

# SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

ERNEST-AUGUST BEHRENS

**Sur les anneaux admettant une représentation normale dans un module dont le treillis des sous-modules est distributif**

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 11, n° 2 (1957-1958), exp. n° 17, p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1957-1958\\_\\_11\\_2\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_2_A4_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

-:-:-:-

10 mars 1958

Séminaire P. DUBREIL  
 M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT  
 (ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)  
 Année 1957/58

-:-:-:-

SUR LES ANNEAUX ADMETTANT UNE REPRÉSENTATION NORMALE  
 DANS UN MODULE DONT LE TREILLIS DES SOUS-MODULES EST DISTRIBUTIF

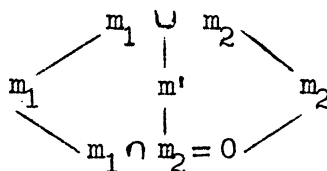
par Ernest-August BEHRENS

Les anneaux  $T$ , mentionnés dans le titre sont supposés semi-primaires et munis d'un élément unité. Ils sont une généralisation des anneaux simples ou mieux des anneaux primitifs, c'est-à-dire des anneaux  $T$  ayant un  $T$ -module normal et irréductible. En premier lieu, je donnerai un critère commode pour la distributivité du treillis  $V(m)$  des  $T$ -sous-modules d'un  $T$ -module normal  $m$  (théorème 2). Puis je caractériserai les anneaux ci-dessus comme ceux qui sont représentables par des anneaux d'applications linéaires, qui sont "suffisamment denses" dans un sens précisé dans le théorème 3, supposant que  $T$  est une algèbre sur un corps commutatif  $K$ , qui est un corps de décomposition pour les algèbres  $\bar{T}$  dans  $T/W(T) = \bar{T}_1 \oplus \dots \oplus \bar{T}_q$ .

1. Soit  $T$  un anneau semi-primaire ayant un élément unité 1, c'est-à-dire pour lequel la condition minimale pour les idéaux à droite est remplie. Soit  $m$  un module à droite par rapport à  $T$ , et unitaire. Soit  $V(m)$  le treillis des sous-modules de  $m$  par rapport à  $T$ . En premier lieu supposons l'anneau  $T$  simple. Si le module  $m$  est irréductible, il est clair que le treillis  $V$ , se composant de 0 et de  $m$ , est distributif. D'autre part si  $m$  est réductible, il est la somme directe de sous-modules irréductibles  $m_i$ ,  $T$ -isomorphes entre eux. Au moyen de l'isomorphisme  $\sigma$  de  $m_1$  sur  $m_2$  nous formons l'ensemble

$$m' = \{x_1 + x_1 \sigma ; x_1 \in m_1\} .$$

C'est un sous-module de  $m$  par rapport à  $T$ , et on voit que  $V(m)$  contient un sous-treillis, ayant le diagramme suivant



Ceci montre que le treillis  $V(m)$  n'est pas distributif, et nous avons, par conséquent, la

PROPOSITION 1. - Si  $T$  est simple, la distributivité de  $V(m)$  est équivalente à l'irréductibilité de  $m$ .

Il n'est pas difficile de généraliser la proposition 1 à un anneau  $T$  primaire, c'est-à-dire à un anneau semi-primaire ayant la propriété suivante : le quotient  $\bar{T}$  de l'anneau  $T$  par son radical de Wedderburn  $W(T)$  est simple. Pour cela, nous formons la chaîne de Loewy pour le  $T$ -module  $m$  :

$$(1) \quad m \supset mW \supset mW^2 \supset \dots \supset mW^r = 0 .$$

Puisque  $mW^{k+1}$  est le résultat de l'application de  $W$  à  $mW^k$ , chacun des groupes-quotients  $mW^k/mW^{k+1}$  est un module par rapport à l'anneau-quotient  $\bar{T} = T/W$ . Si le treillis  $V(m)$  est distributif, le treillis  $V(mW^k/mW^{k+1})$  est distributif aussi. Alors la proposition 1 a pour conséquence l'irréductibilité du quotient  $mW^k/mW^{k+1}$ , autrement dit, la chaîne (1) est maximale.

Réciproquement, si cette condition est remplie, les modules de la chaîne de Loewy constituent la totalité des  $T$ -sous-modules de  $m$ . Par conséquent, le treillis  $V(m)$  distributif bien entendu, est une chaîne, ce qui démontre la

PROPOSITION 2. - Si  $T$  est primaire, la distributivité de  $V(m)$  est équivalente à la maximalité de la chaîne de Loewy (1).

