Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Michel Zisman

Cohomologie à coefficients dans un faisceau

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, nº 1 (1957-1958), exp. nº 8, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_1_A8_0>

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1957/58

6 janvier 1958

-:-:-:-

COHOMOLOGIE A COEFFICIENTS DANS UN FAISCEAU

par Michel ZISMAN.

Le mode d'exposition est celui de SERRE [2]. Pour d'autres théories de la cohomologie le lecteur pourra consulter la bibliographie donnée dans l'exposé 5.

1. Les complexes de cochaines.

Soit $\underset{\sim}{F}$ un préfaisceau sur un espace topologique X, et $\underset{\sim}{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X. On désigne par $S(I)$ le complexe simplicial (cf. [3]) dont les simplexes dont les suites finies d'éléments de I. Si $s = \{i_0, \ldots, i_p\}$ est un élément de $S(I)$, on posera $U_s = U_{i_0 \ldots i_p} = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}$ (p entier $\geqslant 0$).

On appelle p-cochaine de $\underset{\sim}{U}$ à valeurs dans $\underset{\sim}{F}$ une fonction f qui à tout $s \in S_p(I)$ fait correspondre un élément de F_{U_s}.

Chaque F_{U_s} étant un groupe abélien, l'ensemble des p-cochaines est naturellement doué d'un structure de groupe abélien. On désignera ce groupe par $C^p(\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{F})$, et par $C(\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{F})$ la somme directe $\sum_{p=0}^{\infty} C^p(\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{F})$.

Dans $S(I)$ on a défini l'homomorphisme bord d :

$$d\{i_0, \ldots, i_p\} = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \{i_0, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_p\}$$

De même on définit dans $C(\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{F})$ un homomorphisme cobord δ :

$$C^p(\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{F}) \to C^{p+1}(\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{F}) \quad \text{par :}$$

$$\delta f(i_0, \ldots, i_{p+1}) = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j r_j f(i_0, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_{p+1})$$

où r_j désigne l'homomorphisme de restriction

$$r^{U_{i_0 \ldots \hat{i}_j \ldots i_{p+1}}}_{U_{i_0 \ldots i_{p+1}}} : F_{U_{i_0 \ldots \hat{i}_j \ldots i_{p+1}}} \to F_{U_{i_0 \ldots i_{p+1}}}$$

(cette définition est cohérente en effet

$$f(i_0 , \dots , \hat{i}_j , \dots , i_{p+1}) \in F_{U_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{p+1}}}$$

et par conséquent $\delta f(i_0 , \dots , i_{p+1}) \in F_{U_{i_0 \dots i_{p+1}}}$, et est ~~bien un élément de~~ $C^{p+1}(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{F})$).

On vérifie sans peine que $\delta\delta = 0$, puisque $d\,d = 0$. $C(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{F})$ est donc un complexe de groupe abélien dont on désigne les groupes de cohomologie par $H^p(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{F})$.

2. Passage à un recouvrement plus fin.

Soit $\underset{\sim}{U}$ un recouvrement plus fin qu'un recouvrement $\underset{\sim}{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ et $\tau : I \to J$ une application telle que $U_i \subset V_{\tau i}$ pour tout $i \in I$. τ induit un homomorphisme noté encore τ de $C(\underset{\sim}{V} , \underset{\sim}{F})$ dans $C(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{F})$ défini par

$$(\tau f)(i_0 \dots i_q) = r_U^V f(\tau i_0 , \dots , \tau i_q)$$

où r_U^V est l'homomorphisme attaché à l'inclusion

$$U_{i_0 \dots i_q} \subset V_{\tau i_0 \dots \tau i_q} \quad \text{et où} \quad f \in C^q(\underset{\sim}{V} , \underset{\sim}{F})$$

On vérifie sans peine que τ commute avec δ et définit par conséquent un homomorphisme

$$\tau^* : H^q(\underset{\sim}{V} , \underset{\sim}{F}) \to H^q(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{F})$$

PROPOSITION 2.1. - <u>L'homomorphisme $\tau^* : H^q(\underset{\sim}{V} , \underset{\sim}{F}) \to H^q(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{F})$ ne dépend que des recouvrements $\underset{\sim}{V}$ et $\underset{\sim}{U}$ et non de l'application $\tau : I \to J$ choisie. On désigne par $t(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{V})$ l'homomorphisme canonique ainsi défini . On a $t(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{U})$ = identité et $t(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{V}) \circ t(\underset{\sim}{V} , \underset{\sim}{W}) = t(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{W})$ si $\underset{\sim}{U} \prec V \prec W$. (On rappelle que $\underset{\sim}{U} \prec \underset{\sim}{V}$ signifie $\underset{\sim}{U}$ plus fin que $\underset{\sim}{V}$).</u>

