Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Paul Jaffard

Dimension des anneaux de polynômes, II

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, nº 2 (1957-1958), exp. nº 25, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_2_A10_0>

Séminaire P. DUBREIL
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1957/58

-:-:-:-

19 mai 1958

DIMENSION DES ANNEAUX DE POLYNÔMES, II.

par Paul JAFFARD

Cet exposé fait suite à l'exposé n° 22.

4. Une égalité fondamentale.

Pour étudier la dimension de l'anneau de polynômes $A^{(N)}$, on est amené à étudier la longueur maximale des chaînes d'idéaux premiers ayant pour extrémités $\mathfrak{q}A^{(N)}$ et $\mathfrak{p}A^{(N)}$, $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p}$ désignant deux idéaux premiers de A tels que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$.

Nous ne nous préoccuperons que des chaînes de la forme :

(6) $$\tilde{\mathfrak{P}}_0 \subset \tilde{\mathfrak{P}}_1 \subset \dots \subset \tilde{\mathfrak{P}}_s$$

telles que :

$$\tilde{\mathfrak{P}}_i \cap A = \mathfrak{q} \quad (0 \leq i \leq s-1) \qquad \text{et} \quad \tilde{\mathfrak{P}}_s = \mathfrak{p}A^{(N)}$$

Nous noterons $\lambda(\mathfrak{q}A^{(N)}, \mathfrak{p}A^{(N)})$ la borne supérieure des longueurs de ces chaînes particulières (notons que, quoique tous les idéaux intervenant dans ces chaînes reposent sur $\mathfrak{q}$, sauf le dernier qui repose sur $\mathfrak{p}$, l'idéal $\mathfrak{p}$ n'est pas nécessairement un sur-idéal premier immédiat de $\mathfrak{q}$). Enfin, nous introduirons un nouveau symbole $\delta_v(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ qui aura la signification suivante : c'est la borne supérieure des nombres d tels que la spécialisation canonique $A/\mathfrak{q} \longrightarrow A/\mathfrak{p}$ puisse se prolonger en une spécialisation du corps des fractions de $A/\mathfrak{q}$ sur une extension de degré de transcendance d du corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$.

THÉORÈME 9. - On a l'égalité :

(7) $$\lambda(\mathfrak{q}A^{(N)}, \mathfrak{p}A^{(N)}) = 1 + \inf(N, \delta_v(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}))$$

Remarquons d'abord que l'on peut passer au quotient (dans $A^{(N)}$) par $\mathfrak{q}A^{(N)}$, (dans A par $\mathfrak{q}$) et par suite, pour simplifier l'écriture, on peut supposer

A intégre et $\mathfrak{q} = (0)$. Tous les idéaux de la chaîne (6) reposant, sauf le dernier, sur (0), le théorème 1 montre que :

$$\lambda((0), \mathfrak{p}A^{(N)}) \leq 1 + N .$$

Montrons maintenant :

$$\lambda((0), \mathfrak{p}A^{(N)}) \leq 1 + \delta_v((0), \mathfrak{p}) .$$

Soit $s = \lambda((0), \mathfrak{p}A^{(N)})$. Par définition, il existe une chaîne :

$$\mathfrak{P}_0 = (0) \subset \mathfrak{P}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{P}_s$$

telle que $\mathfrak{P}_i \cap A = (0) \quad (0 \leq i \leq s-1)$ et $\mathfrak{P}_s = \mathfrak{p}A^{(N)}$.

Considérons la suite des homomorphismes canoniques :

$$(8) \qquad A^{(N)} \longrightarrow A^{(N)}/\mathfrak{P}_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow A^{(N)}/\mathfrak{P}_{s-1} \longrightarrow A^{(N)}/\mathfrak{P}_s .$$

Les $s-1$ premiers homomorphismes laissent invariants les éléments de A et le dernier induit sur A l'homomorphisme $A \longrightarrow A/\mathfrak{p}$. Désignons par Ω_i la fermeture algébrique du corps des fractions de $A^{(N)}/\mathfrak{P}_i$. En appliquant plusieurs fois le théorème du prolongement des spécialisations [1] , on voit que la suite (8) peut se prolonger en une suite de spécialisations (faisant intervenir évidemment des corps projectifs)

$$(8') \qquad \Omega_0 \longrightarrow \Omega_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \Omega_s .$$

En effet, $A^{(N)}/\mathfrak{P}_{s-1} \longrightarrow A^{(N)}/\mathfrak{P}_s$ peut se prolonger en $\Omega_{s-1} \longrightarrow \Omega_s$, et $A^{(N)}/\mathfrak{P}_{s-2} \longrightarrow A^{(N)}/\mathfrak{P}_{s-1}$ qui s'écrit $A^{(N)}/\mathfrak{P}_{s-2} \longrightarrow \Omega_{s-1}$ peut se prolonger en $\Omega_{s-2} \longrightarrow \Omega_{s-1}$, et ainsi de suite ...

Si L est le corps des fractions de $A^{(N)}$, on en déduit une suite de spécialisations :

$$L = L_0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow L_{s-1} \longrightarrow L_s$$

(L_i étant un sous-corps de Ω_i).

---

[1] qui peut s'énoncer ainsi :

A étant un sous-anneau d'un anneau B , toute spécialisation de A dans un corps projectif k_∞ peut se prolonger en une spécialisation de B dans le corps projectif Ω_∞ , Ω désignant la fermeture algébrique du corps k .
(cf. WEIL A. . - Foundations of algebraic geometry. - New York, American mathematical Society, 1946 (Amer. math. Soc. Coll. Publ. n° 29)).

Désignons par K le corps des fractions de A. La spécialisation $L_i \longrightarrow L_{i+1}$ induit la spécialisation triviale $A \longrightarrow A$ si $i < s-1$, donc elle induit encore sur K la spécialisation triviale $K \longrightarrow K$ (On voit en effet immédiatement qu'une spécialisation triviale sur un anneau intègre A est encore triviale sur son corps des fractions K : si $x \in K$ est tel que $x \longrightarrow 0$, et si $x = a/b$ $(a, b \in A)$, ceci entraîne $a \longrightarrow 0$, donc, si $x \neq 0$, la spécialisation ne peut être triviale sur A).

Enfin $L_{s-1} \longrightarrow L_s$ spécialise K sur un sur-corps K' du corps des fractions k de $A/\mathfrak{P}$.

Désignons par :

n'	le rang	de la	spécialisation	$L \longrightarrow L_{s-1}$
m'	"	"	"	induite $K \longrightarrow K$,
n''	"	"	"	$L_{s-1} \longrightarrow L_s$
m''	"	"	"	induite $K \longrightarrow K'$.

