Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Guy Maury

Théorèmes de transfert en théorie des anneaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, nº 1 (1957-1958), exp. nº 2, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_1_A2_0>

-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL,
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1957/58
-:-:-:-

18 novembre 1957

THÉORÈMES DE TRANSFERT EN THÉORIE DES ANNEAUX

par Guy MAURY.

INTRODUCTION.

Par "anneau" nous entendrons dans toute la conférence "anneau commutatif, à élément unité".

Nous nous donnons un anneau A et un suranneau B de A, l'élément unité de B étant celui de A. θ sera un élément de B, entier sur A, sauf mention expresse du contraire. Nous cherchons à quelle condition portant sur les polynômes de $A[x]$, dont θ est racine, certaines propriétés de A sont encore vraies dans $A[\theta]$.

Ainsi, on examinera les cas suivants :

I. $A[\theta]$ quasi-local, A l'étant.

II. $A[\theta]$ normal, (c'est-à-dire noethérien, sans diviseurs de zéro, intégralement clos), A l'étant.

III. $A[\theta]$ local régulier, A l'étant.

IV. $A[\theta]$ intégralement clos dans son anneau complet des quotients, A l'étant, θ étant racine d'un polynome unitaire $\varphi(x)$ de $A[x]$ et n'étant racine d'aucun polynome de $A[x]$ de degré inférieur. Il sera fait, de plus, certaines hypothèses simplificatrices sur A.

Ces études entrent dans le cadre d'une étude générale d'une extension monogène $A[\theta]$ d'un anneau A. Signalons, à ce propos, une étude sur la théorie des idéaux dans $A[\theta]$, menée par M.J.P. LAFON et l'auteur [1]. Les résultats des parties I, II, III sont résumés dans une note de l'auteur aux "Comptes Rendus" [2].

Nous nous référons très souvent au mémoire de M. NAGATA [3] désigné dans la suite par B.T. [3]. Nous aurons besoin des propriétés fondamentales des anneaux locaux réguliers [parties II et III], que l'on pourra trouver dans NORTHCOTT [4]. La connaissance de B.T. [3] est souhaitable pour l'intelligence de IV, et de toute la conférence en général.

I. $A[\theta]$ quasi-local, ... l'étant.

1. – Dans cette partie A est un anneau quasi-local avec élément unité, plongé dans un anneau B. Nous appelons "anneau quasi-local", un anneau dont l'ensemble des éléments non inversibles forme un idéal. Celui-ci est alors son unique idéal maximal propre. Un anneau quasi-local noethérien est appelé un anneau local. Un anneau quasi-local peut être défini comme un anneau n'ayant qu'un seul idéal maximal propre : en effet, soient A' un tel anneau, $\mathfrak{m}'$ son idéal maximal, et a un élément de A', n'appartenant pas à $\mathfrak{m}'$; (a) est égal à A', ou bien (a) est compris dans un idéal maximal propre de A', [dans un anneau A' commutatif à élément unité, tout idéal propre est contenu dans un idéal maximal. (KRULL)], c'est-à-dire dans $\mathfrak{m}'$. Seule la première hypothèse est possible et a est inversible.

Soit θ un élément de B, qui ne sera pas obligatoirement entier sur A dans ce paragraphe. L'anneau $A[\theta]$, c'est-à-dire l'ensemble des $\sum a_i \theta^i$ dans B, $a_i \in A$, sera noté aussi $A^{\times}$. Si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A, $\mathfrak{m}^{\times}$ sera l'idéal de $A^{\times}$ formé par les $\sum m_i \theta^i$, $m_i \in \mathfrak{m}$.

$\mathfrak{m}^{\times}$ est propre si, et seulement si, θ n'est pas racine d'un polynome de la forme $1 + \sum_0^N m_i x^i$, $m_i \in \mathfrak{m}$, $i = 0, \ldots, N$.

A chaque polynome $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_N x^N$, de $A[x]$, dont θ est racine (il peut n'y avoir que le polynome 0), faisons correspondre le polynome $\bar{f}(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \ldots + \bar{a}_N x^N$, de $\frac{A}{\mathfrak{m}}[x]$, $\bar{a}_i$ étant la classe de a_i dans $\frac{A}{\mathfrak{m}}$.

a. Premier cas : $\mathfrak{m}^{\times}$ est propre ; considérons $\frac{A^{\times}}{\mathfrak{m}^{\times}}$.

1° S'il n'y a pas de $\bar{f}(x)$ non nul, $\frac{A^{\times}}{\mathfrak{m}^{\times}}$ est isomorphe à $\frac{A}{\mathfrak{m}}[x]$.

2° S'il y a un $\bar{f}(x)$ non nul, soient $\bar{\varphi}(x)$ un polynome non nul de plus petit degré parmi les $\bar{f}(x)$, et $\bar{\varphi}(x) = \prod_{i=1}^{q} \bar{\varphi}_i^{\alpha_i}(x)$, la décomposition de $\bar{\varphi}(x)$ en facteurs premiers dans $\frac{A}{\mathfrak{m}}[x]$, [$\frac{A}{\mathfrak{m}}$ est un corps]. Il est facile de vérifier que $\frac{A^{\times}}{\mathfrak{m}^{\times}}$ est isomorphe à $\frac{A}{\mathfrak{m}}[x]/(\bar{\varphi}(x))$.

Soit $\bar{\varphi}_i(x) = \bar{\beta}_0 + \ldots + \bar{\beta}_{n_i} x^{n_i}$, $\bar{\beta}_i \in \frac{A}{\mathfrak{m}}$, $i = 0, \ldots, n_i$. Considérons $\varphi_i(x) = \beta_0 + \ldots + \beta_{n_i} x^{n_i}$, β_i étant un représentant de $\bar{\beta}_i$. Les idéaux de $A^{\times}$, dont l'intersection avec A est $\mathfrak{m}$, sont au nombre de q, engendrés respectivement par $\varphi_i(\theta)$ et $\mathfrak{m}$, $i = 1 , \ldots , q$.

b. Deuxième cas : $\mathfrak{m}^\times$ n'est pas propre.

Il n'y a pas d'idéaux de $A^\times$ propres dont l'intersection avec A est $\mathfrak{m}$. Ceci ne peut se produire si θ est entier sur A (B.T. [3],page 66,corollaire 1).

2. - Si θ est entier sur A , nous sommes dans le cas a. 2° précédent. Les seuls idéaux maximaux de $A^\times$ sont les idéaux engendrés par $\mathfrak{m}$ et les $\varphi_i(\theta)$, $i = 1 , \ldots , q$, dans $A^\times$: en effet, soit $\mathfrak{p}'$ un idéal maximal dans $A^\times$, $\frac{A^\times}{\mathfrak{p}'}$ est un corps, entier sur l'anneau $A/\mathfrak{p}' \cap A$. Or ceci entraîne que $A/\mathfrak{p}' \cap A$ est un corps (B.T. [3], page 66, lemme 3). $\mathfrak{p}' \cap A$ n'est autre que $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}'$ contient $\mathfrak{m}^\times$ et est, par suite, un des idéaux maximaux déjà trouvés. On déduit de là :

THÉORÈME. - $A^\times$ est quasi-local, si, et seulement si, la décomposition de $\overline{\varphi}(x)$ dans $\frac{A}{\mathfrak{m}}[x]$ est $\overline{\varphi}(x) = \overline{\varphi}'^{\lambda}(x)$, $\overline{\varphi}'(x)$ étant irréductible dans $\frac{A}{\mathfrak{m}}[x]$ et λ étant un entier naturel.

REMARQUES. - 1° Tout sous-anneau de $A^\times$ contenant A est quasi-local.

2° Si $A^\times$ est un anneau quasi-local, extension entière d'un anneau A , celui-ci est nécessairement quasi-local.

3° Supposons que θ soit racine d'un polynome $\psi(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, à coefficients dans A et que θ ne soit racine d'aucun polynome de degré inférieur. Alors on peut prendre $\overline{\varphi}(x) = \overline{\psi}(x)$. En effet, tous les polynomes de $A[x]$, dont θ est racine, sont multiples de $\psi(x)$. Supposons que $\overline{\varphi}(x)$ provienne de $\varphi(x)$, on aura $\varphi(x) = \lambda(x)\psi(x)$ et $\overline{\varphi}(x) = \overline{\lambda}(x)\overline{\psi}(x)$, le degré de $\overline{\varphi}(x)$ étant supérieur ou égal à celui de $\overline{\psi}(x)$. D'après le choix de $\overline{\varphi}(x)$, $\overline{\varphi}(x)$ et $\overline{\psi}(x)$ ont le même degré.