Soient en effet τ et τ' deux applications $I \to J$ telles que $U_i \subset V_{\tau i}$ et $U_i \subset V_{\tau' i}$. On définit un opérateur d'homotopie k (abaissant les degrés d'une unité) de la manière suivante, $(f \in C^q(\underset{\sim}{V} , \underset{\sim}{F}))$:

$$(kf)(i_0 , \dots , i_{q-1}) = \sum_{j=0}^{j=q-1} (-1)^j \, r_j \, f(\tau i_0 , \dots , \tau i_j \, \tau' i_j \dots \tau' i_{q-1})$$

où r_j est l'homomorphisme attaché à l'inclusion

$$U_{i_0 \ldots i_{q-1}} \subset V_{\tau i_0 \ldots \tau i_j \tau' i_j \ldots \tau' i_{q-1}} .$$

On vérifie que $\delta kf + k\delta f = \tau' f - \tau f$, ce qui démontre la première partie de la proposition. La seconde est immédiate.

On rappelle que la relation $\underset{\sim}{U} \prec \underset{\sim}{V}$ est une relation de préordre filtrante entre recouvrements et que l'ensemble des classes de recouvrements ($\underset{\sim}{U}$ et $\underset{\sim}{V}$ appartenant à la même classe d'équivalence si $\underset{\sim}{U} \prec \underset{\sim}{V}$ et $\underset{\sim}{V} \prec \underset{\sim}{U}$) est alors un ensemble ordonné filtrant (cf [4]). La proposition 2.1 montre alors que $t(\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{V})$ et $t(\underset{\sim}{V}, \underset{\sim}{U})$ sont des isomorphismes réciproques si $\underset{\sim}{U}$ et $\underset{\sim}{V}$ appartiennent à la même classe : autrement dit $H^q(\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{F})$ ne dépend que de la classe de recouvrement de $\underset{\sim}{U}$.

Ce qui précède justifie alors la définition suivante :

DÉFINITION. - <u>On appelle</u> q-ième <u>groupe de cohomologie de</u> X <u>à valeurs dans</u> $\underset{\sim}{F}$, <u>et on note</u> $H^q(X, \underset{\sim}{F})$, <u>la limite inductive des groupes</u> $H^q(\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{F})$ <u>définie suivant l'ordonné filtrant des classes de recouvrements de</u> X <u>au moyen des homomorphismes</u> $t(\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{V})$.

DÉFINITION. - <u>On appelle</u> q-ième <u>groupe de cohomologie de</u> X <u>à valeurs dans un faisceau</u> F, <u>et on note</u> $H^q(X, F)$, <u>le</u> q-ième <u>groupe de cohomologie de</u> X <u>à valeurs dans le préfaisceau canoniquement associé à</u> F (où $F_U = \Gamma(U, F)$).

3. Premières propriétés.

PROPOSITION 3.1. - $H^0(X, F)$ <u>est canoniquement isomorphe à</u> $\Gamma(X, F)$, <u>groupe des sections de</u> F <u>au-dessus de</u> X.

Soit $\underset{\sim}{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de X. $H^0(\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{F})$ est isomorphe au groupe des 0-cocycles de $C(\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{F})$ puisqu'il n'y a pas de -1 cochaines. Si f est un 0-cocycle, on a

$$(\delta f)(i, j) = \rho_j f(i) - \rho_i f(j) = 0$$

(ρ_j est la restriction de $\Gamma(U_i, F)$ à $\Gamma(U_i \cap U_j, F)$ de même pour ρ_i). Donc $f(i)$ et $f(j)$ sont deux sections qui coïncident sur $U_i \cap U_j$. Ainsi $H^0(\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{F}) = \Gamma(X, F)$ pour tout $\underset{\sim}{U}$.

PROPOSITION 3.2. - <u>Soient</u> Y <u>un sous-espace fermé de</u> X <u>et</u> F <u>un faisceau au-dessus de</u> Y. $H^q(Y, F)$ <u>et</u> $H^q(X, \hat{F})$ <u>sont canoniquement isomorphes</u>.

Le recouvrement $\mathbf{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X définit un recouvrement $\mathbf{U}' = \{U_i \cap Y\}_{i \in I}$ de Y ; réciproquement, tout recouvrement de Y peut être obtenu de cette manière. Comme $\Gamma(U \cap Y , F) \approx \Gamma(U , \hat{F})$ pour tout ouvert U de X, et que les homomorphismes de restriction commutent à cet isomorphisme, les deux complexes $C(\mathbf{U}' , \mathbf{F})$ et $C(\mathbf{U} , \hat{\mathbf{F}})$ sont isomorphes, et par conséquent $H^q(\mathbf{U}' , \mathbf{F}) \approx H^q(\mathbf{U} , \hat{\mathbf{F}})$. On en déduit alors immédiatement la propriété annoncée.

