

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

M. P. SCHÜTZENBERGER

Nouvelle démonstration du théorème de Schreier sur les sous-groupes d'un groupe libre par son extension au cas des demi-groupes libres

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, n° 1 (1957-1958), exp. n° 6,
p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_1_A6_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL,
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)

16 décembre 1957

Année 1957/58

-:-:-:-

NOUVELLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE SCHREIER SUR LES SOUS-GROUPES
D'UN GROUPE LIBRE PAR SON EXTENSION AU CAS DES DEMI-GROUPES LIBRES.

par M.P. SCHÜTZENBERGER.

1. Dans cet exposé, on fera toujours l'hypothèse que les demi-groupes considérés contiennent un élément unité e (sont des "monoïdes") et par "sous demi-groupe" on entendra "sous-demi-groupe contenant e " (c'est-à-dire "sous monoïde").

Le théorème de Schreier peut être formulé de la façon suivante :

(1) Une condition nécessaire et suffisante pour que le sous-demi-groupe H du groupe libre G soit un groupe libre est qu'il satisfasse la condition U_d :

$$U_d : \bigvee_G^s sH \cap Hs \cap H \neq \emptyset \Rightarrow s \in H.$$

En effet, dans les conditions de l'énoncé, U_d signifie simplement que H est non seulement un sous-demi-groupe mais un sous-groupe de G . (Car si $s \notin H$, on a $s s^{-1} = s^{-1} s = e \in H$ et, donc, $s^{-1} \in H$).

Par contre, la proposition analogue concernant les demi-groupes :

(1') Une condition nécessaire et suffisante pour que le sous-demi-groupe A du demi-groupe libre F soit un demi-groupe libre, est qu'il satisfasse U_d , peut être prouvée beaucoup plus directement (cf, par exemple, M.P. SCHÜTZENBERGER [6]) ou comme un corollaire d'un théorème de F. Levi ou, encore, comme un cas particulier d'un énoncé sur les produits libres de demi-groupes.

Le but de cet exposé est de montrer que la version "groupe" (1), du théorème de Schreier peut être déduite très simplement de la version "demi-groupe" (1') moyennant quelques corollaires des théorèmes généraux de la théorie des demi-groupes unitaires de P. Dubreil [1] (Section 2 ci-dessous) et une remarque combinatoire (section 3 ci-dessous) qui présente elle-même une certaine utilité pour un problème de mathématiques appliquées (celui de la marche au hasard sur un groupe libre).

2. Dans cette section, on considère un demi-groupe libre F , un groupe G (avec

l'élément neutre e') et un homomorphisme φ de F sur G .

PROPOSITION 2.1. - Si H est un sous-groupe de G , $A = \overline{\varphi}^{-1} H$ est un sous-demi-groupe libre de F .

DÉMONSTRATION. - H est "unitaire" dans G (cf. P. DUBREIL [1]) (c'est-à-dire qu'il satisfait $U_k : \forall_G^s HsH \cap H \neq \emptyset \Rightarrow s \in H$). Donc A dans F satisfait U_k et, a fortiori, U_d . D'où le résultat, d'après (1').

REMARQUE. - On peut démontrer 2.1 directement en utilisant seulement le fait que F est libre et que A satisfait U_k . Soit $A_1 = (A - e) - (A - e)^2$ l'ensemble générateur de A . Il suffit de montrer que tout $x \in A - e$ a une représentation unique comme produit de $a \in A_1$. Supposons donc que $x = ab = a'b' \in A$ avec $a, a' \in A_1$ (et donc $b, b' \in A$, d'après U_k). Ou bien a est un diviseur à gauche de a' ou bien, l'inverse. Dans le premier cas, $a' = aa''$ et la condition U_k implique que $a'' \in A$. Comme $a' \in A_1$ ceci n'est possible que si $a'' = e =$ la suite vide et, donc, $a = a'$. Etc.

PROPOSITION 2.2. - Si H est un sous-groupe normal de G , A satisfait en outre aux deux conditions équivalentes suivantes :

$$S : \forall_F^{x,y} xy \in A \Leftrightarrow yx \in A \quad (A \text{ est "symétrique" au sens de P. DUBREIL [1]})$$

U_n : Deux quelconques des trois relations ci-dessous entraînent la troisième :

$$xyz \in A ; \quad xz \in A ; \quad y \in A .$$

et A intersecte tous les idéaux de F .

DÉMONSTRATION. - Il suffit de vérifier que les conditions sont satisfaites pour $H \subset G$.

PROPOSITION 2.3. - Réciproquement, si le sous-demi-groupe E de F intersecte tous les idéaux bilatères de F et satisfait U_n (ou U_d et S), il existe un homomorphisme φ de F sur un groupe G tel que $\overline{\varphi}^{-1} e' = E$.

DÉMONSTRATION. - On vérifie facilement que U_d et S entraînent U_n (et U_k). Inversement (R.R. STOLL [7]) si E satisfait U_n et si $xy \in E$, on a $xyxy \in E$ et par conséquent $yx \in E$ (puisque $xyxy = x(yx)y$). L'implication $U_n \Rightarrow U_k$ est triviale.