II. $A[\theta]$ normal, A l'étant.

1. - NOTATIONS. - A est ici un anneau noethérien, sans diviseurs de zéro, intégralement clos, plongé dans un anneau B sans diviseurs de zéro. Soit θ un élément de B , entier sur A . Comme dans I, $A[\theta]$ sera aussi noté $A^\times$. θ est alors racine d'un polynome unitaire $\varphi(x)$ de $A[x]$, irréductible dans $\overline{A}[x]$, $\overline{A}$ étant le corps des quotients de A .

$\varphi(x)$ sera appelé le polynome caractéristique de θ sur A . Soit n son degré. Nous cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que $A^\times$ soit intégralement clos. Nous terminerons par quelques applications.

2. – RAPPEL. a. Etant donnés un anneau noethérien A' et un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A', formons toutes les suites croissantes d'idéaux premiers de A', distincts, et strictement compris dans $\mathfrak{p}$. Il existe un nombre entier r positif ou nul, tel qu'il existe une suite ayant r termes et qu'il n'existe pas de suite ayant $r+1$ termes. Le nombre r est appelé <u>le rang de $\mathfrak{p}$</u>.

Le plus grand nombre r qu'on puisse ainsi trouver dans A' est appelé la <u>dimension de</u> A'.

b. S étant un ensemble multiplicativement stable d'éléments de A', ne contenant pas 0, A' étant ici un anneau sans diviseurs de zéro quelconque, on notera A'_S l'anneau ensemble des fractions $\frac{a'}{s}$, où a' appartient à A' et s à S. Ainsi, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A', on peut considérer l'ensemble $S = A' - \mathfrak{p}$, et l'anneau A'_S, noté aussi dans ce cas $A'_{\mathfrak{p}}$.

c. ceci étant, on sait que, (B.T. [3], page 75, corollaire 1) : un anneau noethérien Λ, sans diviseurs de zéro, est intégralement clos, si, et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(H_1) : Pour chaque idéal premier $\mathfrak{p}$ de Λ de rang 1, $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ est intégralement clos.

(H_2) : Chaque idéal principal de Λ n'a pas d'idéaux premiers essentiels immergés.

REMARQUE. – Si Λ n'a que des idéaux premiers, non nuls, de rang 1, la condition nécessaire et suffisante précédente se réduit à la condition (H_1).

3. – LEMME. – Soient A un anneau, sans diviseurs de zéro, intégralement clos, dans son corps des quotients $\overline{A}$, et S un ensemble multiplicativement stable de A, ne contenant pas 0, l'anneau A_S est intégralement clos dans son corps des quotients $\overline{A}$.

Soit u un élément de $\overline{A}$, entier sur A_S :

$$u^n + b_1 u^{n-1} + \dots + b_n = 0 \quad , \quad \text{avec} \quad b_i = \frac{a_i}{s_i} \; , \quad s_i \in S \; , \; a_i \in A \; , \; i = 1 , \dots , n \, .$$

Considérons $\beta = us_1 \dots s_n$:

$$\beta^n + c_1 \beta^{n-1} + \dots + c_n = 0 \quad , \quad c_i = b_i (s_1 \dots s_n)^n \; , \; i = 1 , \dots , n \, .$$

les c_i appartiennent à A. β est entier sur A, β appartient à A et u à A_S.

4. – Soit $\mathfrak{p}^\times$ un idéal premier de rang 1 de $A^\times$ et soit $\mathfrak{p}^\times \cap A = \mathfrak{p}$. $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de rang 1, (B.T. [3],page 72, proposition 2). D'ailleurs si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de rang 1 de A, il existe au moins un idéal premier $\mathfrak{p}^\times$ de $A^\times$ tel que $\mathfrak{p}^\times \cap A = \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}^\times$ est alors de rang 1.

Posons, $\mathfrak{p}$ étant un idéal premier de rang 1 de A, $S = A - \mathfrak{p}$, et considérons $[A[\theta]]_S$: d'après (II,3) cet anneau est intégralement clos. Mais $[A[\theta]]_S = A_S[\theta]$, le polynome caractéristique de θ sur A_S étant toujours $\varphi(x)$. Donc, si $A^\times$ est intégralement clos, $A_S[\theta]$ l'est aussi pour tout S relatif à un idéal premier de rang 1 de A.

Réciproquement, si $A_S[\theta]$ est intégralement clos, $S = A - \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ idéal premier de rang 1 de A, il en est de même de $A^\times_{S^\times}$, où $S^\times = A^\times - \mathfrak{p}^\times$, $\mathfrak{p}^\times$ étant un idéal premier de A, dont l'intersection avec A est $\mathfrak{p}$, car nous pouvons écrire

$$A^\times_{S^\times} = [(A[\theta])_S]_{S^\times} = [A_S[\theta]]_{S^\times} .$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme de (II,3).

Ainsi, une condition nécessaire pour que $A^\times$ soit intégralement clos, est que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de rang 1 de A, et $S = A - \mathfrak{p}$, $A_S[\theta]$ soit intégralement clos, et cette condition, si elle est réalisée, entraîne que la condition (H_1) est réalisée dans $A^\times$.

5. – Considérons donc, étant donné $S = A - \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ étant un idéal premier de rang 1 de A, $A_S[\theta]$:

$A_S[\theta]$ est une extension entière, sans diviseurs de zéro, de l'anneau local régulier de dimension 1, A_S. C'est un anneau semi-local d'idéaux maximaux $\mathfrak{p}_i^\times$, $i = 1, \dots, q$, engendrés respectivement par $\varphi_i(\theta)$ et $\mathfrak{p}_S$, $\mathfrak{p}_S$ désignant l'idéal maximal de A_S, la décomposition de $\varphi(x)$ modulo $\mathfrak{p}_S$, dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$ étant : $\bar{\varphi}_{\mathfrak{p}_S} = \prod_{i=1}^{q} \bar{\varphi}_i^{\alpha_i}(x)$, $\bar{\varphi}_i(x)$ étant irréductible dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$, (voir I, 1 et 2 et I,2 remarque 3).

Si $\bar{\varphi}_{\mathfrak{p}_S}$ est irréductible dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$, alors $A_S[\theta]$ est local régulier de dimension 1, son idéal maximal étant engendré par un générateur u de $\mathfrak{p}_S$. Donc $A_S[\theta]$ est intégralement clos.

Si $\bar{\varphi}_{\mathfrak{p}_S}$ n'est pas irréductible et a la décomposition ci-dessus, quelle est la condition pour que $A_S[\theta]$ soit intégralement clos ?

6. – Soit un facteur $\bar{\varphi}_i(x)$, d'exposant $\alpha_i = 1$ dans la décomposition précédente de $\bar{\varphi}_{\mathfrak{p}_S}(x)$ et soit, u étant, comme ci-dessus, le générateur de $\mathfrak{p}_S$,

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{q} \varphi_i^{\alpha_i}(x) + u\mu(x) ,$$

$\mu(x)$ étant un polynome de $A_S[x]$, de degré $n-1$ au plus. Posons $S_i^{\times} = A_S^{\times} - \mathfrak{p}_i^{\times}$ et considérons $(A_S^{\times})_{S_i^{\times}}$: c'est un anneau local de dimension 1 d'idéal maximal $\mathfrak{p}^{\times}_{i\,S_i^{\times}}$, dont une base est $[u , \varphi_i(\theta)]$. Mais comme $\varphi_i(\theta) = -\dfrac{u\mu(\theta)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{q} \varphi_j^{\alpha_j}(\theta)}$, u est une base. $(A_S^{\times})_{S_i^{\times}}$ est donc régulier, et par suite intégralement clos.