HOMOMORPHISMES. - Soient $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ deux préfaisceaux et $h : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$ un homomorphisme, h induit un homomorphisme noté encore h de $C(\mathbf{U} , \mathbf{F})$ dans $C(\mathbf{U} , \mathbf{G})$ qui commute aux homomorphismes cobords. h induit donc un homomorphisme

$$h^* : H^q(\mathbf{U} , \mathbf{F}) \longrightarrow H^q(\mathbf{U} , \mathbf{G})$$

si $\mathbf{U} < \mathbf{V}$, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^q(\mathbf{V} , \mathbf{F}) & \longrightarrow & H^q(\mathbf{V} , \mathbf{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(\mathbf{U} , \mathbf{F}) & \longrightarrow & H^q(\mathbf{U} , \mathbf{G}) \end{array} \qquad (1)$$

où les flèches horizontales sont les homomorphismes h^*, les flèches verticales les homomorphismes $t(\mathbf{U} , \mathbf{V})$.

h^* induit donc un homomorphisme de systèmes inductifs, et par passage à la limite inductive on a un homomorphisme canonique

$$h^* : H^q(X , \mathbf{F}) \longrightarrow H^q(X , \mathbf{G}) .$$

Considérons maintenant une suite exacte de préfaisceaux sur X.

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}' \xrightarrow{h'} \mathbf{F} \xrightarrow{h} \mathbf{F}'' \longrightarrow 0$$

on sait que, pour tout ouvert U de X, $F''_U = F_U / F'_U$ donc la suite

$$0 \longrightarrow C(\mathbf{U} , \mathbf{F}') \longrightarrow C(\mathbf{U} , \mathbf{F}) \longrightarrow C(\mathbf{U} , F'') \longrightarrow 0$$

est aussi exacte. La théorie générale des suites exactes de complexes (cf [4]) donne alors la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbf{U} , \mathbf{F}') \xrightarrow{h'^*} H^0(\mathbf{J} , \mathbf{F}) \xrightarrow{h^*} H^0(\mathbf{U} , \mathbf{F}'') \xrightarrow{\partial} H^1(\mathbf{U} , \mathbf{F}') \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow H^{q-1}(\mathbf{U} , \mathbf{F}'') \xrightarrow{\partial} H^q(\mathbf{U} , \mathbf{F}') \xrightarrow{h'^*} H^q(\mathbf{U} , \mathbf{F}) \xrightarrow{h^*} H^q(\mathbf{U} , \mathbf{F}'') \longrightarrow \dots$$

Soit $\mathbf{U} < \mathbf{V}$, en plus du diagramme (1) on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^{q-1}(\mathbf{V} , \mathbf{F}'') & \xrightarrow{\partial} & H^q(\mathbf{V} , \mathbf{F}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{q-1}(\mathbf{U} , \mathbf{F}'') & \xrightarrow{\partial} & H^q(\mathbf{U} , \mathbf{F}') \end{array} \qquad (2)$$

où les flèches verticales représentent l'homomorphisme $t(\mathbf{U} , \mathbf{V})$. ∂ induit donc par passage à la limite inductive un homomorphisme

$$\partial : H^{q-1}(X , \underset{\sim}{F}") \longrightarrow H^q(X , \underset{\sim}{F}') .$$

De plus, on a le diagramme commutatif (réunion des diagrammes (1) et (2))où les lignes horizontales sont exactes et où les verticales représentent toujours $t(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{V})$:

$$(3)\qquad \begin{array}{ccccccccc} \cdots \longrightarrow H^{q-1}(\underset{\sim}{V} , \underset{\sim}{F}") & \xrightarrow{\partial} & H^q(\underset{\sim}{V} , \underset{\sim}{F}') & \xrightarrow{f'^*} & H^q(\underset{\sim}{V} , \underset{\sim}{F}) & \xrightarrow{f^*} & H^q(V , \underset{\sim}{F}") & \longrightarrow \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow H^{q-1}(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{F}") & \xrightarrow{\partial} & H^q(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{F}') & \xrightarrow{f'^*} & H^q(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{F}) & \xrightarrow{f^*} & H^q(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{F}") & \longrightarrow & . \end{array}$$

Or une limite inductive de suites exactes est une suite exacte d'où la proposition 3 :

PROPOSITION 3.3. - <u>A toute suite exacte</u> $0 \longrightarrow \underset{\sim}{F}' \longrightarrow \underset{\sim}{F} \longrightarrow \underset{\sim}{F}" \longrightarrow 0$ <u>de préfaisceaux sur</u> X , <u>on associe canoniquement une suite exacte de cohomologie</u> :

$$0 \longrightarrow H^0(X , \underset{\sim}{F}') \longrightarrow H^0(X , \underset{\sim}{F}) \longrightarrow H^0(X , F") \longrightarrow H^1(X , \underset{\sim}{F}') \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^{q-1}(X , \underset{\sim}{F}") \longrightarrow H^q(X , \underset{\sim}{F}') \longrightarrow H^q(X , \underset{\sim}{F}) \longrightarrow H^q(X , \underset{\sim}{F}") \longrightarrow \cdots$$