Soit donc E satisfaisant les conditions de l'énoncé et φ l'homomorphisme associé à la relation d'équivalence sur F définie par $x \equiv y (E)$ si et seulement

si pour tout $z, t \in F$

$$zxt \in E \Leftrightarrow zyt \in E .$$

On vérifie successivement :

i. $x \equiv y(E)$ pour tout $x, y \in E$.

Donc, φE est un élément idempotent e' de φF .

ii. Pour tout $x \in F$, il existe au moins un $x' \in F$ tel que $\varphi x \varphi x' = \varphi x' \varphi x = e'$.
(Puisque E intersecte tous les idéaux bilatères, il correspond à tout x au moins une paire y, z avec $yxz \in E$ et, d'après S , $(zy)x$ et $x(zy)$ appartiennent à E).

Ces deux remarques prouvent que $G = \varphi F$ est un groupe et que E est bien le noyau de φ .

PROPOSITION 2.3. - Dans les mêmes conditions 2.2., si φ' est un homomorphisme de F sur un groupe G'' (d'élément neutre e'') et si $\varphi^{-1} e' = E \subset E'' = \varphi'^{-1} e''$, il existe un homomorphisme χ de G sur G'' tel que $\varphi' = \chi \circ \varphi$.

DÉMONSTRATION. - Il suffit évidemment de montrer que $x \equiv y(E)$ entraîne $x \equiv y(E'')$. Or, si la première relation est vérifiée et si $zxt \in E''$, il existe u avec $xtzu \in E$, donc, $ytzu \in E \subset E''$. Mais, $xtz \in E''$ et $xtzu \in E \subset E''$ impliquent $u \in E''$ et, d'après U_k , ytz (et donc zyt) $\in E''$.

PROPOSITION 2.4. - L'ensemble des sous-demi-groupes de F qui satisfont U_n forme un treillis $L(F)$ complet et, si F' est un sous-demi-groupe quelconque de F , $A \in L(F)$ entraîne $A \cap F' \in L(F')$.

La démonstration est une paraphrase de l'énoncé.

Les propositions 2,i et leurs démonstrations sont des cas particuliers de théorèmes établis par P. DUBREIL [1][2] , F. LEVI [3][4] et R.R. STOLL [7] .

3. Dans cette section on considère encore un demi-groupe libre F engendré par l'ensemble $F_1 = \{f\}$ et une application involutive fixe $f \rightarrow f^*$ de F_1 sur lui-même. Cette application est étendue de façon naturelle à un antiisomorphisme de F par $e^* = e$; $(xy)^* = y^* x^*$.

F_1 se décompose en deux sous-ensembles :

F_1' , consistant en tous les $f \in F_1$ tels que $f = f^*$

F_1'' , consistant en toutes les paires (f, f') telles que $f^* = f' \neq f = f'^*$.

On suppose que l'on a su choisir un élément dans chacune de ces paires et on désigne par G_1 l'ensemble de ces éléments.

Enfin on dénote par F_2 l'ensemble formé par l'union de F_1' et des produits ff^* où $f \in F_1'$.

Soit maintenant G le groupe libre engendré par G_1 . On définit une application θ de F_1 sur $\{G_1 \cup e'\}$ par les règles suivantes :

Si $f \in F_1'$, $\theta f = e'$

Si $f \in G_1$, $\theta f = f$

Si $f = f'^*$ et $f' \in G_1$, $\theta f = f'^{-1}$.

Puisque F est libre, θ peut être étendue de façon naturelle à un homomorphisme de F sur G dont le noyau $\theta^{-1}e'$ sera désigné par E .

PROPOSITION 3.1. - Si $x \in E$ est de la forme fyf' avec $f, f' \in F_1$ et $f^* \neq f'$, alors $x = zt$ où z et t appartiennent tous les deux à $E - e$.

DÉMONSTRATION. - Pour simplifier, nous utilisons le résultat bien connu que E est l'ensemble des suites finies de symbole $\{f\}$ qui peuvent être réduites à la suite vide e par cancellation répétée de paires d'éléments appartenant à F_2 . Si donc les conditions de l'énoncé sont remplies, la dernière cancellation ne peut être celle de ff' puisque ce produit n'appartient pas à F_2 . Donc x doit avoir la forme $fy'f^*y''f'$ où $z = fy'f^* \in E$ n'est pas la suite vide. D'après U_n , $t = y''f'$ appartient aussi à $E - e$.

PROPOSITION 3.2. - Le noyau E peut être défini de façon équivalente comme le plus petit sous-demi-groupe $E' \in L(F)$ qui contienne F_2 ou, E'' qui contienne le sous ensemble F^* des $x \in F$ tels que $x = x^*$.

DÉMONSTRATION. - Que E soit le plus petit sous-demi-groupe contenant F_2 est une conséquence directe de 2.3 et 2.4 quand E est défini comme $\theta^{-1}e'$ où e' est l'élément neutre du groupe libre G . Réciproquement, E' , d'après 2.2, est le noyau d'un homomorphisme sur un groupe (la condition accessoire que E intersecte tous les idéaux bilatères est automatiquement satisfaite puisque pour tout x , $xx^* \in E$, d'après S) et ce groupe est libre d'après la proposition 2.3 et le caractère minimal de E .