Considérons maintenant, un facteur $\overline{\varphi}_i(x)$, d'exposant $\alpha_i > 1$ et supposons $A_S[\theta]$ intégralement clos : c'est alors un anneau semi-local, de Dedekind, donc à idéaux tous principaux [B.T. [3],page 74, proposition 1] . En particulier $\mathfrak{p}_i^{\times}$ est engendré par un certain élément $\lambda(\theta)$ et l'on a $\varphi_i(\theta) = \lambda(\theta)\lambda'(\theta)$, $\lambda'(\theta)$ étant un élément de $A_S^{\times}$. Démontrons que $\lambda'(\theta)$ est inversible :

Si $\lambda'(\theta)$ n'était pas inversible, il appartiendrait à un $\mathfrak{p}_j^{\times}$. Comme $\varphi_i(\theta)$ n'appartient pas à $\mathfrak{p}_j^{\times}$ pour $j \neq i$, $\lambda'(\theta)$ appartiendrait à $\mathfrak{p}_i^{\times}$. Mais n'oublions pas que, dans $A_S^{\times}/\mathfrak{p}_S A_S^{\times}$, $\overline{\lambda}(\overline{\theta})$ et $\overline{\lambda}'(\overline{\theta})$ sont multiples de $\overline{\varphi}_i(\overline{\theta})$, $\overline{\theta}$ désignant la classe de θ dans $A^{\times}/\mathfrak{p}_S A_S^{\times}$. On aurait donc :

$$\overline{\varphi}_i(\overline{\theta}) = \overline{\varphi}_i^2(\overline{\theta})\, \overline{\psi}(\overline{\theta}) \quad , \quad \overline{\psi}(\overline{\theta}) \in A_S^{\times}/\mathfrak{p}_S A_S^{\times} .$$

Par suite : $\overline{\varphi}_i(x) + \overline{\eta}(x)\,[\prod_{i=1}^{q} \overline{\varphi}_i^{\alpha_i}(x)] = \overline{\varphi}_i^2(x)\ \overline{\psi}(x)$, avec un certain polynome $\overline{\eta}(x)$ appartenant à $\dfrac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$. Le premier membre s'écrit $\overline{\varphi}_i(x)\ [1 + \overline{\eta}(x)(\prod_{k=1}^{q} \varphi_k^{\alpha'_k}(x)]$, avec $\alpha'_k = \alpha_k$, si $k \neq i$ et $\alpha'_i = \alpha_i - 1$. $\overline{\varphi}_i(x)$ devrait diviser la quantité entre crochets, ce qui n'est pas puisque α'_i est supérieur ou égal à 1 .

$\lambda'(\theta)$ est donc inversible, et on peut engendrer $\mathfrak{p}_i^{\times}$ par $\varphi_i(\theta)$ dans le cas $\alpha_i > 1$.

Mais, alors, dans $\varphi(x) = \prod_{i=1}^{r} \varphi_i^{\alpha_i}(x) + u\mu(x)$, faisons $x = \theta$: $\mu(\theta)$ n'est pas dans $\mathfrak{p}_i^{\times}$, car autrement $\mu(\theta) = \varphi_i(\theta)\gamma(\theta)$, où

$$\gamma(\theta) = a_0 + \dots + a_{n-1}\,\theta^{n-1} , \; a_i \in A_S , \; i = 0 , \dots , n-1 \; ;$$

θ serait racine du polynome de $A_S[x]$ non identiquement nul de degré inférieur à n : $\prod_{k=1}^{r} \varphi_k^{\alpha'_k}(x) + u(a_0 + \dots + a_{n-1}\,x^{n-1})$, où α'_k a la valeur précisée plus haut.

C'est impossible.

Donc, si $A_S[\theta]$ est intégralement clos, $\mu(\theta)$ n'appartient à aucun $\mathfrak{P}_i^{\times}$, pour i, tel que α_i est supérieur à 1.

7. - Nous allons montrer que :

Réciproquement, si $\mu(\theta)$ n'appartient à aucun $\mathfrak{P}_i^{\times}$, pour i, tel que α_i est supérieur à 1, $A_S[\theta]$ est intégralement clos.

En effet soit d'abord i, tel que $\alpha_i = 1$. Nous avons vu (II, 6), que $(A_S^{\times})_{S_i^{\times}}$ est intégralement clos. Soit ensuite i, tel que $\alpha_i > 1$. Une base de $\mathfrak{P}_{i_{S_i^{\times}}}$ est $[u, \varphi_i(\theta)]$, mais si $\mu(\theta)$ n'appartient pas à $\mathfrak{P}_i^{\times}$, on peut écrire :

$$u = -\frac{\prod_{i=1}^{q}\varphi_i^{\alpha_i}(\theta)}{\mu(\theta)},$$

et par suite $\mathfrak{P}_{i_{S_i^{\times}}}$, est engendré dans $(A_S^{\times})_{S_i^{\times}}$ par $\varphi_i(\theta)$, et $(A_S^{\times})_{S_i^{\times}}$ est local régulier de dimension 1, donc intégralement clos. Ainsi $A_S[\theta]$ est intégralement clos, d'après la remarque de (II, 2).

8. - Essayons d'exprimer la condition "$\mu(\theta)$ n'appartient pas à $\mathfrak{P}_i^{\times}$", à l'aide du polynome $\mu(x)$ et même à l'aide de $\varphi(x)$.

$\mathfrak{P}_i^{\times}$ étant engendré par $\varphi_i(\theta)$ et u, $\mu(\theta)$ appartient à $\mathfrak{P}_i^{\times}$ si, et seulement si, il existe $\lambda(\theta)$ dans $A_S^{\times}$ et $p_S(\theta)$ dans $\mathfrak{P}_S A_S^{\times}$, tels que :

$$\mu(\theta) = \lambda(\theta)\varphi_i(\theta) + p_S(\theta).$$

De façon générale, si $f(\theta) = a_0 + \dots + a_{n-1}\theta^{n-1}$, $a_i \in A_S$, $i = 0, \dots, n-1$, appelons $f(x)$ le polynome $a_0 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$. Considérons alors $\psi(x) = \lambda(x)\varphi_i(x) + p_S(x)$. Le reste de la division de $\psi(x)$ par $\varphi_i(x)$ a tous ses coefficients dans $\mathfrak{P}_S$.

Il en est de même du reste de la division de $\mu(x)$ par $\varphi_i(x)$. On a, en effet, $\psi(x) - \mu(x) = \eta(x)\varphi(x)$, $\eta(x)$ étant un certain polynome de $A_S[x]$, puisque $\psi(0) - \mu(0)$ est nul. Nous pouvons donc écrire :

$$\mu(x) = \psi(x) + \eta(x)\left[\prod_{i=1}^{q}\varphi_i^{\alpha_i}(x)\right] + p_S'(x),$$

$p_S'(x)$ étant un polynome à coefficients dans $\mathfrak{P}_S$.

Le reste de la division de $\mu(x)$ par $\varphi_i(x)$, comme celui de la division de $\psi(x)$ et $p_S'(x)$ par $\varphi_i(x)$ est à coefficients dans $\mathfrak{P}_S$. Réciproquement, s'il en est ainsi, $\mu(\theta)$ appartient bien à $\mathfrak{p}_i^\times$; mais il revient au même de dire que le reste de la division de $\mu(x)$ par $\varphi_i(x)$ a ses coefficients dans $\mathfrak{p}_S$, ou que le reste de la division de $\varphi(x)$ par $\varphi_i(x)$ a ses coefficients dans $\mathfrak{p}_S^2$.

Donc, une condition nécessaire pour que $A[\theta]$ soit intégralement clos est que pour tout S relatif à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, de rang 1, on ait la condition (C) suivante :

(C) : "Si α_i est supérieur ou égal à 2, le reste de la division de $\varphi(x)$ par $\varphi_i(x)$ n'a pas tous ses coefficients dans $\mathfrak{p}_S^2$ ".

De plus, si (C) est réalisée, alors la condition (H_1) est vérifiée dans $A[\theta]$, (II, 4).

9. - Nous allons montrer que si (H_1) est vérifiée dans $A[\theta]$, alors (H_2) l'est également. Nous nous appuierons sur un théorème de M. NAGATA (B.T. [3], page 76, corollaire 4] :

"Soit $\mathfrak{O}$ un anneau noethérien, sans diviseurs de zéro, dans lequel (H_1) est réalisée. Si un idéal principal (a) de $\mathfrak{O}$, a un idéal premier essentiel immergé $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}$ est aussi un idéal premier essentiel immergé pour (b), b étant un élément non nul quelconque de $\mathfrak{q}$ ".

