

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

JEAN BENABOU

Treillis locaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, n° 1 (1957-1958), exp. n° 7,
p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_1_A7_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-

Séminaire P. DUBREIL
 M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
 (ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
 Année 1957/58

16 décembre 1957

-:-:-

TREILLIS LOCAUX

par Jean BENABOU

1. Généralités.

INTRODUCTION. - Soit E un espace topologique, \mathcal{O} l'ensemble des ouverts ordonné par inclusion. Pour cet ordre, \mathcal{O} est un treillis complet d'élément maximum E et d'élément minimum Φ dans lequel l'union et l'intersection d'une famille quelconque d'éléments sont données par :

$$\bigvee_{i \in I} 0_i = \bigcup_{i \in I} 0_i \quad \text{et} \quad \bigwedge_{i \in I} 0_i = \overline{\left(\bigcap_{i \in I} 0_i \right)} = \bigcup \left\{ 0 : 0 \in \mathcal{O}, 0 \subset \bigcap_{i \in I} 0_i \right\}$$

(les symboles \bigcup et \bigcap sont réservés à la réunion et l'intersection ensemblistes et : A étant un sous-ensemble quelconque de E on note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A) en particulier l'intersection finie dans \mathcal{O} coïncide avec l'intersection ensembliste. Cela montre que \mathcal{O} vérifie la loi de distributivité générale :

$$(1) \quad 0 \wedge \left(\bigvee_{i \in I} 0_i \right) = \bigvee_{i \in I} (0 \wedge 0_i)$$

le treillis des ouverts jouant un rôle considérable dans l'étude de la topologie de E , on est conduit à étudier de façon générale des treillis distributifs complets vérifiant (1) (treillis locaux). On s'aperçoit alors que :

1° la plupart des définitions et des résultats de topologie se conservent dans de tels treillis ;

2° il existe des treillis locaux qui ne sont pas isomorphes à des treillis d'ouverts.

DÉFINITION 1. - Un treillis local est un treillis complet \wedge vérifiant :
 $x \wedge \left(\bigvee_{i \in I} x_i \right) = \bigvee_{i \in I} (x \wedge x_i)$ pour tout $x \in \wedge$ et toute famille $\{x_i\}_{i \in I}$ d'éléments de \wedge .

De la définition résulte que \wedge est distributif, possède un élément maximum noté e et un élément minimum noté 0 .

Un tel treillis s'appelle dans la littérature ([1] p. 147) treillis distributif complet et pseudo-complémenté. En effet tout $x \in \wedge$ possède un complément x^* vérifiant $x \wedge y = 0 \iff y < x^*$. Il suffit de remarquer que la loi de distributivité implique que $\bigvee \{y : y \wedge x = 0\}$ est le complément unique cherché.

THÉORÈME 1 (Glivenko). - L'ensemble ordonné \wedge^* des pseudo compléments est une algèbre de Boole complète et l'application : $f : a \rightarrow a^{**}$ de \wedge dans \wedge^* respecte les intersections finies et unions quelconques.

On trouvera une démonstration de ce théorème dans [1] ou dans [2].

Notons que l'intersection dans \wedge^* est la même que dans \wedge , mais que l'union est donnée par :

$$\bigvee_{\alpha} x_{\alpha}^{**} = \left(\bigwedge_{\alpha} x_{\alpha}^* \right)^* .$$

Exemples de treillis locaux :

1° Comme nous l'avons vu dans l'introduction, le treillis des ouverts d'un espace topologique est local.

2° Appliquons le théorème de Glivenko dans ce cas particulier : cf [2]. O étant un ouvert quelconque, $O^* = \left(\bigcap O \right)$ mais $\bigcap O$ est un fermé quelconque. Donc les intérieurs des fermés forment un treillis de Boole complet (qui est toujours un treillis local). Le treillis ainsi construit à partir de R^n n'a aucun point

3° Soit E un espace localement compact, μ une mesure sur E . L'algèbre de Boole des ensembles mesurables à un ensemble de mesure nulle près est complète donc locale.