<u>Cas desfaisceaux</u>. - Soit $f : F \longrightarrow G$ un homomorphisme de faisceaux sur X . On a vu que f induisait un homomorphisme

$$f : \Gamma(U , F) \longrightarrow \Gamma(U , G) ,$$

donc un homomorphisme $\underset{\sim}{F} \longrightarrow \underset{\sim}{G}$ des préfaisceaux canoniquement associés à F et G . f induit donc un homomorphisme

$$f^* : H^p(X , F) \longrightarrow H^q(X , G)$$

Mais à la suite exacte $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F" \longrightarrow 0$, Γ ne fait corespondre que la suite exacte à gauche

$$0 \longrightarrow \Gamma(U , F') \longrightarrow \Gamma(U , F) \longrightarrow \Gamma(U , F")$$

Donc on n'a pas une suite exacte des préfaisceaux $\underset{\sim}{F}'$, $\underset{\sim}{F}$, $\underset{\sim}{F}"$. Si $\underset{\sim}{H}$ désigne le préfaisceau défini par $H_U = \Gamma(U , F)/\Gamma(U , F')$, (voir exposé 5) et r_U^V défini par passage au quotient à partir de l'homomorphisme de restriction $\Gamma(V , F) \longrightarrow \Gamma(U , F)$, on a la suite exacte de préfaisceaux

$$0 \longrightarrow \underset{\sim}{F}' \longrightarrow \underset{\sim}{F} \longrightarrow \underset{\sim}{H} \longrightarrow 0$$

L'homomorphisme canonique $i : H_U \longrightarrow \Gamma(U , F")$ induit un homomorphisme

$$i^* : H^q(X, \underset{\sim}{H}) \longrightarrow H^q(X, \underset{\sim}{F''})$$

c'est-à-dire, par définition de $H^q(X, F'')$, un homomorphisme

$$i^* : H^q(X, \underset{\sim}{H}) \longrightarrow H^q(X, F'') .$$

Mais i^* n'est pas un isomorphisme en général.

Donc, en général, il n'y a pas de suite exacte de cohomologie pour les faisceaux.

Pour supprimer cet inconvénient grave, on impose à X des conditions supplémentaires.

4. Le cas où X est paracompact.

DÉFINITIONS. - Un recouvrement $\underset{\sim}{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ est dit localement fini si tout point de X possède un voisinage U tel que $U \cap U_i = \emptyset$ sauf pour un ensemble fini d'indices $i \in I$

Un espace X est dit paracompact, s'il est séparé, et si tout recouvrement possède un recouvrement localement fini plus fin.

On a les propriétés suivantes :

PROPOSITION 4.1.- Tout espace localement compact, dénombrable à l'infini (c'est-à-dire réunion dénombrable d'espaces compacts) est paracompact. (Dans tous les exposés qui suivront, on supposera toujours que les variétés différentiables sont dénombrables à l'infini : elles seront donc paracompactes).

PROPOSITION 4.2. - Si X est un espace paracompact et $\underset{\sim}{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement localement fini, il existe un recouvrement $\underset{\sim}{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ avec le même ensemble d'indice I, tel que $\overline{V}_i \subset U_i$ pour tout $i \in I$ ($\overline{V}_i$ désigne la fermeture de l'ouvert V_i). (pour la démonstration de ces propriétés voir BOURBAKI : Topologie générale)

Soient X un espace paracompact, $\underset{\sim}{F}$ un préfaisceau sur X et F le faisceau associé ; pour tout ouvert U, on a défini un homomorphisme

$$i : F_U \longrightarrow \Gamma(U, F) .$$

i induit donc un homomorphisme $i^* : H^q(X, \underset{\sim}{F}) \longrightarrow H^q(X, F)$.

THÉORÈME 4.3. - Pour tout q, $i^* : H^q(X, \underset{\sim}{F}) \longrightarrow H^q(X, F)$ est une bijection.

La démonstration de ce théorème est une application du lemme ci-après.

Soient $\underset{\sim}{F}$ et $\underset{\sim}{G}$ deux préfaisceaux, F et G les faisceaux associés. On suppose qu'il existe un homomorphisme $h : \underset{\sim}{F} \longrightarrow \underset{\sim}{G}$ qui induit un homomorphisme de F <u>sur</u> G. Alors

LEMME 4.5. - <u>Soient</u> $\underset{\sim}{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ <u>un recouvrement et</u> $f \in C^q(\underset{\sim}{V}, \underset{\sim}{G})$. <u>Il existe un recouvrement</u> $\underset{\sim}{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ <u>et une application</u> $\tau : I \longrightarrow J$ <u>tels que</u> $U_i \subset V_{\tau i}$ <u>et que</u> τf (qui est une cochaine de $C^q(\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{G})$) <u>appartienne à l'image de</u> $C^q(\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{F})$ <u>par</u> h.