On prouve, dans la théorie des anneaux semi-primaires, qu'un tel anneau  $T$ , ayant un élément 1, est la somme des anneaux primaires  $T_\chi$  et d'un sous-groupe additif  $N$  du radical  $W(T)$  :

$$(2) \quad T = T_1 + T_2 + \dots + T_q + N .$$

(Cette somme est directe mais seulement en sa qualité de groupe additif). Il existe  $q$  éléments idempotents et orthogonaux  $\epsilon_\chi$  tel que  $1 = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_q$  et  $T_\chi = \epsilon_\chi T \epsilon_\chi$ . En formant les  $T_\chi$ -modules  $m \epsilon_\chi$ , nous voyons facilement que la distributivité de  $V(m)$  implique la distributivité des  $V(m \epsilon_\chi)$ . Donc, suivant la proposition 2 la maximalité des chaînes de Loewy

$$(3) \quad m \epsilon_\chi \supset mW(T_\chi) \supset \dots \supset mW(T_\chi)^r = 0 ,$$

$\chi = 1, \dots, q$ , est une condition nécessaire pour la distributivité du treillis  $V(m)$ . Cette condition est suffisante aussi. Car 1 étant la somme des  $\epsilon_\chi$  nous avons la représentation univoque

$$u = u \epsilon_1 + \dots + u \epsilon_q$$

pour chaque  $T$ -sous-module  $u$  de  $m$ , et la maximalité de la chaîne (3) implique  $u \in \mathfrak{x} = mW(T_{\mathfrak{x}})^{k_{\mathfrak{x}}}$ , comme on l'a remarqué ci-dessus, pour un exposant convenable  $k_{\mathfrak{x}}$ . Alors la représentation des modules

$$u = mW_1^{k_1} + \dots + mW_q^{k_q}, \quad U_{\mathfrak{x}} = W(T_{\mathfrak{x}}),$$

entraîne la distributivité de  $V(m)$ . Nous avons prouvé le

**THÉORÈME 1.** - La distributivité de  $V(m)$  est équivalente à la maximalité des chaînes de Loewy (3) pour  $\mathfrak{x} = 1, \dots, q$ .

On peut trouver la démonstration détaillée du théorème 1 dans [1].

2. Si le module  $m$  est normal, c'est-à-dire, si l'annulateur du  $T$ -module  $m$  est zéro, l'exposant  $r_{\mathfrak{x}}$ , dans la formule (3), est égal à l'exposant  $\rho_{\mathfrak{x}}$  du radical  $W(T_{\mathfrak{x}})$  de l'anneau primaire  $T_{\mathfrak{x}}$ , donc au plus petit nombre vérifiant  $W(T_{\mathfrak{x}})^{\rho} = 0$ . Le nombre  $\rho_{\mathfrak{x}}$  dépend de l'anneau  $T_{\mathfrak{x}}$  seulement, mais non du module  $m$ . Soit  $l_{\mathfrak{x}} = l(m \in \mathfrak{x})$  la longueur du treillis  $V(m \in \mathfrak{x})$  des  $T_{\mathfrak{x}}$ -sous-modules de  $m \in \mathfrak{x}$ . Il est clair que  $\rho_{\mathfrak{x}} \leq l_{\mathfrak{x}}$  et que  $\rho_{\mathfrak{x}} = l_{\mathfrak{x}}$  est équivalent à la maximalité de la chaîne (3). Soit  $l = l(m)$  la longueur du treillis  $V(m)$ .

PROPOSITION 3.

$$l_1 + l_2 + \dots + l_q = l.$$

DÉMONSTRATION. - Soit

$$(4) \quad m = m_0 \supset m_1 \supset m_2 \supset \dots \supset m_l = 0$$

une chaîne maximale de  $T$ -sous-modules de  $m$ . Chaque module-quotient  $\bar{m}_i = m_i/m_{i+1}$  est un module irréductible et normal pour un et seulement un terme de la somme dans la représentation

$$(5) \quad \bar{T} = T/W(T) = \bar{T}_1 \oplus \dots \oplus \bar{T}_q,$$

les  $\bar{T}_{\mathfrak{x}} \cong T_{\mathfrak{x}}/W(T_{\mathfrak{x}})$  étant simples. De plus les autres termes de la somme dans la formule (5) sont annulés par cet  $\bar{m}_i$ . Les modules-quotients  $\bar{m}_{i_1}, \dots, \bar{m}_{i_{t_{\mathfrak{x}}}}$  de la chaîne (4), qui sont normaux par rapport à  $\bar{T}_{\mathfrak{x}}$ , constituent une chaîne  $C^{(\mathfrak{x})}$  de  $T$ -modules  $T$ -isomorphes entre eux. Il n'est pas difficile de démontrer, que la chaîne

$$(6) \quad m \in \mathfrak{x} = m_0 \in \mathfrak{x} \supseteq m_1 \in \mathfrak{x} \supseteq \dots \supseteq m_l \in \mathfrak{x} = 0$$

de  $T_\alpha$ -sous-modules de  $m \in E_\alpha$  est maximale (sans les répétitions bien entendu !) et que la longueur  $l_\alpha$  de cette chaîne est égale au nombre  $t_\alpha$  de modules dans la chaîne  $C^{(\alpha)}$ . En conséquence la somme  $l_1 + \dots + l_q$  est égale au nombre  $l$  de tous les modules  $\bar{m}_i$  dans tous les ensembles  $C^{(\alpha)}$ .