Supposons que (H_2) ne soit pas réalisée dans $A^\times$, (H_1) l'étant. Il existe $a^\times$ dans $A^\times$, tel que $(a^\times)$ a un idéal premier essentiel immergé $\mathfrak{q}^\times$. Alors, pour a, non nul, appartenant à $\mathfrak{q}^\times \cap A = \mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}^\times$ est idéal premier essentiel immergé de $(a)^\times$, idéal engendré par a dans $A^\times$. Il existe donc $b^\times$ appartenant à $A^\times$ et n'appartenant pas à $(a)^\times$, tel que $b^\times$ appartient à $(a)^\times : \mathfrak{q}^\times$. Posons $b^\times = b_0 + \dots + b_{n-1}\,\theta^{n-1}$, $b_i \in A$, $i = 0, \dots, n-1$. Il exsite un b_i, pour un certain i, qui n'appartient pas à (a), idéal engendré par a dans A, puisque $b^\times$ n'appartient pas à $(a)^\times$. En particulier, pour tout q, appartenant à $\mathfrak{q}$, $b^\times q$ appartient à $(a)^\times$ et par suite, $b_i q$ appartient à (a), pour tout q appartenant à $\mathfrak{q}$. (On remarquera en effet, à ce propos, qu'un élément $c^\times = c_0 + \dots + c_{n-1}\,\theta^{n-1}$, $c_i \in A$, $i = 0, \dots, n-1$, appartient à $(a)^\times$ si, et seulement si, tous les c_i appartiennent à (a)). Or, ceci montre que $(a) : \mathfrak{q}$ contient effectivement (a), donc que $\mathfrak{q}$ est compris dans un idéal premier de (a). Or $\mathfrak{q}$ n'est pas de rang 1, puisqu'il a même rang que $\mathfrak{q}^\times$. C'est impossible, puisque (H_2) est réalisée dans A.

10. - En résumé de cette étude, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. - Soit A un anneau, à élément unité, noethérien, intégralement clos, sans diviseurs de zéro, plongé dans un suranneau B commutatif et sans diviseurs de zéro, ayant même unité que A , et soit θ un élément de B entier sur A , dont le polynome caractéristique sur A est noté $\varphi(x)$.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de rang 1 de A , posons $S = A - \mathfrak{p}$. A_S est un anneau local régulier de dimension 1 , d'idéal maximal $\mathfrak{p}_S$. Soit $\overline{\varphi}_{\mathfrak{p}_S}(x)$, le polynome déduit de $\varphi(x)$ par passage aux classes des coefficients, modulo $\mathfrak{p}_S$, et soit $\prod_{i=1}^{q} \overline{\varphi}_i^{\alpha_i}(x)$, sa décomposition dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$ en facteurs premiers.

Soient $\overline{\varphi}_i(x) = \overline{\beta}_0 + \ldots + \overline{\beta}_{n_i} x^{n_i}$, $\overline{\beta}_i \in \frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}$, i = 0 , ... , n_i , et $\varphi_i(x) = \beta_0 + \ldots + \beta_{n_i} x^{n_i}$, où β_i est un représentant dans A_S de $\overline{\beta}_i$.

Alors pour que $A[\theta]$ soit intégralement clos, il faut et il suffit que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de rang 1 de A , la condition (C) suivante soit réalisée :

(C) : "Pour tout i , tel que α_i est supérieur ou égal à 2 , le reste de la division de $\varphi(x)$ par $\varphi_i(x)$ n'a pas ses coefficients tous dans $\mathfrak{p}_S^2$."

REMARQUE. – Si un idéal premier $\mathfrak{p}$ est tel que, dans la décomposition de $\overline{\varphi}_{\mathfrak{p}_S}$, il y ait un α_i supérieur ou égal à 2, alors $\varphi(x)$ a une racine double modulo $\mathfrak{p}_S$. Son discriminant d doit être nul modulo $\mathfrak{p}_S$. Or d appartient à A et (d) a pour idéaux premiers essentiels des idéaux $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_r$ de A ; tous de rang 1. Il suffira de vérifier (C) pour ces idéaux premiers $\mathfrak{p}_1 , \ldots , \mathfrak{p}_r$.

11. – <u>Application au cas où A est l'anneau des entiers</u> :

Remarquons d'abord d'une façon générale, que $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}$ est isomorphe au corps des quotients de $\frac{A}{\mathfrak{p}}$, donc à $\frac{A}{\mathfrak{p}}$, dans le cas où A est l'anneau des entiers, $\mathfrak{p}$ désignant un idéal premier de A . Dans chaque classe de $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}$, il existe un élément de A . On peut donc relever $\overline{\varphi}_i(x)$ dans $A[x]$, au lieu de le relever dans $A_S[x]$, de sorte que la règle du paragraphe (II, 10) devient :

"Soit $\varphi(x)$ le polynome caractéristique de θ sur l'anneau des entiers A .
Soit $d = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition en facteurs premiers du discriminant d de $\varphi(x)$. Désignons par $\mathfrak{p}_i = (p_i)$ l'idéal engendré par p_i dans A . Soit $\overline{\varphi}_{\mathfrak{p}_i}(x)$ le polynome déduit de $\varphi(x)$ par passage aux classes des coefficients modulo $\mathfrak{p}_i$ et soit

$$\overline{\varphi}_{\mathfrak{p}_i}(x) = \prod_{j=1}^{r_i} \overline{\varphi}_{ji}^{\alpha_{ji}}(x) \text{ , la décomposition de } \overline{\varphi}_{\mathfrak{p}i}(x) \text{ dans } \frac{A}{\mathfrak{p}_i}[x] \text{ .}$$

Soient

$$\overline{\varphi}_{ji}(x) = \overline{\beta}_0^i + \dots \overline{\beta}_{n_{ji}}^i x^{n_{ji}} ,$$

$$\overline{\beta}_k^i \in \frac{A}{\mathfrak{p}_i} , \ k = 0 , \dots , n_{ji}$$

et

$$\varphi_{ji}(x) = \beta_0^i + \dots + \beta_{n_{ji}}^i x^{n_{ji}} ,$$

β_k^i étant un représentant dans A de $\overline{\beta}_k^i$.

Alors pour que $A^\times$ soit intégralement clos, il faut et il suffit que la condition (C) suivante soit réalisée :

(C) : le reste de la division de $\varphi(x)$ par $\varphi_{ji}(x)$ relatif à j et i, tels que α_{ji} est supérieur ou égal à 2, n'a pas tous ses coefficients multiples de p_i^2."

EXEMPLES. – On pourra examiner les cas

$$\varphi(x) = x^2 - x - 1 ,$$

$$\varphi(x) = x^2 - 2x - 4 , \ \varphi(x) = x^3 - 3x - 5 ,$$

$$\varphi(x) = x^3 - 3x - 10 .$$

12. – <u>Application</u> au cas $A = K[x]$, K étant un corps algébriquement clos, θ étant racine du polynome en y, à coefficients dans $K[x]$, $y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n$, irréductible dans $K(x)[y]$.

Désignons par C la courbe plane $y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n = \varphi(x , y) = 0$. Alors la condition du paragraphe (II, 10), pour que $A[\theta]$ soit intégralement clos est équivalente à la suivante :

"C <u>n'a pas de point double</u>"

Ceci est d'ailleurs bien connu en géométrie algébrique. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A engendré par $x - a$, $a \in K$. On peut supposer $a = 0$, au besoin, en faisant un changement de variable. A_S est l'anneau formé des éléments $\frac{f(x)}{g(x)}$, où $f(x)$ et $g(x)$ sont des polynomes de $K[x]$, $g(x)$ n'étant pas divisible par x. Si f_0 et g_0 sont les termes constants de $f(x)$ et $g(x)$, g_0 non nul, on vérifiera que $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_0}{g_0}$ modulo $\mathfrak{P}_S$ - $\frac{A_S}{\mathfrak{P}_S}$ est donc isomorphe au corps K. $\overline{\varphi}_{\mathfrak{P}_S}$ s'obtient en faisant $x = 0$ dans $\varphi(x^s, y)$ d'où :

$$\overline{\varphi}_{\mathfrak{P}_S} = y^n + a_1(0)\, y^{r-1} + \dots + a_n(0) ,$$

et la décomposition dans $\frac{A_S}{\mathfrak{P}_S}[y]$, c'est-à-dire dans $K[y]$, est : $\prod_{i=1}^{q} (y - a_i)^{\alpha_i}$,

où les éléments a_i sont dans K et sont racines de $\overline{\varphi}_{\mathfrak{P}_S}$, la multiplicité de la racine a_i étant α_i. Les éléments a_i sont les ordonnées des points où $x = 0$ coupe C. Considérons un facteur $y - a_i$, d'exposant α_i plus grand que 1, s'il y en a. Nous pouvons supposer $a_i = 0$ (en faisant, au besoin, le changement de variables $Y = y - a_i$).