L'inégalité (4) permet d'écrire :

$$d.t. [L_{s-1} : K] \leqslant d.t. [L : K] - (n' - m') .$$

Mais $d.t. [L : K] = N$ (d'après la définition de $A^{(N)}$), $n' \geqslant s-1$ (puisqu'aucune des spécialisations $L_i \longrightarrow L_{i+1}$ n'est triviale en vertu de $\mathfrak{P}_i \neq \mathfrak{P}_{i+1}$) et $m' = 0$. Par suite on a :

(9) $$d.t. [L_{s-1} : K] \leqslant N - s + 1 .$$

L'inégalité (4) permet d'écrire également :

$$d.t. [L_s : K'] \leqslant d.t. [L_{s-1} : K] - (n'' - m'') .$$

Mais on peut écrire :

$$d.t. [L_s : K'] = d.t. [L_s : k] - d.t. [K' : k]$$

d'où :

$$d.t. [L_s : k] - d.t. [K' : k] \leqslant d.t. [L_{s-1} : K] - (n'' - m'') .$$

C'est-à-dire :

(10) $$d.t. [K' : k] \geqslant d.t. [L_s : k] - d.t. [L_{s-1} : K] + (n'' - m'') .$$

Mais L_s contient l'anneau $A^{(N)}/\mathfrak{P}_s = A^{(N)}/\mathfrak{P}A^{(N)}$ qui est isomorphe à l'anneau de polynômes $(A/\mathfrak{P})^{(N)}$. Par suite $d.t. [L_s : k] \geqslant N$. En remarquant également que $n'' - m'' \geqslant 0$ et en tenant compte de l'inégalité (9), on voit que (10) entraîne :

(11) $$d.t.\,[K' : k] \geqslant N - N + s - 1 = s - 1$$

donc $$s \leqslant 1 + d.t.\,[K' : k]\,.$$

Mais, par définition :

$$d.t.\,[K' : k] \leqslant \delta_v((0)\,,\mathfrak{p})$$

d'où l'inégalité :

$$\lambda((0)\,,\mathfrak{p}A^{(N)}) \leqslant 1 + \delta_v((0)\,,\mathfrak{p})\,.$$

Nous avons donc démontré l'inégalité :

$$\lambda((0)\,,\mathfrak{p}A^{(N)}) \leqslant 1 + \inf (N\,,\,\delta_v((0)\,,\mathfrak{p}))\,.$$

Soit maintenant

$$M = \inf (N\,,\,\delta_v((0)\,,\mathfrak{p}))\,.$$

Désignons encore par K le corps des fractions de A et par k celui de $A/\mathfrak{p}$. Puisque $M \leqslant \delta_v((0)\,,\mathfrak{p})$, on peut trouver une spécialisation $\varphi : K \longrightarrow K'$ de K sur un sur-corps K' de k tel que $d.t.\,[K' : k] = M$ prolongeant l'homomorphisme canonique $A \longrightarrow A/\mathfrak{p}$.

Soient $x'_1\,,\,\dots\,,\,x'_M$ des éléments de K' algébriquement indépendants sur k et soient $x_1\,,\,\dots\,,\,x_M$ des éléments de K tels que $\varphi(x_i) = x'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant M)$. Soit $A^{(M)} = A\,[X_1\,,\,\dots\,,\,X_M]$. Considérons la suite d'homomorphismes

$$A\,[X_1\,,\,\dots\,,\,X_M] \longrightarrow A\,[x_1\,,\,X_2\,,\,\dots\,,\,X_M] \longrightarrow \dots \longrightarrow A\,[x_1\,,\,x_2\,,\,\dots\,,\,x_M]\,.$$

Aucun de ces homomorphismes n'est trivial, car si on désigne par A_i le sous-anneau de K engendré par A et $x_1\,,\,\dots\,,\,x_i$ $(A_0 = A)$, on voit que le i-ième homomorphisme spécialise $A_{i-1}\,[X_i\,,\,X_{i+1}\,,\,\dots\,,\,X_M]$ sur $A_i\,[X_{i+1}\,,\,\dots\,,\,X_M]$ et si $x_i = a_i/b_i$ $(a_i\,,\,b_i \in A)$, l'élément non nul $b_i X_i - a_i$ de $A_i\,[X_{i+1}\,,\,\dots\,,\,X_M]$ a pour image 0 dans cet homomorphisme. Enfin φ induit sur $A\,[x_1\,,\,\dots\,,\,x_M]$ l'homomorphisme :

$$A\,[x_1\,,\,\dots\,,\,x_M] \longrightarrow A/\mathfrak{p}\,[x'_1\,,\,\dots\,,\,x'_M] \cong A/\mathfrak{p}\,[X_1\,,\,\dots\,,\,X_M]\,.$$

(Il n'est pas trivial car $\mathfrak{p} \neq (0)$).

Soit la suite des homomorphismes :

$$A[X_1,\dots,X_M] \longrightarrow A[x_1,X_2,\dots,X_M] \longrightarrow \dots \longrightarrow A[x_1,x_2,\dots,x_m] \longrightarrow A/\mathfrak{p}[X_1,\dots,X_M] .$$

Dans l'anneau $A^{(M)}$ on considère la chaîne d'idéaux premiers ;

$$\mathfrak{Q}_0 = (0) \subset \mathfrak{Q}_1 \subset \mathfrak{Q}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{Q}_M \subset \mathfrak{Q}_{M+1} = \mathfrak{p} A^{(M)}$$

où $\mathfrak{Q}_i$ est le noyau de $A[X_1, \dots, X_M] \to A[x_1, \dots, x_i, X_{i+1}, \dots, X_M]$.
On a d'autre part $\mathfrak{Q}_i \cap A = (0)$ si $i < M$.

Comme $M \leq N$, on a dans l'anneau $A^{(N)} = (A^{(M)})^{(N-M)}$ la suite d'idéaux :

$$\mathfrak{P}_0 = (0) \subset \mathfrak{P}_1 \subset \mathfrak{P}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{P}_M \subset \mathfrak{P}_{M+1} = \mathfrak{p} A^{(N)}$$

définie par $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{Q}_i A^{(N)}$.

Comme $\mathfrak{P}_i \cap A = (0)$ $(0 \leq i \leq N)$ on en déduit l'inégalité :

$$M + 1 \leq \lambda((0), \mathfrak{p} A^{(N)}) .$$

Le théorème 9 est donc complètement démontré.

5. Application aux anneaux de dimension valuative finie.

Soit A un anneau de dimension valuative finie égale à s et soit une chaîne maximale de valuations de A :

(12) $$v_0 < v_1 < \dots < v_s .$$

Si on désigne par $\mathfrak{q}_i$ le centre de v_i sur A, on a les inclusions :

(13) $$\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{q}_s .$$

Dans la chaîne (12) ne gardons que les valuations v_i telles que $\mathfrak{q}_{i-1} \neq \mathfrak{q}_i$.
On en déduit une nouvelle chaîne :

(12') $$w_0 < w_1 < \dots < w_m$$

dont les centres forment maintenant une chaîne sans répétition :

(13') $$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_m .$$

La valuation w_i définit une spécialisation ψ_i du corps des fractions K de A sur un corps K_i (ψ_i induit sur A l'homomorphisme $A \longrightarrow A/\mathfrak{p}_i$).
Comme w_i est plus fine que w_{i-1}, on voit que ψ_i est le produit de ψ_{i-1} par une spécialisation $\varphi_i : K_{i-1} \longrightarrow K_i$.