Utilisant les inégalités  $\rho_\alpha \leq l_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, q$ , valables pour chaque  $T$ -module normal  $m$ , et l'équivalence des  $q$  équations  $\rho_\alpha = l_\alpha$  à la maximalité des chaînes (3), la proposition 3 et le théorème 1 entraînent le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soit  $m$  un module normal de  $T$ ,  $T$  semi-primaire,  $1 \in T$ . Le treillis  $V(m)$  des  $T$ -sous-modules de  $m$  est distributif si et seulement si la longueur  $l(m)$  du treillis  $V(m)$  remplit la condition

$$l(m) = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_q.$$

J'attire votre attention sur le fait que la somme des  $\rho_\alpha$  dépend seulement de l'anneau  $T$  des opérateurs, mais non du module  $m$ , et que le nombre  $l(m)$  a une signification très simple dans la théorie des treillis.

3. N. JACOBSON a donné une définition des anneaux primitifs : l'anneau  $T$  est primitif, s'il existe un  $T$ -module normal et irréductible. (Voir par exemple [2], définition 2, p. 4). On peut décrire ces anneaux comme les anneaux denses des applications linéaires d'un module sur un corps  $K$ . Si la condition minimale pour les idéaux à droites dans  $T$  est remplie, on peut exprimer cela en disant :  $T$  est isomorphe à l'anneau des matrices carrées sur  $K$ . Les anneaux admettant une représentation normale dans un module dont le treillis des sous-modules est distributif, sont une généralisation des anneaux primitifs ; en effet, un module irréductible n'a que zéro et lui-même comme sous-modules.

Existe-t-il pour ces anneaux une description analogue à la représentation ci-dessus des anneaux primitifs ?

Soit  $T$  une algèbre de rang fini  $n$  sur le corps commutatif  $K$ . En premier lieu je suppose que  $T$  soit primaire et que  $K$  soit le corps de décomposition pour l'anneau quotient  $\bar{T} = T/W(T)$ , c'est-à-dire que  $\bar{T}$  est isomorphe à l'anneau  $K_{n \times n}$  des matrices carrées sur  $K$ . Soit  $m$  un module normal par rapport à  $T$  et supposons le treillis  $V(m)$  distributif.

$T$  étant primaire et  $V(m)$  étant distributif, la chaîne de Loewy

$$m = mW^0 \supset mW^1 \supset \dots \supset mW^p = 0$$

est maximale (proposition 2). Utilisant les désignations  $m_k = mW^k$  et  $\bar{m}_k = m_k/m_{k+1}$ ,

chaque élément  $\alpha$  de  $W(T)$  induit une application  $A$ , linéaire par rapport à  $K$ , du module quotient  $\bar{m}_k$  sur  $\bar{m}_{k+1}$ . Ces applications  $A$  forment le groupe additif  $L(\bar{m}_k, \bar{m}_{k+1}, W(T))$ . Parce que le radical  $W(T)$  est un idéal bilatère de  $T$ , le groupe  $L$  vérifie la relation  $\bar{T}.L.\bar{T} \subseteq L$ , dont on peut tirer la conséquence que  $L$  est le groupe dense des applications  $K$ -linéaires de  $\bar{m}_k$  sur  $\bar{m}_{k+1}$ , puisque  $\bar{T}$  est simple et les  $\bar{m}_k$  sont des  $\bar{T}$ -modules irréductibles ayant le corps  $K$  comme centralisateur. (Voir par exemple [2], théorème 1, p. 31). D'une façon plus précise soient  $n = \text{rang}_K \bar{m}_k$ , et  $k_0$  un nombre compris entre 0 et  $\rho - 1$ , soient donnés  $n$  éléments  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  de  $\bar{m}_{k_0}$ , linéairement indépendants par rapport à  $K$ , et  $n$  éléments  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$  de  $\bar{m}_{k_0+1}$ ; il existe alors un élément  $\alpha$  de l'anneau  $T$  ayant les propriétés suivantes :