4° L'ensemble des congruences dans un treillis quelconque forme un treillis local (cf [1] p. 24)

5° L'ensemble des filtres d'un treillis distributif, ordonné par inclusion est un treillis local [4] ou [1] (exercice).

2. Plongement d'un demi treillis dans un treillis local.

Soit L un ensemble ordonné, tel que toute famille finie d'éléments de L possède une intersection. On dira qu'une famille $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ d'éléments de L a une \bigvee^* si les $\{x_{\alpha}\}$ ont une union vérifiant $x \wedge \left(\bigvee_{\alpha} x_{\alpha} \right) = \bigvee_{\alpha} (x \wedge x_{\alpha})$ on note alors cette union \bigvee^* . Un sous-ensemble K de L est un cône si : $(x \in K \text{ et } y < x) \implies y \in K$. Un sous-ensemble \mathcal{J} de L est un \bigvee^* -idéal (plus

brièvement idéal) si : $(\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset I \text{ et } \bigvee^* x_\alpha \text{ existe}) \Rightarrow \bigvee^* x_\alpha \in I$ et en outre \mathcal{J} est un cône.

PROPOSITION 1. - L'ensemble \mathcal{J} des idéaux de L est un treillis complet pour l'ordre induit par l'inclusion. Dans \mathcal{J} l'intersection coïncide avec l'intersection des ensembles. En effet

i) L est un idéal et $L \supset I$ quel que soit $I \in \mathcal{J}$

ii) si $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{J}$, $\bigcap_\alpha I_\alpha \in \mathcal{J}$

Notons que l'union dans \mathcal{J} d'une famille d'idéaux est donnée par :

$$\bigvee_{\alpha} I_\alpha = \bigcap \{I : I \in \mathcal{J}, I \supset I_\alpha \text{ pour tout } \alpha\}.$$

LEMME 1. - Soit $A \subset L$, la correspondance $A \rightarrow \bar{A} = \bigcap \{I : I \in \mathcal{J}, I \supset A\}$ est une fermeture; on vérifie immédiatement en effet que : $A \subset \bar{A}$, $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ et $(A \subset B) \Rightarrow (\bar{A} \subset \bar{B})$.

Nous allons donner une construction de \bar{A} . Soit $\Gamma(A)$ le sous-ensemble de L obtenu en adjoignant à A tout élément de L inférieur à au moins un élément de A et toute \bigvee^* de tels éléments. L'application $A \rightarrow \Gamma(A)$ de $\mathcal{P}(L)$ dans $\mathcal{P}(L)$ vérifie : $\Gamma(A) \supset A$ et $(A \supset B) \Rightarrow \Gamma(A) \supset \Gamma(B)$. Pour tout ordinal α définissons A_α par induction :

$$A_0 = A \quad ; \quad A_{\alpha+1} = \Gamma(A_\alpha) \quad ; \quad A_\tau = \bigcup_{\alpha < \tau} A_\alpha \text{ (si } \tau \text{ est un ordinal limite)}$$

La suite transfinie des A_α devient stationnaire et sa limite \tilde{A} vérifie $\Gamma(\tilde{A}) = \tilde{A}$. Si I est un idéal contenant A , I contient tous les A_α donc $I \supset \tilde{A}$ donc $\bigcap \{I : I \in \mathcal{J}, I \supset A\} = \bar{A} \supset \tilde{A}$. Mais \tilde{A} est lui-même un idéal contenant A donc $\tilde{A} = \bar{A}$.