Comme la chaîne (12) est maximale, $v_0 = w_0$ est la valuation nulle, donc

$\mathfrak{p}_0 = (0)$ et φ_0 est l'application identique de K sur lui-même $(K = K_0)$. Désignons par r_i le rang de la spécialisation φ_i (c'est la différence : rang de w_i moins rang de w_{i-1}).

Désignons par k_i le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}_i$ et par k_i' le corps image de k_{i-1} par la spécialisation φ_i (On a $A/\mathfrak{p}_i \subset k_i \subset k_i' \subset K_i$). On notera d_i le degré de transcendance d.t. $[k_i' : k_i]$ et on posera :

$$d = d_1 + \dots + d_n .$$

La spécialisation $\varphi_i : \ K_{i-1} \longrightarrow K_i$ est le produit d'une certaine spécialisation de rang 1 (d'un corps K_{i-1}') par une spécialisation de rang $r_i - 1$ de K_{i-1} sur K_{i-1}' (d'une manière plus précise, si $w_i = v_{\alpha_i}$, K_{i-1}' est l'image de K par la spécialisation définie par $v_{\alpha_i - 1}$).

La spécialisation $K_{i-1} \longrightarrow K_{i-1}'$ laisse invariant le sous-anneau $A/\mathfrak{p}_{i-1}$ de K_{i-1}, donc également son corps de fraction k_{i-1}

$$\begin{array}{ccccc}
K_{i-1} & \longrightarrow & K_{i-1}' & \longrightarrow & K_i \\
| & & | & & | \\
k_{i-1} & \longrightarrow & k_{i-1} & \longrightarrow & k_i' \\
| & & | & & | \\
| & & | & & k_i \\
| & & | & & | \\
A/\mathfrak{p}_{i-1} & \longrightarrow & A/\mathfrak{p}_{i-1} & \longrightarrow & A/\mathfrak{p}_i
\end{array} .$$

La spécialisation $K_{i-1} \longrightarrow K_{i-1}'$ étant de rang $r_i - 1$, le théorème 4 montre que :

$$r_i - 1 + \text{d.t. } [K_{i-1}' : k_{i-1}] \leqslant \text{d.t. } [K_{i-1} : k_{i-1}] .$$

La corollaire du théorème 4, appliqué à $K_{i-1}' \longrightarrow K_i$, montre que :

$$\text{d.t. } [K_i : k_i'] \leqslant \text{d.t. } [K_{i-1}' : k_{i-1}] .$$

D'où, en tenant compte de ces deux inégalités :

$$r_i - 1 + \text{d.t. } [K_i : k_i'] \leqslant \text{d.t. } [K_{i-1} : k_{i-1}] .$$

Soit, en tenant compte de :

$$\text{d.t. } [K_i : k_i'] = \text{d.t. } [K_i : k_i] - \text{d.t. } [k_i' : k_i]$$

$$r_i - 1 \leqslant \text{d.t. } [K_{i-1} : k_{i-1}] + \text{d.t. } [k_i' : k_i] - \text{d.t. } [K_i : k_i]$$

ou

(14) $$r_i - 1 \leqslant \text{d.t. } [K_{i-1} : k_{i-1}] - \text{d.t. } [K_i : k_i] + d_i .$$

Les inégalités (14) sont valables pour $1 \leq i \leq m$.

Si nous les additionnons, ceci donne :

(15) $$\sum_{1 \leq i \leq m} r_i - m \leq \text{d.t.}\,[K_0 : k_0] - \text{d.t.}\,[K_m : k_m] + d \,.$$

Comme $\mathfrak{p}_0 = (0)$, on a $A/\mathfrak{p}_0 = A$ et $k_0 = K_0 = K$. Donc $\text{d.t.}\,[K_0 : k_0] = 0$. Posons $r' = \text{d.t.}\,[K_m : k_m]$ et supposons que $w_m = v_{s-h}$. La valuation v_s est la composée de la valuation w_m et d'une valuation de rang h . Par suite, elle définit une spécialisation produit de ψ_m par une spécialisation ψ' de rang h . Cette dernière laisse k_m invariant (puisque v_s et v_{s-h} ont même centre $\mathfrak{p}_m$ sur A). On a donc (corollaire 1 du théorème 3) :

$$h \leq \text{d.t.}\,[K_m : k_m] \,.$$

L'inégalité (15) permet donc d'écrire :

$$\sum_{1 \leq i \leq m} r_i - m \leq d - h \,.$$

Il résulte immédiatement des définitions que $s = \sum_{1 \leq i \leq m} r_i + h$.
On en conclut donc :

(15') $$s = \dim_v A \leq d + m \,.$$

Mais les définitions de d_i et de $\delta_v(\mathfrak{p}_{i-1} , \mathfrak{p}_i)$ montrent que

$$d_i \leq \delta_v(\mathfrak{p}_{i-1} , \mathfrak{p}_i)$$

et par suite :

(16) $$\dim_v A \leq \sum_{1 \leq i \leq m} (1 + \delta_v(\mathfrak{p}_{i-1} , \mathfrak{p}_i)) \,.$$

Choisissons un nombre N tel que :

$$N \geq \sup_{1 \leq i \leq m} \delta_v(\mathfrak{p}_{i-1} , \mathfrak{p}_i) \,.$$

Il suffit d'ailleurs pour cela que $N \geq \dim_v A$: en effet, si

$$\delta = \delta_v(\mathfrak{p}_{i-1} , \mathfrak{p}_i) \,,$$

il existe par définition une spécialisation de k_{i-1} sur un sur-corps k''_i de k_i tel que $\delta = \text{d.t.}\,[k''_i : k_i]$, prolongeant l'homomorphisme $A/\mathfrak{p}_{i-1} \longrightarrow A/\mathfrak{p}_i$. On peut alors construire une spécialisation de rang δ de k''_i qui laisse k_i invariant et, par le théorème des prolongements des spécialisations, on en déduit une spécialisation de rang δ de K restant finie sur A . Donc $\delta \leq \dim_v A$.

Ceci posé, le théorème 7 montre alors que :

$$\lambda(\mathfrak{p}_{i-1} A^{(N)}, \mathfrak{p}_i A^{(N)}) = 1 + \delta_v(\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i) .$$

Il existe donc une chaîne d'idéaux premiers de $A^{(N)}$, soit

$$(0) = \tilde{\mathfrak{P}}_0 \subset \tilde{\mathfrak{P}}_1 \subset \dots \subset \tilde{\mathfrak{P}}_{s'} = \mathfrak{p}_m A^{(N)}$$

de longueur $s' = \sum_{1 \leq i \leq m} (1 + \delta_v(\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i))$.