Appliquons la condition du paragraphe (II, 10), en remarquant d'abord qu'il n'y a pas de terme constant dans $\varphi(x, y)$ et qu'il n'y a pas de terme de la forme by, b appartenant à K non nul. Le reste de la division de $\varphi(x, y)$ par y n'est pas à coefficients multiples de x^2, si, et seulement si, il existe dans $\varphi(x, y)$ un terme ax, a appartenant à K et non nul. D'où le résultat énoncé au début.

13. - <u>Application</u> au cas $A = K[x, y]$, K étant un corps algébriquement clos, et θ étant racine du polynome en z, à coefficients dans $K[x, y]$, irréductible dans $K(x, y)[z]$: $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$.

Désignons par S la surface $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = \varphi(x, y, z) = 0$.

Un raisonnement analogue au précédent montre que la condition du paragraphe (II, 10) est équivalente à :

"S <u>n'a pas de courbes singulières."</u>

EXEMPLE. - Si $z^2 = xy$, l'anneau correspondant est intégralement clos.

III. $A[\theta]$ local régulier, A l'étant.

1. - NOTATIONS. - A est ici local régulier ; $u_1 \dots u_p$ est une base minimale de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A ; p est donc la dimension de A. Soit B un suranneau de A, commutatif et sans diviseurs de zéro. θ est un élément de B, entier sur A. Soit $\varphi(x)$ le polynome caractéristique de θ sur A, et soit n don degré ; $\mathfrak{m}^{\times}$ est propre (I, 1, a),2). De plus le polynome $\overline{\varphi}(x)$ défini en

(I, 1, a), 2)) se déduit du polynome $\varphi(x)$ par passage aux classes modulo $\mathfrak{m}$ des coefficients (I, 2, remarque 3). Nous cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que $A[\theta]$ soit local régulier. $A[\theta]$ sera ainsi noté $A^{\times}$.

2. – THÉORÈME. – Une condition nécessaire et suffisante pour que $A[\theta]$ soit local régulier, A l'étant, θ étant un élément de B, entier sur A, est que l'on ait :

(1) $\overline{\varphi}(x) = \overline{\varphi'}^{\lambda}(x)$, $\overline{\varphi'}(x)$ étant irréductible dans $\frac{A}{\mathfrak{m}}[x]$, λ étant un entier naturel plus grand ou égal à 1.

(2) Si λ est plus grand que 1, le reste de la division de $\varphi(x)$ par $\varphi'(x)$ n'a pas tous ses coefficients dans $\mathfrak{m}^2$, $\varphi'(x)$ étant un polynome de $A[x]$, de même degré que $\overline{\varphi'}(x)$, tel qu'en prenant les classes modulo $\mathfrak{m}$ de ses coefficients, on obtienne $\overline{\varphi'}(x)$.

<u>1er point</u>. – La condition (1) est équivalente à " $A^{\times}$ est local" (I, 2). Si λ est égal à 1, l'idéal maximal $\mathfrak{m}'^{\times}$ de $A^{\times}$ est alors engendré par $\mathfrak{m}$ dans $A^{\times}$; $u_1, \dots, u_p$ est une base de $\mathfrak{m}'^{\times}$ et $A^{\times}$ étant de dimension p, comme A, est local régulier.

<u>2e point</u>. – Supposons la condition (1) réalisée et supposons que λ est supérieur à 1. Démontrons que la condition (2) est réalisée, lorsque $A^{\times}$ est local régulier, en supposant de plus que A a la dimension 1 ; u désignera un générateur de $\mathfrak{m}$.

$\mathfrak{m}'^{\times}$ est engendré par $\varphi'(\theta)$ et u. Comme $A^{\times}$ est local régulier de dimension 1, cette base n'est pas une base minimale de $\mathfrak{m}'^{\times}$: on peut tirer de cette base minimale une base minimale ayant un seul élément : cet élément ne peut être que $\varphi'(\theta)$. On peut écrire $\varphi(x) = [\varphi'(x)]^{\lambda} + u\mu(x)$, $\mu(x)$ étant un polynome de $A[x]$ de degré $n-1$ au plus. Si $\mu(\theta)$ n'était pas inversible, on aurait : $\mu(\theta) = \varphi'(\theta)\lambda(\theta)$ avec $\lambda(\theta) = a_0 + \dots + a_{n-1}\theta^{n-1}$, $a_i \in A$, $i = 0, \dots, n-1$. Mais θ serait racine du polynome, non identiquement nul, de degré inférieur à n :

$$[\varphi'(x)]^{\lambda-1} + u(a_0 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}).$$

C'est impossible et $\mu(\theta)$ est inversible. Or ceci est équivalent à la condition (2) (raisonnement déjà fait en II, 8).

<u>3e point</u>. – Supposons λ supérieur à 1 et les conditions (1) et (2) réalisées. p étant quelconque, montrons que $A^{\times}$ est local régulier.

On peut écrire : $\varphi(x) = \varphi'(x)\lambda(x) + m_0 + \dots + m_{q-1}x^{q-1}$, $m_i \in \mathfrak{m}$, $i = 0, \dots, q-1$

q étant le degré de $\varphi'(x)$.

Supposons que m_j n'appartienne pas à $\mathfrak{m}^2$ et posons

$$m_i = \lambda_1^i u_1 + \dots + \lambda_p^i u_p , \quad i = 0 , \dots q - 1 .$$

Comme m_j n'appartient pas à $\mathfrak{m}^2$, il existe pour $1 \leq r \leq p$, un λ_r^j n'appartenant pas à $\mathfrak{m}$; en isolant u_r dans :

$$\varphi'(\theta)\lambda(\theta) + \sum_{i=0}^{q-1} m_i \theta^i = 0 \quad ,$$

il vient :

$$\varphi(\theta)\lambda(\theta) + \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq r}}^{p} \lambda_k^i \; u_k \theta^i + u_r(\lambda_r^0 + \dots + \lambda_r^{q-1} \theta^{q-1}) = 0$$

posons

$$\Lambda(\theta) = \varphi'(\theta)\lambda(\theta) + \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq r}}^{p} \lambda_k^i u_k \theta^i ,$$

et remarquons que $\Lambda(\theta)$ appartient à l'idéal $(u_1 , \dots , u_{r-1} , u_{r+1}, \dots, u_p, \varphi(\theta))$, engendré par ces éléments dans $A^\times$.

L'élément $\lambda_r^0 + \dots + \lambda_r^{q-1} \theta^{q-1}$ est inversible puisque λ_r^j n'appartient pas à $\mathfrak{m}$ (II, 8). Soit $\mu(\theta)$ son inverse. Alors on a $u_r = -\mu(\theta)\Lambda(\theta)$. Une base de l'idéal maximal $\mathfrak{m}^\times$ de $A^\times$ est $(u_1 , \dots , u_{r-1} , u_{r+1} , \dots , u_p , \varphi(\theta))$: elle contient p éléments : $A^\times$ est local régulier.

<u>4e point</u>. – Il reste à prouver que, la condition (1) étant réalisée, et λ étant supérieur à 1, la condition (2) est réalisée, lorsque $A^\times$ est local régulier et lorsque la dimension de A , donc de $A^\times$, p , est supérieur à 1. Pour $p = 1$, en effet, nous l'avons établi, (2e point). Si $A^\times$ est local régulier, une base minimale déduite de $(u_1 , \dots , u_p) \varphi'(\theta)$ comprend p éléments : un des u_i , soit u_p , s'exprime linéairement en fonction de $u_1 , \dots , u_{p-1} , \varphi'(\theta)$. L'idéal $\mathfrak{i}^\times$ engendré par $u_1 , \dots , u_{p-1}$, dans $A^\times$ est premier et son intersection avec A est de rang $p - 1$ et comprend l'idéal premier $\mathfrak{i}$ engendré par $u_1 , \dots , u_{p-1}$ dans A . $\mathfrak{i}^\times \cap A$ est distinct de $\mathfrak{m}$, dont le rang est p . $\mathfrak{i}^\times \cap A$ ne peut contenir strictement $\mathfrak{i}$, car on aurait dans A la chaîne de $p + 1$ idéaux premiers dans A , distincts : $(u_1) , \dots , \mathfrak{i} , \mathfrak{i}^\times \cap A , \mathfrak{m}$. Ceci est impossible et par suite $\mathfrak{i}^\times \cap A = \mathfrak{i}$.