LEMME 2. \Rightarrow A et B étant deux sous-ensembles de L , si on pose

$$A \wedge B = \{a \wedge b : a \in A, b \in B\}$$

on a :

$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \wedge \bar{B}.$$

Démontrons d'abord que si $A \wedge B \subset \bar{C}$ alors $\bar{A} \wedge \bar{B} \subset \bar{C}$.

i. $A_0 \wedge B = A \wedge B \subset \bar{C}$ par hypothèse.

ii. si $A_\alpha \wedge B \subset \bar{C}$, $A_{\alpha+1} \wedge B \subset \bar{C}$ en effet, soit $x \in A_{\alpha+1} \wedge B$: $x = a \wedge b$ où $b \in B$ et $a = \bigvee_i^* x_i$ chaque x_i étant inférieur à un $a_i \in A_\alpha$ donc

$$x = (\bigvee_i^* x_i) \wedge b = \bigvee_i^* (x_i \wedge b), \text{ or } x_i \wedge b \in A_\alpha \wedge B \subset \bar{C}$$

donc

$$x_i \wedge b \in \bar{C} \text{ et } \bigvee^*(x_i \wedge b) = x \in \bar{C} = \bar{C}$$

iii. Soit τ un ordinal limite ; si pour tout $\alpha < \tau$, $A_\alpha \wedge B \subset \bar{C}$ on a

$$A_\tau \wedge B = \left[\bigcup_{\alpha < \tau} A_\alpha \right] \wedge B = \bigcup_{\alpha < \tau} (A_\alpha \wedge B) \subset \bar{C}$$

la propriété est donc vraie pour tout ordinal, donc $\bar{A} \wedge B \subset \bar{C}$ l'intersection étant commutative $A \wedge B \subset \bar{C} \rightarrow A \wedge \bar{B} \subset \bar{C}$ donc aussi $\bar{A} \wedge \bar{B} \subset \bar{C}$. Pour $\bar{C} = \overline{A \wedge B}$, on a $A \wedge B \subset \overline{A \wedge B}$ donc $\bar{A} \wedge \bar{B} \subset \overline{A \wedge B}$.

D'autre part \bar{A} et \bar{B} étant des cônes $\bar{A} \wedge \bar{B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

De $\bar{A} \wedge \bar{B} \supset A \wedge B$ on déduit $\overline{\bar{A} \wedge \bar{B}} = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}} \supset \overline{A \wedge B}$ d'où l'égalité cherchée.

THEOREME 2. - L'ensemble \mathcal{J} des idéaux est un treillis local.

Vérifions la distributivité générale $I \wedge_{\mathcal{J}} \left[\bigvee_{\alpha} I_{\alpha} \right] = \bigvee_{\alpha} (I \wedge_{\mathcal{J}} I_{\alpha})$

i. $\bigvee_{\alpha} I_{\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha} I_{\alpha}}$ en effet $\overline{\bigcup_{\alpha} I_{\alpha}} \supset \bigvee_{\alpha} I_{\alpha}$ pour tout α et est un idéal donc $\overline{\bigcup_{\alpha} I_{\alpha}} \supset \bigvee_{\alpha} I_{\alpha}$ d'autre part $\bigcup_{\alpha} I_{\alpha} \subset \bigvee_{\alpha} I_{\alpha}$ donc $\overline{\bigcup_{\alpha} I_{\alpha}} \subset \bigvee_{\alpha} I_{\alpha} = \bigvee_{\alpha} I_{\alpha}$.

ii. $I \wedge_{\mathcal{J}} \left[\bigvee_{\alpha} I_{\alpha} \right] = I \cap \left[\overline{\bigcup_{\alpha} I_{\alpha}} \right] = \overline{I \cap \left[\bigcup_{\alpha} I_{\alpha} \right]}$ (cf Lemme 2) mais I et $\bigcup_{\alpha} I_{\alpha}$ étant des cônes $I \cap \left[\bigcup_{\alpha} I_{\alpha} \right] = I \cap \left[\bigcup_{\alpha} I_{\alpha} \right] = \bigcup_{\alpha} (I \cap I_{\alpha})$ donc

$$I \wedge_{\mathcal{J}} \left[\bigvee_{\alpha} I_{\alpha} \right] = \overline{\bigcup_{\alpha} (I \cap I_{\alpha})} = \bigvee_{\alpha} (I \wedge_{\mathcal{J}} I_{\alpha})$$

NB. - Quand plusieurs treillis interviennent en même temps et qu'il peut y avoir confusion, on note l'intersection et la réunion dans un treillis T : $\bigwedge_T x_{\alpha}$ et $\bigvee_T x_{\alpha}$; si elles sont en outre distributives on les note $\bigwedge_T^* x_{\alpha}$ et $\bigvee_T^* x_{\alpha}$.