Si $A^{(N)} = A[X_1, \dots, X_N]$ on peut considérer la chaîne d'idéaux premiers de longueur N :

$$\mathfrak{p}_m A^{(N)} \subset (\mathfrak{p}_m A^{(N)}, X_1) \subset (\mathfrak{p}_m A^{(N)}, X_1, X_2) \subset \dots \subset (\mathfrak{p}_m A^{(N)}, X_1, X_2, \dots, X_N) .$$

On en déduit donc l'existence dans $A^{(N)}$ d'une chaîne de longueur

$$s' + N \geqslant s + N = N + \dim_v A .$$

Le théorème 8 montrant que $\dim A^{(N)} \leq N + \dim_v A$, on a donc :

$$\dim A^{(N)} = \dim_v A^{(N)} = N + \dim_v A ,$$

ceci implique en outre $s' = s$, c'est-à-dire que l'inégalité (16) est en fait une égalité.

On peut donc énoncer le :

THÉORÈME 10. - A <u>étant un anneau intègre de dimension valuative finie, pour tout</u> $n \geqslant \dim_v A$, <u>on a</u> :

$$\dim A^{(n)} = \dim_v A^{(n)} = n + \dim_v A .$$

6. Chaînes spéciales.

Dans l'anneau de polynômes $A^{(N)}$ appelons <u>chaîne spéciale</u> toute chaîne d'idéaux premiers (sans répétition) de la forme :

(17) $$\tilde{\mathfrak{P}}_0 \subset \tilde{\mathfrak{P}}_1 \subset \dots \subset \tilde{\mathfrak{P}}_n$$

remplissant les conditions suivantes :

Si $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{P}}_i \cap A$, il existe un entier $j \leq i$ tel que $\tilde{\mathfrak{P}}_j = \mathfrak{p} A^{(N)}$. Le théorème 9 permet d'évaluer à partir de A la longueur maximale des chaînes spéciales de $A^{(N)}$. Il permettra donc d'évaluer la dimension de $A^{(N)}$ si nous sommes certains de l'existence d'une chaîne spéciale de $A^{(N)}$ de longueur $\dim A^{(N)}$.

C'est cette existence qui fait l'objet du théorème suivant :

THÉORÈME 11. - Il existe dans l'anneau $A^{(N)}$ une chaîne spéciale dont la longueur est égale à la dimension de $A^{(N)}$.

Montrons d'abord le :

LEMME 1. - Soit un idéal premier $\mathfrak{P}$ de $A^{(N)}$ tel que $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$, désignons par k le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$ et par K le corps des fractions de $A^{(N)}/\mathfrak{P}$. La longueur maximale des chaînes d'idéaux premiers de $A^{(N)}$ joignant $\mathfrak{p} A^{(N)}$ à $\mathfrak{P}$ est égale à $n - \text{d.t.} [K : k]$.

On peut, en passant au quotient par $\mathfrak{p} A^{(N)}$, supposer $\mathfrak{p} = 0$. Comme $\mathfrak{P} \cap A$ est alors égal à (0) , le raisonnement employé dans la démonstration du théoréme 1 montre que l'ensemble $\mathfrak{J}$ des idéaux premiers de $A^{(N)}$ contenus dans $\mathfrak{P}$ correspond biunivoquement (avec conservation de l'inclusion) à l'ensemble $\mathfrak{J}'$ des idéaux de $k^{(N)}$ contenus dans $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} k^{(N)}$ ($A^{(N)}$ est un sous-anneau de $k^{(N)}$). Cette longueur maximale est donc égale (d'après le théorème 2) à $n - \text{d.t.} [L : k]$ si L désigne le corps des fractions de l'anneau $k^{(N)}/\mathfrak{P}'$.

Or, $k^{(N)}$ étant l'anneau des fractions de $A^{(N)}$ relativement à l'ensemble multiplicativement clos $A^* = A - \{0\}$ et $\mathfrak{P}'$ étant l'idéal premier correspondant à $\mathfrak{P}$, le corps L s'identifie au corps des fractions de $A^{(N)}/\mathfrak{P}$ (2), c'est-à-dire à K . D'où le lemme.

---

(2) On a en effet le résultat suivant :
Soient $\mathfrak{q}$ un idéal premier d'un anneau B et S un sous-ensemble multiplicativement clos de B tel que $S \cap \mathfrak{q} = \emptyset$. Le corps des fractions de l'anneau $A_S/\mathfrak{q}_S$ s'identifie canoniquement au corps des fractions de $A/\mathfrak{q}$.

On a $A \subset A_S$ et $\mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{q}_S$. Donc $A/\mathfrak{q}$ est un sous-anneau de $A_S/\mathfrak{q}_S$ et le corps des fractions F de $A/\mathfrak{q}$ est un sous-corps du corps des fractions G de $A_S/\mathfrak{q}_S$. Soit $\bar{x}/\bar{y} \in G$ ($\bar{x}$ et $\bar{y}$ désignent les classes dans $A_S/\mathfrak{q}_S$ des éléments x et y de A_S). On peut écrire $x = a/s$, $y = b/s$ (a , $b \in A$ et $s \in S$). Je dis que l'on a dans G : $\bar{a}/\bar{b} = \bar{x}/\bar{y}$:

Il suffit de vérifier $\bar{b}\,\bar{x} = \bar{a}\,\bar{y}$, ce qui résulte immédiatement des égalités

$$\bar{b}\,\bar{x} = \overline{\left(\frac{ab}{s}\right)} = \bar{a}\,\bar{y} .$$

Mais $\bar{a}$ et $\bar{b}$ s'identifient à des éléments de $A/\mathfrak{q}$, donc $\bar{a}/\bar{b}$ est un élément de F , d'où $F = G$.

Montrons maintenant le :

LEMME 2. – Soit dans $A^{(N)}$ une chaîne de la forme :

$$\tilde{\mathfrak{P}}_0 \subset \tilde{\mathfrak{P}}_1 \subset \ldots \subset \tilde{\mathfrak{P}}_s$$

telle que

$$\tilde{\mathfrak{P}}_i \cap A = \mathfrak{q} \quad \text{si} \quad 0 \leq i \leq s-1$$
$$\tilde{\mathfrak{P}}_s \cap A = \mathfrak{p}$$
$$\tilde{\mathfrak{P}}_0 = \mathfrak{q} A^{(N)}$$

il existe dans $A^{(N)}$ une chaîne de longueur supérieure ou égale à s, commençant à $\tilde{\mathfrak{P}}_0$, finissant à $\tilde{\mathfrak{P}}_s$, dont tous les termes reposent sur $\mathfrak{q}$ ou $\mathfrak{p}$ et passant par l'idéal $\mathfrak{p} A^{(N)}$.