Désignons par $\varphi'_{\mathfrak{i}}(x)$ le polynome déduit du polynome $\varphi'(x)$ par passage aux classes de $\frac{A}{i} = B$, et par $\overline{\varphi}'_i$, le polynome déduit de φ'_i en prenant les classes de B modulo $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}/i$: $\overline{\varphi}'_i$ est irréductible dans $\frac{B}{\mathfrak{n}}[x]$, puisque $\frac{B}{\mathfrak{n}}$ est isomorphe à $A/\mathfrak{m}$.

Cela étant, $B^\times = \frac{A^\times}{i^\times}$ est local régulier et est extension entière de l'anneau local régulier $B = \frac{A}{i}$, qui est de dimension 1. Si η désigne la classe de θ modulo $i^\times$, on peut écrire $B^\times = B[\eta]$. On pourra vérifier que le polynome caractéristique de η , n'est autre que $\varphi_i(x)$. La décomposition de ce polynome dans $\frac{B}{\mathfrak{n}}[x]$ est $\overline{\varphi}_i(x) = [\overline{\varphi}'_i(x)]^\lambda$, $\overline{\varphi}'_i(x)$ étant irréductible dans $\frac{B}{\mathfrak{n}}[x]$, d'après ce que nous avons dit plus haut. De l'identité de la division par $\varphi'(x)$: $\varphi(x) = \varphi'(x)\lambda(x) + r(x)$, degré de $r(x) <$ degré de $\varphi'(x)$, on déduit :

$$\varphi_i(x) = \varphi'_i(x)\lambda_i(x) + r_i(x) \text{ , degré de } r_i(x) < \text{ degré de } \varphi'_i(x) \text{ , } \ldots$$

en prenant les classes, modulo i , des coefficients des polynomes. D'après le deuxième point, $r_i(x)$ ne doit pas avoir tous ses coefficients dans $\mathfrak{n}^2$ et ceci entraîne que $r(x)$ n'a pas tous les siens dans $\mathfrak{m}^2$.

Ainsi la condition (2) est réalisée.

IV. $A[\theta]$ intégralement clos dans son anneau complet des quotients ...

1. – Avant d'aborder le problème qui fait l'objet de cette partie et qui sera énoncé au paragraphe 8, il nous faut démontrer les généralisations suivantes de résultats figurant dans B.T. [3] :

<u>Résultat</u> R_1 : Un anneau $\mathfrak{o}$ noethérien est intégralement clos dans son anneau complet des quotients $\bar{\mathfrak{o}}$, si et seulement si :

(H'_1) : Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, de rang 1, de $\mathfrak{o}$, contenant un élément non diviseur de zéro, $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ est un anneau local régulier de dimension 1.

(H'_2) : a étant un élément de $\mathfrak{o}$, qui n'est pas un diviseur de zéro, (a) n'a pas d'idéaux premiers essentiels immergés. (cf. II, 2).

<u>Résultat</u> R_2 : Soit un anneau noethérien $\mathfrak{o}$. Supposons que, pour chaque idéal premier $\mathfrak{p}$, de rang 1, de $\mathfrak{o}$, contenant un élément non diviseur de zéro, $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ est intégralement clos. Si un idéal principal (a) , a n'étant pas diviseur de zéro dans $\mathfrak{o}$, a un idéal premier essentiel immergé $\mathfrak{q}$, pour tout élément b de $\mathfrak{q}$, non diviseur de zéro, (b) admet un idéal premier essentiel immergé. (B.T. [3], page 76, corollaire 4 ; cf. II, 9).

2. – RAPPEL. a. Soit $(0) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{q}_i$ étant $\mathfrak{p}_i$-primaire, $i = 1 , \ldots , r$.

Pour qu'un élément de $\mathfrak{o}$ soit diviseur de zéro, il faut et il suffit qu'il appartienne à un $\mathfrak{p}_i$.

b. Si $\mathfrak{o}$ ne contient que des éléments inversibles ou diviseurs de zéro, il est confondu avec $\bar{\mathfrak{o}}$, donc intégralement clos. Dans la suite nous supposerons toujours qu'il existe dans $\mathfrak{o}$ un élément non diviseur de zéro et non inversible.

c. Supposons que l'élément a de $\mathfrak{o}$ ne soit pas diviseur de $\mathfrak{o}$, et soit $\frac{b}{a} = u$, un élément entier sur $\mathfrak{o}$, alors il existe ℓ non diviseur de zéro dans $\mathfrak{o}$, tel que pour tout entier naturel p , $u^p \ell$ appartient à $\mathfrak{o}$. (Si u est racine du polynome à coefficients dans A, $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, on peut prendre $\ell = a^{n-1}$).

d. Réciproquement, (B.T. [3],page 67, corollaire 3) : Soit $\mathfrak{o}$ un anneau noethérien, sous anneau d'un anneau $\mathfrak{o}'$ et soit b appartenant à $\mathfrak{o}'$. S'il existe un élément a de $\mathfrak{o}$, qui n'est pas diviseur de zéro dans $\mathfrak{o}'$, tel que ab^n appartienne à $\mathfrak{o}$, quel que soit l'entier naturel n , alors b est entier sur $\mathfrak{o}$.

3. - "Soit un élément a non diviseur de zéro dans un anneau local noethérien $\mathfrak{o}$, d'idéal maximal $\mathfrak{p}$ de rang supérieur à 1, et soit b appartenant à $(a) : \mathfrak{p}$, alors $\frac{b}{a}$ est entier sur $\mathfrak{o}$ ". [Généralisation de B.T. [3],page 74, lemme 1] .

Soit h appartenant à $\mathfrak{p}$ et soit $c = \frac{b}{a} h$. D'après le choix de b , c appartient à $\mathfrak{o}$. Supposons que c n'appartienne pas à $\mathfrak{p}$. Alors $(a) = (bh)$. Cela entraîne que b et h ne sont pas diviseurs de zéro. Il existe un idéal essentiel minimal $\mathfrak{p}'$ de (h) de rang 1, (le rang d'un idéal principal dans un anneau noethérien est au plus 1, et comme ici h n'est pas diviseur de zéro, il ne peut appartenir à aucun idéal premier essentiel de (0)), $\mathfrak{p}'$ est différent de $\mathfrak{p}$, car autrement, $\mathfrak{p}$ serait de rang 1. a appartient à $\mathfrak{p}'$, et, $\mathfrak{p}'$ étant de rang 1, est idéal premier essentiel de (a) . Soit $\mathfrak{q}'$ la composante $\mathfrak{p}'$-primaire de (a) , (bien déterminée, puisque $\mathfrak{p}'$ est minimal) ; puisque $\mathfrak{p}$ est différent de $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}' : \mathfrak{p} = \mathfrak{q}'$ et par suite b appartient à $\mathfrak{q}'$. Alors $(a) = (bh)$ montre que $\mathfrak{q}'\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}'} = \mathfrak{q}'\mathfrak{p}'\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}'}$, ce qui est une contradiction du corollaire 1 de la proposition 1 du chapitre "J-radical" de B.T. [3] , parce que $\mathfrak{p}'\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}'}$ est le J-radical de $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}'}$.

Nous voyons que c appartient à $\mathfrak{p}$ et de là que $(\frac{b}{a})^n h$ appartient à $\mathfrak{p}$, pour tout entier naturel n . Comme on peut prendre h non diviseur de zéro dans $\mathfrak{o}$ donc dans $\bar{\mathfrak{o}}$, $\frac{b}{a}$ est entier sur $\mathfrak{o}$, (IV, 2 d.).