THEOREME 3. - La correspondance $f : x \rightarrow I(x) = \{y : y \in L, y < x\}$ est un isomorphisme de L sur un sous-ensemble de \mathcal{J} , qui respecte les intersections quelconques et les unions distributives de L , l'image de L engendre \mathcal{J} .

i. Si $x = \bigwedge_L x_i$, $x < x_i$ pour tout $i \Rightarrow x \in \bigcap_i I(x_i) = \bigwedge_{\mathcal{J}} I(x_i)$ donc $I(x) \subset \bigwedge_{\mathcal{J}} I(x_i)$ d'autre part si $y \in \bigwedge_{\mathcal{J}} I(x_i)$, $y < x_i$ pour tout i donc $y < x$ et $y \in I(x)$ et $\bigwedge_{\mathcal{J}} I(x_i) \subset I(x)$ d'où l'égalité.

ii. Si $x = \bigvee^* x_i$, $x_i \in \bigcup_i I(x_i) \Rightarrow x \in \overline{\bigcup_i I(x_i)} = \bigvee_{\mathcal{J}} I(x_i)$ donc $I(x) \subset \bigvee_{\mathcal{J}} I(x_i)$ d'autre part chaque x_i étant $< x$, $I(x_i) \subset I(x)$ pour tout i donc $\bigvee_{\mathcal{J}} I(x_i) \subset I(x)$.

iii. Si L possède un minimum 0 (resp. un maximum e) $I(0) = \{0\}$ est minimum dans \mathcal{J} (resp. $I(e) = L$ est maximum dans L)

iv. Soit I un idéal quelconque, $I = \bigvee \{I(x) : x \in I\}$ or les $I(x)$ sont des images d'éléments de L , lesquels forment donc une base de \mathcal{J} (pour les unions quelconques).

3. Plongement d'un treillis local dans une algèbre de Boole.

On sait que tout treillis distributif peut être plongé avec conservation des unions et intersections finies dans un treillis d'ensembles, c'est-à-dire une algèbre de Boole. Nous allons montrer que ce résultat peut être amélioré en abandonnant une représentation ensembliste et en remplaçant l'algèbre de Boole des sous-ensembles d'un ensemble par une algèbre de Boole complète. Une telle immersion a été traitée [3] dans le cas où L vérifie la propriété de disjonction de Stone. Si \wedge est un treillis distributif, on construira un plongement respectant les intersections finies et les unions distributives quelconques. En particulier si \wedge est local, l'immersion conservera toutes les unions puisqu'elles ^{étaient} distributives. En considérant \wedge comme un treillis d'"ouverts" d'un "espace sans points" l'algèbre de Boole construite est l'algèbre de Boole engendrée par les "ouverts" et les "fermés" de l'"espace sans points".

\wedge sera dans la suite un treillis distributif.