Remarquons d'abord que, les idéaux $\tilde{\mathfrak{P}}_0, \ldots, \tilde{\mathfrak{P}}_{s-1}$ reposant sur $\mathfrak{q}$, le théorème 1 entraîne :

(18) $$s \leq N + 1 .$$

Enfin on peut toujours supposer, en ajoutant s'il le faut le terme $\mathfrak{q} A^{(N)}$ au début de $\tilde{\mathfrak{P}}_0 \subset \tilde{\mathfrak{P}}_1 \subset \ldots \subset \tilde{\mathfrak{P}}_s$, que $\tilde{\mathfrak{P}}_0 = \mathfrak{q} A^{(N)}$.

Considérons la suite des homomorphismes :

$$A^{(N)}/\tilde{\mathfrak{P}}_0 \longrightarrow A^{(N)}/\tilde{\mathfrak{P}}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^{(N)}/\tilde{\mathfrak{P}}_{s-1} \longrightarrow A^{(N)}/\tilde{\mathfrak{P}}_s .$$

Elle peut se prolonger en une suite de spécialisations :

$$\tilde{\mathfrak{K}}_0 \longrightarrow \tilde{\mathfrak{K}}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \tilde{\mathfrak{K}}_{s-1} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{K}}_s$$

où $\tilde{\mathfrak{K}}_i$ est un corps extension algébrique du corps des fractions de $A^{(N)}/\tilde{\mathfrak{P}}_i$ (procédé utilisé dans la démonstration du théorème 9). Ces spécialisations induisent sur $A/\mathfrak{q}$ la suite de spécialisations :

$$A/\mathfrak{q} \longrightarrow A/\mathfrak{q} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A/\mathfrak{q} \longrightarrow A/\mathfrak{p} .$$

Désignons par k_0 le corps des fractions de $A/\mathfrak{q}$, par k_s le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$ et par k'_s le corps image de k_0 dans la spécialisation

$$\tilde{\mathfrak{K}}_{s-1} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{K}}_s ,$$

ou, ce qui revient au même, $\tilde{\mathfrak{K}}_0 \longrightarrow \tilde{\mathfrak{K}}_s$.

D'autre part, désignons par :

n' le rang de la spécialisation $\tilde{\mathfrak{K}}_0 \longrightarrow \tilde{\mathfrak{K}}_{s-1}$

n'' le rang de la spécialisation $\mathfrak{K}_{s-1} \to \mathfrak{K}_s$

m' " " " induite sur k_0 par $\mathfrak{K}_0 \to \mathfrak{K}_{s-1}$ $(m' = 0)$

m'' " " " " " $\mathfrak{K}_{s-1} \to \mathfrak{K}_s$.

Le théorème 4 permet d'écrire les deux inégalités :

(19) $$\text{d.t. } [\mathfrak{K}_{s-1} : k_0] \leq \text{d.t. } [\mathfrak{K}_0 : k_0] - (n' - m')$$

(20) $$\text{d.t. } [\mathfrak{K}_s : k'_s] \leq \text{d.t. } [\mathfrak{K}_{s-1} : k_0] - (n'' - m'') .$$

Comme $\tilde{\mathfrak{p}}_0 = \mathfrak{q} A^{(N)}$, l'anneau $A^{(N)}/\tilde{\mathfrak{p}}_0$ est isomorphe à $(A/\mathfrak{q})^{(N)}$ et par suite d.t. $[\mathfrak{K}_0 : k_0] = N$. D'autre part, aucune des spécialisations $\mathfrak{K}_{i-1} \to \mathfrak{K}_i$ n'étant triviale, on a $n' \geq s - 1$. Comme $m' = 0$, l'inégalité (19) permet d'écrire :

$$\text{d.t. } [\mathfrak{K}_{s-1} : k_0] \leq N - s + 1 .$$

D'où, en reportant dans l'inégalité (20) :

$$\text{d.t. } [\mathfrak{K}_s : k'_s] \leq N - s + 1 - (n'' - m'') .$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\text{d.t. } [\mathfrak{K}_s : k_s] - \text{d.t. } [k'_s : k_s] \leq N - s + 1 - (n'' - m'') ,$$

d'où, en tenant compte de l'inégalité $0 \leq n'' - m''$

(21) $$s \leq 1 + \text{d.t. } [k'_s : k_s] + (N - \text{d.t. } [\mathfrak{K}_s : k_s]) .$$

D'après le théorème 9, il existe une chaîne $\mathcal{C}$ commençant à $\tilde{\mathfrak{p}}_0$, finissant à $\mathfrak{p} A^{(N)}$, dont tous les termes, sauf le dernier, reposent sur $\mathfrak{p}$, et de longueur $1 + \inf (N , \delta_v(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}))$. Si $N \leq \delta_v(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$, la chaîne obtenue en ajoutant $\tilde{\mathfrak{p}}_s$ à la fin de $\mathcal{C}$ répond à la question en raison de l'inégalité (18).

Supposons maintenant $\delta_v(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) < N$. La chaîne $\mathcal{C}$ a une longueur $1 + \delta_v(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$, et, par définition, $\delta_v(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ étant supérieur ou égal à d.t. $[k'_s : k_s]$, la chaîne $\mathcal{C}$ a une longueur supérieure ou égale à $1 +$ d.t. $[k'_s : k_s]$.

D'autre part, le lemme 1 appliqué à l'anneau A et à l'idéal $\tilde{\mathfrak{p}}_s$ montre qu'il existe une chaîne $\mathcal{C}'$ commençant à $\mathfrak{p} A^{(N)}$, se terminant à $\tilde{\mathfrak{p}}_s$ et de longueur $N -$ d.t. $[\mathfrak{K}_s : k_s]$.

L'inégalité (21) montre alors que la chaîne formée en joignant les chaînes $\mathcal{C}$

et $\mathcal{C}'$ répond à la question. D'où le lemme.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 11. Il suffit de montrer que si on se donne un chaîne d'idéaux premiers de $A^{(N)}$:

(22) $$\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_s$$

telle que $\mathfrak{P}_0 = (\mathfrak{P}_0 \cap A)\, A^{(N)}$, il existe une chaîne spéciale de longueur au moins égale à s commençant à $\mathfrak{P}_0$ et finissant par $\mathfrak{P}_s$.

Soit :

(23) $$\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{q}_t ,$$

la chaîne des idéaux premiers de A définie par la chaîne (22). Montrons le théorème par récurrence sur t.

