Pisot*, t. 10, 1956/57, n° 14.
- [8] ZISMAN (Michel). - Espaces fibrés, *Séminaire Dubreil-Pisot*, t. 10, 1956/57, n° 17.
- [9] ZISMAN (Michel). - Espaces fibrés à fibre vectorielle, *Séminaire Dubreil-Pisot*, t. 10, 1956/57, n° 21.
- [10] ZISMAN (Michel). - Cohomologie à coefficients dans un faisceau, *Séminaire Dubreil-Pisot*, t. 11, 1957/58, n° 8.
-