4. - "Soit $\mathfrak{o}$ un anneau noethérien et soit a un élément de $\mathfrak{o}$ non diviseur de zéro. Si (a) a un idéal premier essentiel immergé, il existe b non nul

appartenant à $\mathfrak{o}$, tel que $\frac{b}{a}$ est entier sur $\mathfrak{o}$, et tel que $\frac{b}{a}$ n'appartient pas à $\mathfrak{o}$. Réciproquement s'il existe un tel élément b , ou bien il existe un idéal premier essentiel $\mathfrak{p}$ de rang 1 de (a) , tel que $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ n'est pas intégralement clos, ou bien (a) a un idéal essentiel immergé." (Généralisation de B.T. [3] , page 75, proposition 2).

Supposons que (a) ait un idéal premier essentiel immergé $\mathfrak{q}$. Formons l'anneau des quotients $\mathfrak{o}_{\mathfrak{q}}$: on l'obtient ainsi : on fait d'abord l'homomorphisme $\sigma : \mathfrak{o} \to \mathfrak{o}' = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{n}}$, $\mathfrak{n}$ étant l'intersection des composantes primaires de (O) contenues dans $\mathfrak{q}$. Soit $\mathfrak{q}' = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{n}}$. Ensuite on prend l'anneau ordinaire des quotients $\mathfrak{o}'_{\mathfrak{q}'}$. C'est cet anneau que l'on appelle aussi $\mathfrak{o}_{\mathfrak{q}}$. Remarquons que $\mathfrak{q}$ est de rang supérieur à 1, car il ne peut être de rang 1, (a) ayant alors un idéal premier essentiel de rang 0 , ce qui ne peut être (IV, 2, a.) : donc $\mathfrak{q}\mathfrak{o}_{\mathfrak{q}}$ noté aussi $\mathfrak{q}'\mathfrak{o}'_{\mathfrak{q}'}$, est de rang supérieur à 1. Il existe b" appartenant à $\mathfrak{o}'_{\mathfrak{q}'}$, et à $a'\mathfrak{o}'_{\mathfrak{q}'} : \mathfrak{q}'\mathfrak{o}'_{\mathfrak{q}'}$ et n'appartenant pas à $a'\mathfrak{o}'_{\mathfrak{q}'}$, a' étant la classe de a dans $\mathfrak{o}'$. a' n'est pas diviseur de zéro dans $\mathfrak{o}'$, car, autrement, il existerait λ n'appartenant pas à $\mathfrak{n}$, tel que $a\lambda$ appartienne à $\mathfrak{n}$; avec les notations de (IV, 2, a.), λ n'appartient pas, par exemple, à $\mathfrak{q}_1$ et par suite a appartiendrait à $\mathfrak{p}_1$, ce qui n'est pas (IV, 2, a.). D'après le paragraphe (IV, 3), $\frac{b''}{a'}$ est entier sur $\mathfrak{o}'_{\mathfrak{q}'}$, et n'appartient pas à $\mathfrak{o}'_{\mathfrak{q}'}$:

$$\left(\frac{b''}{a'}\right)^n + \frac{c'_1}{s'_1}\left(\frac{b''}{a'}\right)^{n-1} + \dots + \frac{c'_n}{s'_n} = 0 \quad , \; s'_i \in S' = \mathfrak{o}' - \mathfrak{q}', \; c'_i \in \mathfrak{o}', \; i = 1, \dots, n.$$

On peut supposer $b'' = \frac{c'}{s'}$, $c' \in \mathfrak{o}'$, $s' \in S'$. Posons $b'_1 = s's'_1 \dots s'_n c'$; $\frac{b'_1}{a'}$ est entier sur $\mathfrak{o}'$. Donc, pour tout entier naturel p , $\left(\frac{b'_1}{a'}\right)^p \ell'$ appartient à $\mathfrak{o}'$, pour un ℓ' qu'on peut prendre égal à a'^{n-1} , (IV, 2, c.). Si donc, b_1 et ℓ sont des représentants dans $\mathfrak{o}$ de b' , ℓ' , on peut écrire :

$$b_1^p \ell = a^p c_p + n_p \quad , \quad c_p \in \mathfrak{o} \; , \; n_p \in \mathfrak{n} .$$

Soient, par numérotation convenable, $\mathfrak{q}_{i+1}, \dots, \mathfrak{q}_r$, les idéaux primaires de (0) non compris dans $\mathfrak{q}$, donc rencontrant $S = \mathfrak{o} - \mathfrak{q}$; soit m_j un élément de $\mathfrak{q}_j \cap S$, $j = i+1, \dots, r$, et $m = \prod_{j=i+1}^{r} m_j$.

mn est nul pour tout $n \in \mathfrak{n}$, m n'étant pas nul, puisque S est multiplicativement fermé et ne contient pas zéro. Donc,

$$(mb_1)^p \ell = a^p d_p \; , \; d_p \in \mathfrak{o} .$$

Comme on peut prendre $m = a^{n-1}$, non diviseur de zéro dans $\mathfrak{O}$ et dans $\bar{\mathfrak{O}}$, $\frac{mb_1}{a}$ est entier sur $\mathfrak{O}$ (IV, 2, d.). Supposons que $\frac{mb_1}{a}$ appartienne à $\mathfrak{O}$, alors $\frac{m'b'_1}{a'}$ appartient à $\mathfrak{O}'$, m' appartenant à S', $\frac{b'_1}{a'}$ appartiendrait à $\mathfrak{O}'_{\mathfrak{q}'}$ et aussi $\frac{b''}{a'}$, ce qui n'est pas. Il suffit alors de prendre $b = mb_1$.

Pour la deuxième partie du théorème, $\frac{b}{a}$ est entier sur $\mathfrak{O}$ et n'appartient pas à $\mathfrak{O}$. Soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_h$, les idéaux premiers essentiels de (a). Ils sont tous minimaux par hypothèse, donc de rang 1. Soit $(a) = \Lambda_1 \cap \ldots \cap \Lambda_h$, Λ_i étant $\mathfrak{p}_i$-primaire. Puisque $\frac{b}{a}$ est entier sur $\mathfrak{O}$, $\frac{b'}{a'}$ est entier sur $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_i}$ donc dans $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_i}$, ($\mathfrak{n}_i$ étant l'intersection des idéaux primaires de (0) contenus dans $\mathfrak{p}_i$, x' désigne la classe de x modulo $\mathfrak{n}_i$).

$b'\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_i}$ est contenu dans $a'\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_i} = \Lambda'_i\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_i}$, et par suite b' appartient à $\Lambda'_i\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}_i} \cap \mathfrak{O}' = \Lambda'_i$. Donc b appartient à $(\Lambda_i, \mathfrak{n}_i)$ et comme Λ_i contient $\mathfrak{n}_i$, b appartient à Λ_i pour $i = 1, \ldots, h$ et b appartient à (a). Il y a contradiction.

5. - Si $\mathfrak{O}$ est intégralement clos dans $\bar{\mathfrak{O}}$, et si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de rang 1, contenant un élément non diviseur de zéro, $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local régulier de dimension 1 (NORTHCOTT [4]).

6. - La condition (H'_2) est nécessaire d'après la première partie du lemme du paragraphe (IV, 4).

La condition (H'_1) est nécessaire d'après (IV, 5).

Les conditions (H'_1) et (H'_2) sont suffisantes d'après la deuxième partie du lemme du paragraphe (IV, 4).

<u>La proposition</u> R_1 <u>est donc établie.</u>

7. - DÉMONSTRATION de la proposition R_2. - Soit b un élément non diviseur de zéro, autre que a, appartenant à $\mathfrak{q}$. Considérons $\mathfrak{O}_{\mathfrak{q}'} = \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$. Soit d' appartenant à $a'\mathfrak{O}'_{\mathfrak{q}'} : \mathfrak{q}'\mathfrak{O}'_{\mathfrak{q}'}$, et n'appartenant pas à $a'\mathfrak{O}'_{\mathfrak{q}'}$. $\frac{d'}{a'}$ n'appartient pas à $\mathfrak{O}'_{\mathfrak{q}'}$ et est entier sur $\mathfrak{O}'_{\mathfrak{q}'}$, (IV, 3), (remarquer en passant que a' et b' ne sont pas des diviseurs de zéro dans $\mathfrak{O}'$, démonstration déjà faite en (IV, 4)).