DÉMONSTRATION. - Puisque X est paracompact, on peut supposer $\underset{\sim}{V}$ localement fini. Il existe alors un recouvrement $\{W_j\}_{j \in J}$ tel que $\bar{W}_j \subset V_j$ (proposition 4-2). On prend pour ensemble I l'ensemble X lui-même. Pour tout $x \in X$, on choisit un ouvert U_x contenant x tel que :

a. si $x \in V_j$ (resp. $x \in W_j$), on a $U_x \subset V_j$ (resp. $U_x \subset W_j$)
b. si $U_x \cap W_j \neq \emptyset$, on a $U_x \subset V_j$
c. si $x \in V_{j_0 \ldots j_q}$, il existe un élément $s \in F_{U_x}$ tel que

$$h_{U_x} s = r'^{V_{j_0 \ldots j_q}}_{U_x} f(j_0 \ldots j_q)$$

(les r'^V_U sont les homomorphismes attachés au préfaisceau $\underset{\sim}{G}$)

La condition c. est réalisable car

- d'après la condition a. $U_x \subset V_{j_0 \ldots j_q}$

- puisque h induit un homomorphisme de F <u>sur</u> G, pour tout ouvert V, et tout $g \in G_V$ il existe un ouvert $U \subset V$ tel que $r'^V_U\, g$ appartient à l'image de h_U (cf. exposé 5)

- enfin $\underset{\sim}{V}$ étant localement fini, x n'appartient qu'à un nombre fini de $V_{j_0 \ldots j_q}$.

Ceci étant on peut trouver des U_x vérifiant a. et b. car $\bar{W}_j \subset V_j$ et car $\underset{\sim}{W}$ et $\underset{\sim}{V}$ sont localement finis. On restreint encore si nécessaire les U_x pour qu'ils vérifient aussi c.

La famille des $\{U_x\}_{x \in X}$ forme un recouvrement $\underset{\sim}{U}$. On définit alors $\tau : X \longrightarrow J$ en imposant $x \in W_{\tau x}$. On a bien $U_x \subset V_{\tau x}$ car a. implique alors $U_x \subset W_{\tau x}$ et par définition de $\underset{\sim}{W}$, $W_{\tau x} \subset V_{\tau x}$.

Il reste donc à vérifier que $\tau f \in h\, C^q(\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{F})$ c'est-à-dire que

$$r'^{V}_{U} f(\tau x_0 , \dots , \tau x_q)$$

est l'image par $h_{U_{x_0} \cap \dots \cap U_{x_q}}$ d'un élément de $F_{U_{x_0} \cap \dots \cap U_{x_q}}$ (r'^{V}_{U} désigne l'homomorphisme attaché à l'inclusion $U_{x_0} \cap \dots \cap U_{x_q} \subset V_{\tau x_0} \cap \dots \cap V_{\tau x_q}$)

Si $U_{x_0} \cap \dots \cap U_{x_q} = \emptyset$ c'est évident.

Si non, $U_{x_0} \cap U_{x_k} \neq \emptyset$ pour $0 \leq k \leq q$, et comme on a $U_{x_k} \subset W_{\tau x_k}$, on a aussi $U_{x_0} \cap W_{\tau x_k} \neq \emptyset$, mais b. $\Rightarrow U_{x_0} \subset V_{\tau x_k}$, c'est-à-dire $x_0 \in U_{x_0} \subset V_{\tau x_0 \dots \tau x_q}$.
c. montre qu'il existe alors un élément $s \in F_{U_{x_0}}$ tel que

$$h_{U_{x_0}} s = r'^{V_{j_0 \dots j_q}}_{U_{x_0}} f(j_0 \dots j_q) .$$

Soit $\varphi \in C^q(\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{F})$ la cochaine définie par

$$\varphi(x_0 , \dots , x_q) = r^{U_{x_0}}_{U_{x_0} \cap \dots \cap U_{x_q}} s$$

On a alors $h\varphi = \tau f$

C.Q.F.D.

DÉMONSTRATION du théorème 4.3.

a. <u>Supposons que l'application</u> $i : F_U \longrightarrow \Gamma(U , F)$ <u>soit injective</u>. On prend pour $\underset{\sim}{G}$ le préfaisceau canonique associé à F et pour homomorphisme h, l'homomorphisme i ci-dessus. Si f est un $\underset{\sim}{V}$-cocycle, $\tau f = i\varphi \Rightarrow \delta\tau f = \tau\delta f = 0$, or $\delta\tau f = \delta i\varphi = i\delta\varphi$, comme i est injectif, $\delta\varphi = 0$. Si f est une $\underset{\sim}{V}$-cochaine, $\tau f = i\varphi$ entraine $\tau\delta f = i\delta\varphi$. Par conséquent, quand on passe à la limite inductive, i^* est un isomorphisme.

b. <u>Cas général</u>. - Soit F'_U le noyau de i et $F''_U = F_U/F'_U$, $\underset{\sim}{F}'$ et $\underset{\sim}{F}''$ les préfaisceaux associés naturellement à ces groupes.