Si $t = 0$, la chaîne (22) est une chaîne spéciale et le théorème est dans ce cas trivialement vrai. Supposons le théorème démontré pour $t < n$ et supposons $t = n$. Soit a le plus petit indice x tel que $\mathfrak{P}_x \cap A \neq \mathfrak{q}_0$. Considérons la chaîne :

$$\mathcal{C} : \mathfrak{P}_0 \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_{a-1} \subset \mathfrak{P}_a .$$

D'après le lemme 2, il existe une chaîne de longueur $a' \geq a$:

$$\mathfrak{P}'_0 = \mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}'_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{P}'_{a'} = \mathfrak{P}_a$$

telle que $\mathfrak{q}_1 A^{(N)}$ soit un des idéaux de la chaîne, $\mathfrak{P}'_b$ par exemple. La chaîne :

$$\mathcal{C}' : \mathfrak{P}'_b \subset \mathfrak{P}'_{b+1} \subset \ldots \subset \mathfrak{P}'_{a'} = \mathfrak{P}_a \subset \mathfrak{P}_{a+1} \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_s$$

repose sur la chaîne :

$$\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{q}_t$$

qui est de longueur $t - 1 = n - 1$. D'après les hypothèses de récurrence, il existe une chaîne spéciale $\mathcal{C}''$ de longueur supérieure ou égale à celle de $\mathcal{C}'$, commençant à $\mathfrak{P}'_b$ et finissant à $\mathfrak{P}_s$, soit :

$$\mathcal{C}'' : \mathfrak{P}'_b = \mathfrak{P}''_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{P}''_c = \mathfrak{P}_s .$$

On voit alors que la chaîne spéciale :

$$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}'_0 \subset \mathfrak{P}'_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{P}'_b = \mathfrak{q}_1 A^{(N)} = \mathfrak{P}''_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{P}''_c = \mathfrak{P}_s$$

est de longueur supérieure ou égale à s, ce qui démontre le théorème par récurrence.

7. Comportement asymptotique de la dimension.

Les théorèmes 9 et 11 permettent d'exprimer la dimension de $A^{(N)}$ à partir de caractères intrinsèques de l'anneau A. Tous les résultats que nous énoncerons étant triviaux lorsque $\dim A = \infty$, nous supposerons désormais $\dim A < \infty$.

Indiquons d'abord quelques notations et quelques définitions. Toute chaîne $\mathcal{C}$ de $A^{(N)}$ définit une chaîne (sans répétition) de A sur laquelle elle sera dite reposer.

Si $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{P}$ sont deux idéaux consécutifs d'une chaîne $\mathcal{C}$, on dira que la chaîne $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}$ est un maillon de la chaîne $\mathcal{C}$ (un maillon est toujours de longueur 1). Nous appellerons poids du maillon $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}$ le nombre $\delta_v(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P})$ (un poids peut a **priori être infini**). Nous désignerons par Γ l'ensemble des chaînes de l'anneau A. Si $\mathcal{C} \in \Gamma$ est une chaîne de A et si n est un entier $\geqslant 0$ quelconque, nous désignerons par $\varphi_n(\mathcal{C})$ le nombre des maillons de la chaîne $\mathcal{C}$ dont le poids est supérieur ou égal à n.

Enfin nous désignerons par $\Lambda(\mathcal{C}, n)$ la longueur maximale des chaînes spéciales de $A^{(n)}$ reposant sur la chaîne $\mathcal{C}$ de A. Le théorème 11 permet d'écrire l'égalité :

$$\dim A^{(n)} = \sup_{\mathcal{C} \in \Gamma} \Lambda(\mathcal{C}, n). \tag{24}$$

On a d'autre part le :

THÉORÈME 12. - On a l'égalité :

$$\Lambda(\mathcal{C}, n) = \varphi_0(\mathcal{C}) + \varphi_1(\mathcal{C}) + \dots + \varphi_n(\mathcal{C}) + n. \tag{25}$$

Désignons par $\psi_n(\mathcal{C})$ le nombre des maillons de la chaîne $\mathcal{C}$ dont le poids est égal à n. On a :

$$\psi_n(\mathcal{C}) = \varphi_n(\mathcal{C}) - \varphi_{n+1}(\mathcal{C}) \qquad \text{si } n < \infty$$

$$\psi_\infty(\mathcal{C}) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(\mathcal{C}) \qquad \text{(limite atteinte pour un nombre fini).}$$

On voit immédiatement à partir du théorème 9 que l'on a l'égalité :

$$\Lambda(\mathcal{C}, n) = \psi_0(\mathcal{C}) + 2\psi_1(\mathcal{C}) + \dots + n\psi_{n-1}(\mathcal{C}) + (n+1)\sum_{n \leq i \leq \infty} \psi_i(\mathcal{C}) + n.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\Lambda(\mathcal{C}, n) &= \varphi_0(\mathcal{C}) - \varphi_1(\mathcal{C}) + 2\varphi_1(\mathcal{C}) - 2\varphi_2(\mathcal{C}) + \dots + n\varphi_{n-1}(\mathcal{C}) - n\varphi_n(\mathcal{C}) \\ &\quad + (n+1)\sum_{n \leq i < \infty} (\varphi_i(\mathcal{C}) - \varphi_{i+1}(\mathcal{C})) + \lim_{n \to \infty} \varphi_n(\mathcal{C}) + n \\ &= \varphi_0(\mathcal{C}) + \varphi_1(\mathcal{C}) + \dots + \varphi_{n-1}(\mathcal{C}) + \varphi_n(\mathcal{C}) + n.\end{aligned}$$

D'où l'égalité (25) et le théorème 12.

Les égalités (24) et (25) donnent une expression de la dimension de l'anneau de polynômes $A^{(n)}$ en fonctions de nombres définis intrinsèquement à partir de l'anneau A.

THÉORÈME 13. – Si A est un anneau de dimension finie, il existe un nombre N tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait l'égalité :

$$\dim A^{(n)} = (1 + \pi)\, n + \delta$$

π et δ étant des constantes telles que $0 \leqslant \pi \leqslant \delta$ et $\pi \leqslant \dim A$.

Posons

$$\varphi_n(A) = \sup_{\mathcal{C} \in \Gamma} (\varphi_n(\mathcal{C})) .$$

C'est un nombre fini inférieur ou égal à $\dim A$. L'inégalité $\varphi_n(\mathcal{C}) \geqslant \varphi_{n+1}(\mathcal{C})$ entraîne $\sup_{\mathcal{C} \in \Gamma} (\varphi_n(\mathcal{C})) \geqslant \sup_{\mathcal{C} \in \Gamma} (\varphi_{n+1}(\mathcal{C}))$ et par suite,

$$\varphi_n(A) \geqslant \varphi_{n+1}(A) .$$

Donc $\varphi_n(A)$ tend vers une limite π lorsque n augmente indéfiniment. Cette limite est atteinte pour $n = \nu$.