$$(7) \quad \begin{cases} m_k \alpha \subseteq m_{k+1} & \text{pour } k = 0, 1, \dots, \rho - 1, \\ \bar{x}_i \alpha = \bar{y}_i & \text{pour } i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Dans les dernières formules, j'ai désigné par  $\alpha$  l'élément  $A$  de  $L$ , qui est induit par  $\alpha$ . Il est clair que l'itération  $d$  fois de ce procédé donne l'existence d'un élément  $\hat{\alpha}$  de  $T$  vérifiant

$$(8) \quad \begin{cases} m_k \hat{\alpha} \subseteq m_{k+d} & \text{pour } k = 0, 1, \dots, \rho - d, \\ \bar{x}_i \hat{\alpha} = \bar{y}_i & \text{pour } i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

en quoi  $k_0$  est un nombre entre 0 et  $\rho - d - 1$ . De nouveau la lettre  $\hat{\alpha}$  désigne un élément de  $T$  et simultanément l'élément de  $L(\bar{m}_k, \bar{m}_{k+d}, W(T)^d)$ , qui est induit par  $\hat{\alpha}$  dans ce groupe  $L$ . Parce que  $\bar{m}_k$  est un  $\bar{T}$ -module irréductible, les formules (8) sont remplies aussi pour  $d \neq 0$ . L'inverse de ce résultat est démontrable sans difficulté. Nous avons la

PROPOSITION 4. - Soit  $T$  une algèbre sur le corps commutatif  $K$ , soit  $\bar{T} = T/W(T) \cong K_{n \times n}$ .  $T$  admet un  $T$ -module  $m$  normal et unitaire, ayant son treillis  $V(m)$  distributif, si et seulement si  $T$  est représentable par un anneau d'applications  $K$ -linéaires, où existe un élément  $\hat{\alpha}$  remplissant les conditions (8), pour chaque choix du nombre  $d$  entre 0 et  $\rho - 1$ , du nombre  $k_0$  entre 0 et  $\rho - d - 1$ , des  $n$  éléments  $\bar{x}_i$ ,  $K$ -linéairement indépendants dans  $\bar{m}_{k_0}$ , et des éléments  $\bar{y}_i$  dans  $\bar{m}_{k_0+d}$ .

Si l'algèbre  $T$  sur le corps  $K$  n'est pas primaire et si le corps  $K$  est le corps de décomposition pour les termes  $\bar{T}_\alpha$  dans la somme  $\bar{T} = \bar{T}_1 + \dots + \bar{T}_q$

on peut réduire ce cas à la proposition 4. De nouveau, il faut remplacer la chaîne (1) par les chaînes (3) pour les divers  $\alpha$  et appliquer la proposition 4. Comme dans la démonstration de la proposition 3, il est meilleur d'utiliser, au lieu de la chaîne (3), la sous-chaîne  $C^{(\alpha)}$  de la chaîne des modules quotients de (4), qui est constituée par les modules  $\bar{n}_{i_k}$ , qui sont  $T$ -isomorphes entre eux,  $k = 1, 2, \dots, l_\alpha$ .

Alors nous pouvons dire :

THÉOREME 3. - Soit  $T$  une algèbre de rang fini sur le corps commutatif  $K$ . Dans l'équation  $\bar{T} = T/W(T) = \bar{T}_1 \oplus \dots \oplus \bar{T}_q$ , supposons chaque  $\bar{T}_\alpha \simeq K_{n \times n}$ .

Alors  $T$  admet un module  $n$  normal et unitaire, ayant son treillis  $V(m)$  distributif, si et seulement si  $T$  est représentable par un anneau d'applications  $K$ -linéaires, qui est "suffisamment dense" dans le sens suivant : pour chaque chaîne

$$C^{(\alpha)} = \{ \bar{n}_{i_k} \}, \quad k = 1, 2, \dots, l_\alpha,$$

de ces modules quotients  $\bar{n}_{i_k}$  de la chaîne (4), qui sont  $T$ -isomorphes entre eux, les conditions de la proposition 4 sont vérifiables par un élément convenable de l'anneau. Il y a lieu de remplacer le nombre  $\rho$  par les nombres  $\rho_\alpha$  et les modules  $\bar{n}_k$  et  $\bar{n}_{k+d}$  par les modules  $\bar{n}_{i_k}$  et  $\bar{n}_{i_{k+d}}$  de la chaîne  $C^{(\alpha)}$ .

Si l'algèbre  $T$  est simple ( $q = \rho_1 = 1$ ), on retrouve dans le théorème 3 la représentation bien connue des algèbres simples, ayant un corps de décomposition comme corps de base.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEHRENS (Ernest-August). - Eine Charakterisierung der  $T$ -moduln mit distributiven Untermulverband bei halbprimären  $T$ , Archiv Math., t. 8, 1957, p. 265-273.
- [2] JACOBSON (Nathan). - Structure of rings. - Providence, American mathematical Society, 1956 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., n° 37).