On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underset{\sim}{F}' \longrightarrow \underset{\sim}{F} \longrightarrow \underset{\sim}{F}'' \longrightarrow 0$$

Le faisceau associé à $\underset{\sim}{F}''$ est F et l'application $F''_U \longrightarrow \Gamma(U , F)$ est <u>injective</u> donc on a $H^q(X , \underset{\sim}{F}'') \approx H^q(X , F)$ d'après a. Le faisceau associé à $\underset{\sim}{F}'$ est 0.

On peut donc appliquer directement le lemme à l'homomorphisme $0 \to \underset{\sim}{F}'$.

Donc
$$H^q(X , \underset{\sim}{F}') = 0$$
pour tout q . La suite exacte de cohomologie des préfaisceaux montre alors que $H^q(X , \underset{\sim}{F}) \approx H^q(X , \underset{\sim}{F}'')$ c'est-à-dire $H^q(X , \underset{\sim}{F}) \approx H^q(X , F)$.

COROLLAIRE 4.4. - Soit $0 \to F' \xrightarrow{f'} F \xrightarrow{f} F'' \to 0$ une suite exacte de faisceaux sur un espace paracompact X . La suite suivante est exacte :

$$0 \to H^0(X , F') \xrightarrow{f'^*} H^0(X , F) \xrightarrow{f^*} H^0(X , F'') \xrightarrow{\partial} H^1(X , F') \to \dots$$
$$\to H^{q-1}(X , F'') \xrightarrow{\partial} H^q(X , F') \xrightarrow{f'^*} H^q(X , F) \xrightarrow{f^*} H^q(X , F'') \to$$

5. Faisceaux fins.

A partir de ce paragraphe et jusqu'à la fin du Séminaire les espaces X seront toujours paracompacts.

DÉFINITION. - On dit qu'un faisceau F est fin si, à chaque recouvrement localement fini $\underset{\sim}{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ on peut associer une famille $\{\ell_i\}_{i \in I}$ d'homomorphisme ℓ_x $F \to F$ tels que :

a. pour tout $i \in I$ il existe un sous-ensemble fermé $A_i \subset U_i$ tel que
$$\ell_i(F_x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \notin A_i$$

b. $\sum_{i \in I} \ell_i = \text{identité}.$

(la somme qui figure dans b. a un sens car tout x n'appartient qu'à un nombre fini de A_i)

THÉORÈME 5.1. - Si F est fin, $H^q(X , F) = 0$ pour $q \geq 1$

DÉMONSTRATION. - Puisque tout recouvrement possède un recouvrement plus fin localement fini, il suffit de montrer que $H^q(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{F}) = 0$ quand $\underset{\sim}{U}$ est localement fini (l'"ensemble" de ces recouvrements est cofinal dans l'"ensemble" des recouvrements). On définit un opération d'homotopie

$$k : C^q(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{F}) \to C^{q-1}(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{F}) \qquad (q \geq 1)$$

comme suit : Soit $f \in C^q(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{F})$. kf est un élément de $C^{q-1}(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{F})$ c'est-à-dire que pour tout système $\{i_0 \dots i_{q-1}\}$, $(kf)(i_0 , \dots , i_{q-1})$ est une section au-dessus de $U_{i_0 \dots i_{q-1}}$. Pour tout $i \in I$, soit $t(i , i_0 , \dots , i_{q-1})$

la section de F au-dessus de $U_{i_0 \ldots i_{q-1}}$ égale à $\ell_i(f(i , i_0 , \ldots , i_{q-1}))$ au dessus de $U_{ii_0 \ldots i_{q-1}}$ et nulle en dehors de cet ouvert. (t est bien une section d'après a. de la définition) On pose

$$(kf)(i_0 , \ldots , i_{q-1}) = \sum_{i \in I} t(i , i_0 , \ldots , i_{q-1})$$

Un calcul facile montre alors que $k\delta + \delta k =$ identité de $C^q(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{F})$ pour $q \geqslant 1$

C.Q.F.D.

Existence de faisceaux fins

THÉORÈME 5.2. - Le faisceau des germes de fonctions continues sur X à valeurs réelles ou complexes est fin. Le faisceau des germes de fonctions différentiables à valeurs réelles ou complexes sur une variété différentiable dénombrable à l'infini est fin. Le faisceau des germes de formes différentiables de degré p sur une variété différentiable dénombrable à l'infini est fin.

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème suivant :

THÉOREME 5.3. - Soit X un espace paracompact (resp. variété différentiable C^∞ dénombrable à l'infini) pour tout recouvrement localement fini $\{U_i\}_{i \in I}$, il existe une partition de l'unité par des fonctions φ_i continuez (resp. différentiables C^∞)

On rappelle qu'étant donné un recouvrement localement fini $\underset{\sim}{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ d'un espace X , on dit qu'une famille de fonction $\{\varphi_i\}$ à valeurs réelles est une partition de l'unité associée à $\underset{\sim}{U}$ si :

1° $\varphi_i(x) \geqslant 0$ pour $x \in X$

2° $\varphi_i(x) = 0$ en dehors d'un fermé contenu dans U_i

3° $\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$.