Donc si $n \geqslant \nu$, toute chaîne $\mathcal{C}$ de A n'a pas plus de π maillons de poids $\geqslant n$ et il y a au moins une chaîne ayant exactement π maillons dont le poids est $\geqslant n$ (3) (Ceci entraîne $\pi \leqslant \dim A$).

n étant un entier $\geqslant \nu$, notons Γ_n l'ensemble des chaînes de A ayant exactement π maillons de poids $\geqslant n$. On a alors :

$$\Gamma_n \neq \emptyset \qquad \Gamma_n \supset \Gamma_{n+1} \qquad (n \geqslant \nu) .$$

Posons

$$d = \sup_{\mathcal{C} \in \Gamma} [\Lambda(\mathcal{C}, n+1) - \Lambda(\mathcal{C}, n)] .$$

L'inégalité

$$\Lambda(\mathcal{C}, n+1) \leqslant \Lambda(\mathcal{C}, n) + d$$

entraîne

$$\sup_{\mathcal{C} \in \Gamma} \Lambda(\mathcal{C}, n+1) \leqslant \sup_{\mathcal{C} \in \Gamma} \Lambda(\mathcal{C}, n) + d .$$

---

(3) π n'est pas nécessairement égal à $\sup_{\mathcal{C} \in \Gamma} (\lim_{n \to \infty} \varphi_n(\mathcal{C}))$: il est possible a priori que quelle que soit la chaîne $\mathcal{C}$, chacun de ses maillons ait un poids fini, mais qu'il existe des chaînes ayant des maillons de poids aussi grand qu'on le veut.

Si on compare à l'inégalité (24) on obtient alors :

(26) $\dim A^{(n+1)} - \dim A^{(n)} \leqslant \sup_{C \in \Gamma} [\Lambda(C, n+1) - \Lambda(C, n)]$ $(\forall n \geqslant 0)$.

Or l'égalité (25) permet d'écrire :

$$\Lambda(C, n+1) - \Lambda(C, n) = 1 + \varphi_{n+1}(C) .$$

Comme $n \geqslant \nu$ entraîne $\varphi_n(C) \leqslant \Pi$, on en déduit :

(27) $$\dim A^{(n+1)} - \dim A^{(n)} \leqslant 1 + \Pi \qquad (\nu \leqslant n) .$$

Pour tout $n \geqslant \nu$, posons

$$\rho(n) = \sup_{C \in \Gamma_n} (\Lambda(C, \nu))$$

$\rho(n)$ est un entier inférieur ou égal à $\dim A^{(\nu)}$. L'inclusion $\Gamma_{n+1} \subset \Gamma_n$ entraîne $\rho(n+1) \leqslant \rho(n)$. Comme ρ ne peut prendre que des valeurs entières positives ou nulles, on en déduit l'existence d'une limite :

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \rho(n) .$$

Cette limite est atteinte pour un certain nombre μ $(\mu \geqslant \nu)$. Si $n \geqslant \mu$, on notera Γ'_n le sous-ensemble de Γ_n défini par la condition :

$$C \in \Gamma'_n \Longleftrightarrow \{ C \in \Gamma_n \quad \text{et} \quad \Lambda(C, \nu) = \rho \} .$$

Il en résulte que $\forall n \geqslant \mu$ on a $\Gamma'_n \neq \emptyset$ et $\Gamma'_n \supset \Gamma'_{n+1}$.

Soient $n \geqslant \mu$ et $C \in \Gamma'_n$. On a :

$$\varphi_n(C) = \varphi_\nu(C) = \Pi .$$

Donc, par application répétée de l'égalité (25) :

$$\Lambda(C, n) - \Lambda(C, \nu) = (n - \nu)(1 + \Pi)$$

et comme $C \in \Gamma'_n$ entraîne $\Lambda(C, \nu) = \rho$ on a l'égalité :

(28) $$\Lambda(C, n) = (1 + \Pi)(n - \nu) + \rho \qquad (n \geqslant \nu \,;\ C \in \Gamma'_n) .$$

Posons :

$$\Delta(n) = (1 + \Pi)(n - \nu) + \rho .$$

L'égalité (28) montre que

$$0 \leqslant \Delta(n) \leqslant \dim A^{(n)} \qquad (n \geqslant \nu) .$$

L'inégalité (27) permet alors d'écrire :

$$0 \leq \dim A^{(n+1)} - \Delta(n+1) \leq \dim A^{(n)} - \Delta(n) \qquad (\nu \leq n) .$$

Par suite $\dim A^{(n)} - \Delta(n)$ tend vers une limite $a \geq 0$ lorsque $n \to \infty$, cette limite étant atteinte pour un certain nombre N.

On a donc pour tout $n \geq N$: $\dim A^{(n)} = \Delta(n) + a$
ou :

(29) $$\dim A^{(n)} = (1 + \pi) n + \delta \qquad (n \geq N)$$

en désignant par δ la constante $\rho + a - (1 + \pi) \nu$.

Il nous reste à montrer que $\pi \leq \delta$.

On a $$\rho = \rho(\nu) = \sup_{\mathcal{C} \in \Gamma_\nu} (\Lambda(\mathcal{C}, \nu)) .$$

Mais $\mathcal{C} \in \Gamma_\nu \Longleftrightarrow \mathcal{C}$ a exactement π maillons de poids $\geq \nu$.

Le théorème 9 montre alors immédiatement qu'il existe une chaîne spéciale de $A^{(\nu)}$ reposant sur $\mathcal{C}$ et de longueur $\geq \pi(\nu + 1) + \nu$. Donc

$$\sup_{\mathcal{C} \in \Gamma_\nu} (\Lambda(\mathcal{C}, \nu)) \geq (\pi + 1) \nu + \pi ,$$

c'est-à-dire $\rho \geq (1 + \pi)\nu + \pi$. Comme $0 \leq a$, il en résulte bien

$$\delta \geq \pi.$$

REMARQUE. – On peut montrer qu'en fait $a = 0$. De par sa définition, on voit que $a \geq 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons $a > 0$. Ceci entraîne que l'ensemble Γ'' des chaînes $\mathcal{C}$ telles que $\Delta(N) < \Lambda(\mathcal{C}, N)$ n'est pas vide.

Si $\mathcal{C} \in \Gamma''$, on a nécessairement $\mathcal{C} \notin \Gamma_N$, donc :

$$\Lambda(\mathcal{C}, N+1) < \Lambda(\mathcal{C}, N) + (\pi + 1) = \dim A^{(N+1)}$$

et par suite $\exists\, \mathcal{C}_1 \notin \Gamma''$ avec $\Lambda(\mathcal{C}_1, N+1) = \dim A^{(N+1)}$
mais $\Lambda(\mathcal{C}_1, N) < \dim A^{(N)}$ (puisque $\mathcal{C}_1 \notin \Gamma''$) entraîne

$$\Lambda(\mathcal{C}_1, N+1) - \Lambda(\mathcal{C}_1, N) > \dim A^{(N+1)} - \dim A^{(N)} = \pi + 1 ,$$

ce qui est absurde.

THÉORÈME 14. – <u>Les notations étant celles du théorème 13, et A étant supposé intègre, une condition nécessaire et suffisante pour que</u> $\pi = 0$ <u>est que A soit de dimension valuative finie. On a alors</u> $\delta = \dim_v A$.

D'après le théorème 8, il suffit de montrer que $\pi = 0$ entraîne $\dim_v A < \infty$. Supposons $\pi = 0$. Il existe un nombre N fini tel que pour toute chaîne $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ de longueur 1 de A on ait $\delta_v(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) \leq N$. Raisonnons par l'absurde et supposons $\dim_V A = \infty$.