D'autre part, si $E'' \in L(F)$ contient F^* , il contient en particulier F_2 (car pour tout x , $(xx^*)^* = x^{**}x^* = xx^*$) et réciproquement, $E' = E''$.

En effet, en raisonnant par récurrence sur la longueur $|x|$ de x , le résultat est vrai par hypothèse quand $|x| \leq 2$. Quand $|x| > 2$, et $x = x^*$, x a la forme fyf^* où $f \in F_1$ et y , de longueur $|x| - 2$, appartient à E puisqu'il satisfait $y = y^*$.

REMARQUE. - Dans l'application évoquée au début de cet exposé, on doit considérer l'ensemble générateur E_1 de E consistant en les $x \in E$ tels que $x = yz$, $y \in E - e$ implique $z = e$ et $y = x$. Les deux propositions précédentes permettent de montrer que E_1 est en correspondance biunivoque avec l'ensemble union de F_1 et des suites de la forme $xyztx^*$ avec $|x| \geq 1$ et, soit $yzt = e$, soit y et z appartenant à E_1 et étant respectivement de la forme $y = fy'$ et $z = z'f'$ avec $f, f' \in F_1$ et $f^* \neq f'$ (et évidemment, toujours, $z \in E$).

4. DÉMONSTRATION du théorème de Schreier (1). - Soit maintenant, avec les notations de la section 3, H un sous-groupe de G .

On a les résultats suivants :

- i. D'après 1.1, $A = \theta^{-1} H$ est un demi-groupe libre.
- ii. Puisque $e' \in H$, $E \subset A$ et, d'après 2.4, $E \in L(A)$.
- iii. E est le noyau de la restriction de θ à A .
- iv. Puisque $aa^* \in E$, a et a^* appartiennent en même temps à A . Donc, en posant $A_1 = (A - e) - (A - e)^2 =$ l'ensemble générateur de A (cf. la remarque de la section précédente), la restriction de $*$ à A_1 est une application involutive de cet ensemble sur lui-même et l'on peut définir A_1', A_1'' , etc. pour $(A, *)$ comme on l'a fait pour $(F, *)$. En particulier, soit K le plus petit sous-demi-groupe de $L(A)$ qui contienne A_2 .

Il est immédiat que $K \subset E$ et, d'après 3.2, le théorème de Schreier sera prouvé si l'on peut montrer que $K = E$ puisqu'alors $H = \theta A$ sera l'image du demi-groupe libre A par un homomorphisme θ dont le noyau a les propriétés minimales voulues.

Soit donc $x \in E$. Si $|x| \leq 2$, il est certain que $x \in K$. Supposons donc établi pour tous les éléments de longueur $\leq n$ que $x \in E$ entraîne $x \in K$ et soit maintenant $x \in E$ de longueur $n + 1$.

Si x est de la forme fyf^* , y appartient à E (d'après U_n) et, par hypothèse à K puisque $|y| = n - 1$. D'autre part, comme $E \subset A$, x appartient à A ainsi que xx^* . Mais, $(xx^*)^* = xx^*$ et, par conséquent, $xx^* \in K$ (proposition 3.2). En particulier, ff^* appartient à K , (puisque à E) pour tout $f \in F_1$.

Donc, en appliquant U_n à $xx^* = fyf^*fy^*f = fy(f^*f)(y^*)f^*$ (où les éléments qui appartiennent à K et qui peuvent être éliminés sont mis entre parenthèses) on trouve $fyf^* = x \in K$.

Ceci achève la démonstration, puisque, d'après la proposition 3.1, si x n'était pas de la forme précédente, on aurait $x = yz$ avec $y, z \in E - e$ et par conséquent de longueur au plus égale à n , et, donc enfin, par hypothèse, $y, z \in K$ et $x = yz \in K$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DUBREIL (Paul). - Contribution à la théorie des demi-groupes, Mem. Acad. Sc. Inst. France, t. 63, n° 3, 1941, p. 1-52.
 - [2] DUBREIL (Paul). - Contribution à la théorie des demi-groupes (II), Univ. Roma, Rendic. Mat., Série 5, t. 10, 1951, p. 183-200.
 - [3] LEVI (F.W.). - On semi-groups, Bull. Calcutta math. Soc., t. 36, 1944, p. 141-146.
 - [4] LEVI (F.W.). - On semi-groups II, Bull. Calcutta math. Soc., t. 38, 1946, p. 123-124.
 - [5] SCHREIER (Otto). - Die Untergruppen der freien Gruppen, Abh. math. Sem. Hamb. Univ., t. 5, 1927, p. 161-183.
 - [6] SCHUTTENBERGER (M.P.). - Une théorie algébrique du codage, Séminaire Dubreil et Pisot, 9e année, 1955/56, exposé n° 15.
 - [7] STOLL (P.R.). - Homomorphisms of a semigroup onto a group, Amer. J. of Math., t. 73, 1951, p. 475-481.
-