Le théorème 5.3 est une conséquence immédiate de la définition et du théorème d'Urysohn dans le cas continu ; voir [4] pour le cas différentiable.

DÉMONSTRATION de 5.2. - Démontrons-le dans le cas du faisceau des germes de fonctionscontinues sur X à valeurs réelles : les autres cas sont identiques. Soient F ce faisceau, et $\underset{\sim}{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement localement fini auquel est associéeune partition de l'unité $\{\varphi_i\}$. Soit $F_U = \Gamma(U , F)$ l'ensemble des fonctions continues sur U et $f \in F_U$. On pose $\ell_i(f) = \varphi_i f$. ℓ_i est un homomorphisme $\underset{\sim}{F} \to \underset{\sim}{F}$ du préfaisceau $\underset{\sim}{F}$ canonique , qui induit un homomorphisme $\ell_i : F \to F$. Les homomorphismes ℓ_i ont les propriétés demandées.

REMARQUE. - Comme il n'existe pas de partition de l'unité holomorphe (et pour cause !) le faisceau des germes de fonctions analytiques sur une variété analytique complexe n'est pas fin.

6. Deux applications.

Classification des $U(1)$ - fibrés. - D'une manière générale on a montré dans [5] qu'il y avait une application biunivoque de l'ensemble des fibrés principaux sur X paracompact (resp. variété différentiable C^∞ dénombrable à l'infini) de fibre un groupe topologique (resp. de Lie) G sur l'ensemble de cohomologie $H^1(X , G_c)$ (resp $H^1(X , G_d)$). Or $U(1)$ est un groupe commutatif et l'on voit sans peine (en revenant à la définition de $H^1(X , G_c)$ ou $H^1(X , G_d)$) que $H^1(X , U(1)_c)$ et $H^1(X , U(1)_d)$ ne sont autresque $H^1(X , C_c^*)$ et $H^1(X , C_d^*)$ tels qu'ils ont été défini dans cet exposé C_c^* et C_d^* représentant les faisceaux définis dans l'exposé 5 , paragraphe 8 dans le cas continu et le cas différentiable. Or on a dans ces deux cas la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow C \longrightarrow C^* \longrightarrow 0$$

d'où la suite exacte de cohomologie

$$\ldots H^1(X , C) \longrightarrow H^1(X , C^*) \xrightarrow{\partial} H^2(X , \mathcal{C}) \longrightarrow H^2(X , C)$$

mais le faisceau C est fin donc $H^1(X , C) = H^2(X , C) = 0$ et par conséquent $\partial : H^1(X , C^*) \approx H^2(X , \mathcal{C})$. Or on voit immédiatement que la cohomologie à valeurs dans un faisceau constant n'est autre que la cohomologie de Čech donc

PROPOSITION 6.1. - ∂ *établit un isomorphisme de l'ensemble des* $U(1)$ - *fibrés continus ou différentiables sur le deuxième groupe de cohomologie de* X *à coefficients entiers.*

Dans le cas analytique, C n'est plus un faisceau fin et la classification précédente n'est plus valable.

THÉORÈME de de Rham.

a. Résolutions. - Considérons sur X paracompact, une suite exacte

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow F \xrightarrow{h} F_0 \xrightarrow{h_0} F_1 \xrightarrow{h_1} F_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_p \xrightarrow{h_p} \ldots$$

On dit que cette suite est une résolution de F quand les groupes de cohomologie $H^q(X , F_p)$ sont nuls pour $q \geq 1$ et $p \geq 0$. En particulier, quand tous les faisceaux F_p sont fins on dit que la résolution est fine.

A la résolution (1) correspond par Γ la suite d'homomorphismes de groupes abéliens

(2) $\quad 0 \longrightarrow \Gamma(X , F) \xrightarrow{h} \Gamma(X , F_0) \xrightarrow{h_0} \Gamma(X , F_1) \xrightarrow{h_1} \cdots \longrightarrow \Gamma(X , F_p) \xrightarrow{h_p} \cdots$

cette suite n'est plus exacte, mais on a encore $h_{p+1} \circ h_p = 0$.

Si on appelle K la somme directe $\sum_{p=0}^{\infty} \Gamma(X , F_p)$, K muni des homomorphismes h_p est un <u>groupe abélien différentiel gradué</u> dont on peut calculer les groupes de cohomologie $H^p(K)$.

THÉORÈME 6.2. - $\quad H^q(X , F) \approx H^q(K) \quad$ pour $q \geqslant 0$.