En reprenant la démonstration du théorème 10 ainsi que ses notations, on voit que $m \leqslant \dim A$ et $d_i \leqslant N$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Donc $d \leqslant N \dim A$ et l'inégalité (15') : $\dim_V A \leqslant d + m$ entraîne $\infty \leqslant (N + 1) \dim A$, ce qui est absurde. D'où le théorème.

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1957/58

-:-:-:-

ADDENDUM AUX EXPOSÉS 22 ET 25

par Paul JAFFARD

Nous allons, dans ce qui suit, étendre la notion de dimension valuative à un anneau A qui n'est plus nécessairement d'intégrité (mais toujours commutatif et muni d'un élément unité) et montrer que les propriétés de la dimension valuative, démontrées pour les anneaux intègres, sont encore vraies dans le cas général.

LEMME A. - Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de l'anneau intègre A, on a :

$$\dim_v A/\mathfrak{p} \leqslant \dim_v A .$$

Soit s un entier fini $\leqslant \dim_v A/\mathfrak{p}$. Désignons par K le corps des fractions de A, et k le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$. Par définition, il existe une spécialisation φ de k de rang s finie sur $A/\mathfrak{p}$. L'homomorphisme canonique $A \longrightarrow A/\mathfrak{p}$ peut se prolonger en une spécialisation ψ de K sur un surcorps L de k et la spécialisation φ peut se prolonger en une spécialisation φ' de L sur un surcorps de $\varphi(k)$. On voit alors que $\varphi' \psi$ est une spécialisation de K restant finie sur A et dont le rang est supérieur ou égal à s. On en déduit donc le lemme.

REMARQUE. - Si $\mathfrak{p} \neq (0)$, $\dim_v A/\mathfrak{p} \leqslant \dim_v A + 1$.

En effet dans ce cas ψ n'est pas triviale et $\varphi' \psi$ a un rang $\geqslant s + 1$.

Soient A un anneau quelconque (commutatif avec élément unité) et P l'ensemble des idéaux premiers de A. On considère le nombre s (fini ou non) défini par :

$$s = \sup_{\mathfrak{p} \in P} (\dim_v A/\mathfrak{p}) .$$

D'après le lemme, si A est intègre, on a $s = \dim_v A$. Que A soit intègre ou non, nous dirons que s est la dimension valuative de l'anneau A et nous écrirons :

$$s = \dim_v A .$$

THÉORÈME 5'. – La dimension d'un anneau A est toujours inférieure ou égale à sa dimension valuative.

En effet, on a l'égalité évidente :

$$\dim A = \sup_{\mathfrak{p} \in P} \dim A/\mathfrak{p} .$$

L'égalité $\dim A/\mathfrak{p} \leq \dim_v A/\mathfrak{p}$ (Théorème 5) entraîne donc $\dim A \leqslant \dim_v A$.

THÉORÈME 7'. – Si A est un anneau de dimension valuative d , l'anneau de polynômes $A[x]$ à une variable sur A , a pour dimension valuative $d + 1$.

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A , on a (théorème 7) :

$$\dim_v (A/\mathfrak{p})[x] = \dim_v (A/\mathfrak{p}) + 1 .$$

Mais $(A/\mathfrak{p})[x]$ est isomorphe à $A[x]/\mathfrak{p} A[x]$, donc :

(a) $$\dim_v A[x]/\mathfrak{p} A[x] = \dim_v (A/\mathfrak{p}) + 1 .$$

On en déduit immédiatement :

$$\dim_v A[x] \geqslant \dim_v A + 1 .$$

Soit maintenant s un nombre fini inférieur ou égal à $\dim_v A[x]$. Il existe un idéal premier $\tilde{\mathfrak{p}}$ de $A[x]$ tel que $\dim_v A[x]/\tilde{\mathfrak{p}} \geqslant s$. Soit $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}} \cap A$. L'inclusion $\mathfrak{p} A[x] \subset \tilde{\mathfrak{p}}$ et le lemme A entraînent

$$\dim_v A[x]/\tilde{\mathfrak{p}} \leq \dim_v A[x]/\mathfrak{p} A[x] .$$

L'égalité (a) entraîne donc :

$$s \leqslant \dim_v (A/\mathfrak{p}) + 1 .$$

Ce qui entraîne $s \leqslant \dim_v A + 1$ d'où le théorème 7'. On en déduit immédiatement le :

COROLLAIRE. – Quel que soit l'anneau A (commutatif avec unité) on a :

$$\dim_v A^{(n)} = n + \dim_v A .$$

THÉORÈME 8'. – Si A est un anneau de dimension valuative finie, il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait :

$$\dim A^{(n)} = n + \delta$$

où δ est un entier inférieur ou égal à $\dim_v A$.

Se démontre comme le théorème 8.

THÉORÈME 10'. - A étant un anneau de dimension valuative finie, pour tout $n \geq \dim_v A$, on a :

$$\dim A^{(n)} = \dim_v A^{(n)} = n + \dim_v A .$$

Soit $s = \dim_v A$. Il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A tel que $s = \dim_v A/\mathfrak{p}$. Si $n \geq s$, on a d'après le théorème 10 :

$$\dim (A/\mathfrak{p})^{(n)} = n + \dim_v (A/\mathfrak{p}) = n + \dim_v A .$$

Mais l'isomorphisme $(A/\mathfrak{p})^{(n)} \cong A^{(n)}/\mathfrak{p} A^{(n)}$ entraîne alors

$$\dim A^{(n)} \geq n + \dim_v A = \dim_v A^{(n)} .$$

Donc le théorème 5' entraîne $\dim A^{(n)} = \dim_v A^{(n)}$. C.Q.F.D.

Dans le théorème 14, on peut de même enlever la restriction que A est intègre et énoncer le :

THÉORÈME 14'. - Les notations étant celles du théorème 13, une condition nécessaire et suffisante pour que $\Pi = 0$ est que A soit de dimension valuative finie. On a alors $\delta = \dim_v A$.

Il suffit encore de montrer que $\Pi = 0$ entraîne $\dim_v A < \infty$. Supposons donc $\Pi = 0$. Il existe un entier N tel que $n \geq N$ entraîne $\dim A^{(n)} = n + \delta$. Soit alors $\mathfrak{p}$ un idéal premier quelconque de A. Les relations

$$\dim (A/\mathfrak{p})^{(n)} = \dim A^{(n)}/\mathfrak{p} A^{(n)} \leq \dim A^{(n)}$$

entraînent $\dim (A/\mathfrak{p})^{(n)} \leq n + \delta$ si $n \geq N$. Les théorèmes 13 et 14 montrent alors que $\dim_v (A/\mathfrak{p}) \leq \delta$.

Comme ceci est vrai pour tout $\mathfrak{p} \in P$, on en déduit $\dim_v A \leq \delta < \infty$, ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRE. - La dimension valuative d'un anneau noethérien est égale à sa dimension ordinaire.