Soit \wedge^* l'ensemble des couples (a, a') (a et $a' \in \wedge$) ordonné par :

$$(a, a') < (b, b') \iff a < a' \vee b \quad \text{et} \quad a \wedge b' < a'$$

LEMME 3. - La relation $<$ est un préordre sur \wedge^* .

i. $(a, a') < (a, a')$ car $a < a' \vee a$ et $a \wedge a' < a'$.

ii. $(a, a') < (b, b')$ et $(b, b') < (c, c')$ entraînent :

$$a < a' \vee b \quad ; \quad a \wedge b' < a' \quad ; \quad b < b' \vee c \quad ; \quad b \wedge c' < b'$$

d'où on tire :

$$a < a' \vee b < a' \vee b' \vee c$$

donc

$$a = (a \wedge a') \vee (a \wedge b') \vee (a \wedge c) < a' \vee (a \wedge b') \vee c = a' \vee c$$

$$a' > a \wedge b' > a \wedge b \wedge c'$$

et aussi

$$a > a \wedge a' \wedge c' \implies a' > (a \wedge c' \wedge a') \vee (a \wedge c' \wedge b)$$

$$a' > (a \wedge c') \wedge (a' \vee b) = a \wedge c'$$

C.Q.F.D.

Le quotient \wedge' de \wedge^* par la relation $(a, a') \sim (b, b') \Leftrightarrow (a, a') < (b, b')$ et $(a, a') > (b, b')$ est alors ordonné par la relation quotient, la classe de (a, a') dans \wedge' sera notée $[a, a']$.

LEMME 4. - Si $\bigwedge_i^* a_i$ et $\bigvee_T^* a_i$ existent alors $\bigwedge [a_i, a'_i]$ existe et est égale à $[\bigwedge_i^* a_i, \bigvee_T^* a'_i]$.

En effet quel que soit i : $\bigwedge_T^* a_i < (\bigvee_T^* a'_i) \vee a_i$ et $(\bigwedge_T^* a_i) \wedge a'_i < \bigvee_T^* a'_i$ donc $[\bigwedge_i^* a_i, \bigvee_T^* a'_i] < [a_i, a'_i]$ pour tout i .

Supposons d'autre part que $[x, x'] < [a_i, a'_i]$ quel que soit i ; alors

$$\left. \begin{array}{l} x < x' \vee a_i \Rightarrow x < \bigwedge_i^* (x' \vee a_i) = x' \vee (\bigwedge_i^* a_i) \\ x \wedge a'_i < x' \Rightarrow \bigvee^* x \wedge a'_i = x \wedge (\bigvee^* a'_i) < x' \end{array} \right\} \text{ donc } [x, x'] < [\bigwedge_i^* a_i, \bigvee^* a'_i].$$

Remarquons que dans \wedge toute union finie et toute intersection finie sont distributives donc \wedge' est un demi treillis pour l'intersection.

LEMME 5. - Dans \wedge'

- i. $[x, x] = [0, 0]$ quel que soit $x \in \wedge$ et c'est l'élément minimum
 - ii. $[e, 0]$ est l'élément maximum de \wedge'
 - iii. pour tout $a \in \wedge$, $[a, 0]$ et $[e, a]$ sont complémentaires dans \wedge'
- i. et ii. se vérifient trivialement en revenant à la définition de l'ordre de \wedge' ;
- iii. $[a, 0] \wedge [e, a] = [a, a]$ (lemme 4) et $[a, a] = [0, 0]$ i.

D'autre part supposons $[x, x'] > [e, a]$ et $[x, x'] > [a, 0]$. On a : $a < x$ donc $a \vee x = x$ d'autre part $e < a \vee x$ donc $a \vee x = x = e$.

En outre : $e \wedge x' = x' < a$ et $a \wedge x' < 0$ donc $x' = 0$ et $[x, x'] = [e, 0]$; en outre $[e, a] \vee [a, 0]$ est dans \wedge' une union distributive. Il faut vérifier que pour tout $[x, x'] \in \wedge'$ on a :

$$[x, x'] = ([x, x'] \wedge [a, 0]) \vee ([x, x'] \wedge [e, a])$$

c'est-à-dire que

$$[x, x'] = [x \wedge a, x'] \vee [x, a \vee x']$$

(On ne sait pas que l'union écrite au second membre de l'équation existe dans \wedge' mais on sait déjà que $[x, x']$ est supérieur à chacun des deux termes de cette union, il suffit donc de démontrer que si $[y, y'] \in \wedge'$ est supérieur à ces deux termes, il est aussi supérieur à $[x, x']$ c'est-à-dire que : $x < x' \vee y$ et