DÉMONSTRATION. - On a $H^0(X , F) \approx H^0(K)$ car $H^0(X , F) \approx \Gamma(X , F)$, et que la suite (2) est exacte jusqu'à $\Gamma(X , F_1)$. Désignons par N_p le sous-faisceau de F_p noyau de h_p .

La suite (1) étant exacte, on a une suite exacte

(3) $$0 \longrightarrow N_p \longrightarrow F_p \xrightarrow{h_p} N_{p+1} \longrightarrow 0 \quad p \geqslant 0$$

mais comme $H^q(X , F_p) = 0$ pour $q \geqslant 1$ la suite exacte de cohomologie donne des isomorphismes.

(4) $$H^{q-1}(X , N_{p+1}) \approx H^q(X , N_p) \quad \text{pour } q \geqslant 2 .$$

Comme $N_0 = F$, on a par applications successives de (4)

$$H^1(X , N_{q-1}) \approx H^q(X , F)$$

Ecrivons le début de la suite exacte (3) avec $p = q - 1$

$$H^0(X , F_{q-1}) \xrightarrow{h^*_{q-1}} H^0(X , N_q) \longrightarrow H^1(X , N_{q-1}) \longrightarrow H^1(X , F_q) = 0$$

Or $H^0(X , F_{q-1}) = \Gamma(X , F_{q-1})$, $H^0(X , N_q) = \Gamma(X , N_q)$. Et, des suites exactes $0 \longrightarrow N_{q-1} \longrightarrow F_{q-1} \longrightarrow N_q \longrightarrow 0$, $0 \longrightarrow N_q \longrightarrow F_q \longrightarrow N_{q+1} \longrightarrow 0$, on tire les suites exactes :

$$0 \longrightarrow \Gamma(X , N_{q-1}) \longrightarrow \Gamma(X , F_{q-1}) \xrightarrow{h_{q-1}} \Gamma(X , N_q)$$

$$0 \longrightarrow \Gamma(X , N_q) \longrightarrow \Gamma(X , F_q) \xrightarrow{h_q} \Gamma(X , N_{q+1})$$

qui montrent que

$$h^*_{q-1} H^0(X , F_{q-1}) = h_{q-1} \Gamma(X , F_{q-1})$$

$$\Gamma(X, N_q) = \text{noyau de } h_q : \Gamma(X, F_q) \longrightarrow \Gamma(X, F_{q+1})$$

C.Q.F.D.

b. On désigne par A_p le faisceau des germes de formes différentielles différentiables de degré p sur la variété différentiable X. (en particulier, une forme de degré 0 étant une fonction différentiable A_0 = faisceau des germes de fonctions différentiables) et par R le faisceau constant des nombres réels. La différentiation extérieure d applique $\Gamma(U, A_p)$ dans $\Gamma(U, A_{p+1})$ et induit un homomorphisme $h_p : A_p \longrightarrow A_{p+1}$. Comme $d \circ d = 0$, on a $h_{p+1} \circ h_p = 0$.

LEMME de Poincaré. - La suite :

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{h} A_0 \xrightarrow{h_0} A_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow A_p \xrightarrow{h_p} \dots$$

est une résolution fine de R. (h est inclusion de R dans A_0). Il suffit de montrer que la suite est exacte car les A_p sont tous fins, donc ont une cohomologie nulle en dimensions $\geqslant 1$.

Comme $h_{p+1} \circ h_p = 0$, il reste à montrer que tout élément de A_{p+1} annulé par h_{p+1} appartient à l'image de h_p .autrement dit, étant donnés un ouvert U et ω une $p+1$ forme de $\Gamma(U, A_{p+1})$ telle que $d\omega = 0$, il existe un voisinage $V \subset U$ et une p-forme α définie dans V telle que $d\alpha = \omega$ dans V. C'est un problème purement local : on peut supposer que U est un voisinage de R^n et le lemme de Poincaré classique montre que V et α existent.

APPLICATION. - Le théorème 6.2 montre alors que $H^q(X, R) \approx H^q(K)$. Mais $H^q(K)$ n'est autre que le groupe des formes différentielles de degré p définies sur tout X et annulées par d modulo le groupe des images par d des formes différentielles sur X de degré $p-1$. Donc :

THÉORÈME 6.3. - Le groupe de cohomologie de Čech d'une variété différentiable est canoniquement isomorphe au groupe de cohomologie défini par le groupe différentiel gradué des formes différentielles différentiables muni de la différentielle extérieure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] de RHAM (Georges). - Variétés différentiables ... - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind. n° 1222).

[2] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Math., t. 61, 1955, p. 197-278.

[3] ZISMAN (Michel). - Eléments de cohomologie, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 10, 1956/57, exposé 8.

[4] ZISMAN (Michel). - Homologie et cohomologie de Čech, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 10, 1956/57, exposés 11 et 14.

[5] ZISMAN (Michel). - Espaces fibrés, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 10, 1956/57, exposé 17.