$$x \wedge y' < x' .$$

$$[a \wedge x, x'] < [y, y'] \iff \begin{cases} (1) & a \wedge x < x' \vee y \\ (2) & a \wedge x \wedge y' < x' . \end{cases}$$

$$[x, a \vee x'] < [y, y'] \iff \begin{cases} (3) & x < a \vee x' \vee y \\ (4) & x \wedge y' < a \vee x' . \end{cases}$$

L'inégalité (3) implique : $x = x \wedge (a \vee x' \vee y) = (x \wedge a) \vee [x \wedge (x' \vee y)]$
 et d'après : (1) on a : $(x \wedge a) \vee [x \wedge (x' \vee y)] < (x' \vee y) \vee [x \wedge (x' \vee y)] = x' \vee y$
 donc $x < x' \vee y$.

D'autre part on a : $x' > x' \wedge x \wedge y'$.

et d'après l'inégalité (2) : $x' > (a \wedge x \wedge y')$ donc $x' > (a \wedge x \wedge y') \vee (x' \wedge x \wedge y')$
 d'où $x' > (a \vee x') \wedge (x \wedge y')$ qui n'est autre que : $x \wedge y'$ d'après l'inégalité (4)

THEOREME 4. - L'application : $a \rightarrow [a, 0]$ est un isomorphisme de \wedge sur un sous-ensemble de \wedge' qui transforme le maximum (resp. le minimum de \wedge) en maximum (minimum) de \wedge' . Toute intersection distributive de \wedge devient intersection dans \wedge' et toute union distributive de \wedge devient union distributive dans \wedge'

i. $(a, 0) < (b, 0) \iff a < 0 \vee b$ et $a \wedge 0 < 0$ donc $\iff a < b$ donc
 $[a, 0] < [b, 0] \iff a < b$

ii. si les a_i ont une \wedge^* , d'après le lemme 4 :

$$\bigwedge [a_i, 0] = [\bigwedge^* a_i, 0] .$$

iii. a, a' et b étant trois éléments quelconques de \wedge , on a :
 $a < b \implies [a, a'] < [b, a']$ (immédiat) en particulier si les $a_i \in \wedge$ ont une \vee^* on a pour tout i : $[a_i, a'] < [\vee^* a_i, a']$.

Soit d'autre part $[x, x'] > [a_i, a']$ pour tout i alors :

$$a_i < x \vee a' \implies \vee^* a_i < a' \vee x$$

de même

$$a_i \wedge x < a' \implies \vee^*(a_i \wedge x) < a'$$

donc

$$x \wedge (\vee^* a_i) < a'$$

et

$$[\vee^* a_i, a'] < [x, x']$$

On voit déjà que :

$$\bigvee_{\wedge'} [a_i, a'] = [\bigvee_{\wedge}^* a_i, a']$$

en particulier pour $a' = 0$

$$\bigvee_{\wedge'} [a_i, 0] = [\bigvee_{\wedge}^* a_i, 0].$$

Soit maintenant $[b, b']$ quelconque dans \wedge'

$$\begin{aligned} [b, b'] \wedge \left\{ \bigvee_{\wedge'} [a_i, 0] \right\} &= [b, b'] \wedge [\bigvee_{\wedge}^* a_i, 0] = [b \wedge (\bigvee_{\wedge}^* a_i), b'] = [\bigvee_{\wedge}^* (b \wedge a_i), b'] \\ &= \bigvee_{\top'} [b \wedge a_i, b'] = \bigvee_{\top'} \{ [b, b'] \wedge [a_i, 0] \} \end{aligned}$$

(la deuxième égalité, étant conséquence du lemme 4) donc l'union des $[a_i, 0]$ est bien distributive.

Remarquons en outre que dans \wedge' on a

$$[a, a'] = [a, 0] \wedge [e, a'].$$

Construction de l'algèbre de Boole : \wedge' est un demi-treillis pour l'intersection,

on peut donc le plonger dans un treillis local M par une application biunivoque

Φ vérifiant $\Phi(\bigwedge_{\alpha} \lambda_{\alpha}) = \bigwedge_M \Phi(\lambda_{\alpha})$ et $\Phi(\bigvee_{\wedge'}^* \lambda_{\alpha}) = \bigvee_M^* \Phi(\lambda_{\alpha})$. Tout élément μ de M est de la forme $\mu = \bigvee_M^* \Phi(\lambda_{\alpha})$ pour une famille $\{\lambda_{\alpha}\} \subset \wedge'$

Soit $M^{**} = B$ l'algèbre de Boole des pseudo-compléments de M et φ l'application $M \rightarrow B$ définie par $\varphi(\mu) = \mu^{**}$.

THEOREME 5. - L'application $p = \varphi \circ \Phi \circ f$ de \wedge dans B est une application biunivoque de \wedge dans une algèbre de Boole complète vérifiant :

$$p(0_{\wedge}) = 0_B ; p(e_{\wedge}) = e_B ; p(\bigwedge_{1 \leq i \leq n}^* \lambda_i) = \bigwedge_B^* p(\lambda_i) ; p(\bigvee_{\wedge}^* \lambda_{\alpha}) = \bigvee_B^* p(\lambda_{\alpha}) ;$$

en outre tout élément de B est l'union, dans B , d'images par p d'éléments de \wedge ou de complémentaires de tels éléments.

Les quatre égalités se vérifient immédiatement (composition d'applications qui respectent les intersections finies et unions distributives).

Si $x \neq y$ dans $\wedge \Rightarrow [x, 0] \neq [y, 0]$ et $\Phi([x, 0]) \neq \Phi([y, 0])$ car Φ est biunivoque, en outre $[x, 0]$ et $[y, 0]$ ont des complémentaires dans \wedge' et les deux unions $[x, 0] \vee [e, x]$ et $[y, 0] \vee [e, y]$ qui sont distributives dans \wedge' sont respectées par Φ donc $\Phi([x, 0]) \vee_M \Phi([e, x]) = e_M$ et

$$\Phi([x, 0]) \wedge_M \Phi([e, x]) = \Phi([x, 0]) \wedge_{\wedge'} [e, x] = \Phi(0_{\wedge'}) = 0_M$$

de même pour $[y, 0]$ et $[e, y]$. Donc $\Phi[x, 0]$ et $\Phi[y, 0]$ ont des complémentaires dans M . Alors $[\Phi([x, 0])]^{**} = \varphi(\Phi([x, 0])) = \Phi([x, 0])$ donc $p(x) \neq p(y)$ et p est bien injective.

Enfin tout élément de \wedge' est de la forme $f(a) \wedge f^*(a')$ et tout élément de M est union d'images de tels éléments.

COROLLAIRE. - Si \wedge était déjà un treillis local, le théorème 5 montre que le plongement respecte les intersections finies et les unions quelconques car elles étaient toutes distributives.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BIRKHOFF (Garrett). - Lattice theory. - New York, American mathematical Society, 1948 (American mathematical Society Colloquim Publications n° 25).
 - [2] LESIEUR (Léonce). - Les treillis en topologie I et II, Séminaire Châtelet-Dubreil : Algèbre et théorie des nombres, t. 7, 1953/54.
 - [3] LESIEUR (Léonce). - Sur un problème d'immersion, Proc. internat. Congress Math., Amsterdam 1954 vol. 2 : Short Lectures. - Groningen, Noordhoff et Amsterdam, North-Holland publishing 1954 ; p. 40-41.
 - [4] STONE (M.H.). - Applications of the theory of Boolean rings of general topology, Trans. Amer. math. Soc., t. 41, 1937, p. 375-481.
-