Soit $c' = \frac{d'}{a'}b'$; c' appartient à $\mathfrak{O}'_{\mathfrak{q}'}$. $\frac{d'}{a'} = \frac{c'}{b'}$ montre que $\frac{c'}{b'}$ est entier sur $\mathcal{O}'_{\mathfrak{q}}$, et qu'il n'appartient pas à $\mathcal{O}'_{\mathfrak{q}}$. Alors un raisonnement déjà fait à la première partie du paragraphe (IV, 4) montre qu'il existe un élément $\frac{e}{b}$ n'appartenant pas à $\mathcal{O}$ et entier sur $\mathcal{O}$, $(e \in \mathcal{O})$. D'après le théorème du paragraphe (IV, 4), (b) admet un idéal premier essentiel immergé.

8. - Nous sommes maintenant en mesure d'aborder le problème qui fait l'objet de cette quatrième partie :

A est ici un anneau avec diviseurs de zéro, noethérien, intégralement clos dans son anneau complet des quotients et de dimension supérieur ou égal à 1. A vérifie de plus les deux hypothèses suivantes :

(1) les idéaux premiers essentiels de (0) sont tous minimaux.

(2) Appelons <u>idéal utile,</u> un idéal premier essentiel de (0), contenu dans un idéal premier de rang 1 de A. Alors, si $\mathfrak{U}$ est un idéal utile, $A/\mathfrak{U}$ est intégralement clos.

Soit B un suranneau de A, commutatif, dont l'élément unité est celui de A et soit θ un élément de B, racine d'un polynome $\varphi(x)$, unitaire, à coefficients dans A, θ n'étant racine d'aucun polynome de $A[x]$ de degré inférieur à celui de $\varphi(x)$. On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que $A[\theta]$, noté aussi $A^\times$, soit intégralement clos. n est le degré de $\varphi(x)$.

9. - Tout idéal premier de rang 1 de $A^\times$ a pour restriction dans A un idéal premier de rang 1 :

En effet soit un idéal premier $\mathfrak{p}^\times$, de rang 1, de $A^\times$, $\mathfrak{p}^\times \cap A = \mathfrak{p}$ est un idéal premier de A de rang supérieur ou égal à 1. $\mathfrak{p}$ contient donc un élément a non diviseur de zéro, qui est non diviseur de zéro dans $A^\times$ (utiliser le fait que $A^\times$ est un A-module libre). $aA^\times$ admet $\mathfrak{p}^\times$ comme idéal premier essentiel, donc $aA^\times : \mathfrak{p}^\times$ comprend effectivement $aA^\times$: il existe $b^\times = b_0 + \dots + b_{n-1}\theta^{n-1}$, avec $b_i \in A$, $i = 0, \dots, n-1$, et avec un b_k pour $0 \leq k \leq n-1$, qui **n'appartient** pas à aA, tel que $b^\times p^\times$ appartient à $a^\times A$, pour tout $p^\times$ appartenant à $\mathfrak{p}^\times$. En particulier $b^\times p$ appartient à $aA^\times$, pour tout p appartenant à $\mathfrak{p}$ et $b_k p$ appartient à aA pour tout p appartenant à $\mathfrak{p}$. Comme b_k n'appartient pas à aA, ceci entraîne que $\mathfrak{p}$ est compris dans un idéal premier de aA et que $\mathfrak{p}$ est de rang 1, [à cause de (H'_2)].

10. - Tout idéal utile de $A^\times$ est un idéal utile de A.

Soit, en effet, $\mathfrak{n}^\times$ un idéal utile de $A^\times$, compris donc dans l'idéal premier de rang 1 $\mathfrak{p}^\times$. $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^\times \cap A$ est un idéal premier de rang 1 de A (IV, 9), contenant $\mathfrak{n}^{\times} \cap A = \mathfrak{n}$, nécessairement de rang 0. Ainsi $\mathfrak{n}$ est un idéal utile de A . La réciproque résultera de la démonstration qui suit (IV, 12).

11. - Soit $\mathfrak{n}$ un idéal utile de A . Posons $S = A - \mathfrak{n}$. Considérons $A_S^{\times}$. $A_S^{\times}$ s'obtiendra en faisant d'abord l'homomorphie σ : $A^{\times} \to \frac{A^{\times}}{\mathfrak{n}'}$, $\mathfrak{n}'$ étant égal à $\mathfrak{n}A^{\times}$, (remarquer que $\mathfrak{n}$ est la composante primaire de (0) relative à $\mathfrak{n}$, dans A), puis en prenant les quotients au sens ordinaire par $\sigma(S)$:

$$A_S^{\times} = \sigma(A^{\times})_{\sigma(S)} = \left(\frac{A}{\mathfrak{n}}[\theta^{\times}]\right)_{\sigma(S)} = A_S[\theta^{\times}] ,$$

où $\theta^{\times}$ est racine de $\varphi_{\mathfrak{n}}(x)$ déduit de $\varphi(x)$ par passage aux classes modulo $\mathfrak{n}$ des coefficients, $\theta^{\times}$ n'étant racine d'aucun polynome de $\frac{A}{\mathfrak{n}}[x]$ de degré inférieur A_S est le corps des quotients de $\frac{A}{\mathfrak{n}}$. Les idéaux primaires de $A^{\times}$, dont l'intersection avec A est $\mathfrak{n}$, sont en correspondance biunivoque avec les idéaux primaires de $A_S[\theta^{\times}]$ sur (0) . Ils sont donnés par la décomposition dans $A_S[x]$ de $\varphi_{\mathfrak{n}}(x)$ (I, 1). Soit $\varphi_{\mathfrak{n}}(x) = \prod_{i=1}^{r_{\mathfrak{n}}} f_i^{\rho_i}(x)$; puisque $\frac{A}{\mathfrak{n}}$ est intégralement clos par hypothèse, les $f_i(x)$ sont dans $\frac{A}{\mathfrak{n}}[x]$. Les $r_{\mathfrak{n}}$ idéaux premiers, dont l'intersection avec A est $\mathfrak{n}$, sont engendrés respectivement par $f_i'(\theta)$ et $\mathfrak{n}$, $i = 1,\dots, r_{\mathfrak{n}}$, $f_i'(x) = f_i(x)$ modulo $\mathfrak{n}$.

12. - Voyons maintenant comment sont obtenus les idéaux premiers de $A^{\times}$ de rang 1, ayant l'idéal $\mathfrak{p}$ pour restriction à A . Appelons $\mathfrak{n}$ l'idéal premier de (0) contenu dans $\mathfrak{p}$. $\mathfrak{n}$ est la composante primaire de (0) relative à $\mathfrak{n}$. Les idéaux de rang 1, premiers, dont l'intersection avec A est $\mathfrak{p}$, sont en correspondance biunivoque avec les idéaux premiers de $A_S^{\times}$, $S = A - \mathfrak{p}$, dont l'intersection avec A_S est $\mathfrak{p}_S$. On verrait comme en (IV, 11), que $A_S^{\times} = A_S[\theta^{\times}]$, $\theta^{\times}$ étant racine de $\varphi_{\mathfrak{n}}(x)$. Les idéaux premiers de $A_S^{\times}$, dont l'intersection avec A_S est $\mathfrak{p}_S$, sont donnés par la décomposition de $\varphi_{\mathfrak{n}}(x)$ dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$, donc par les décompositions des $f_i(x)$ dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$. On trouvera donc toujours un idéal premier de rang 1 de $A_S^{\times}$, contenant $\mathfrak{n}_S^{\times}$, engendré dans $A_S^{\times}$ par $f_i(\theta^{\times})$, donc un idéal premier de rang 1 de $A^{\times}$, contenant l'idéal premier $\mathfrak{n}^{\times}$, engendré par $f_i'(\theta)$ et $\mathfrak{n}$ dans $A^{\times}$, dont l'intersection avec A est $\mathfrak{n}$:

Tout idéal premier de $A^{\times}$, dont la restriction à A est un idéal utile de A , est un idéal utile de $A^{\times}$.

13. - Supposons $A^{\times}$ intégralement clos. L'idéal premier $\mathfrak{n}^{\times}$ de $A^{\times}$ engendré par

$f_i'(\theta)$ et $\mathfrak{n}$, idéal utile de A , est un idéal utile de $A^\times$: la composante primaire de (0) relative à $\mathfrak{n}^\times$ est $\mathfrak{n}^\times$ lui-même. Il n'y a donc pas d'idéaux $\mathfrak{n}^\times$-primaires distincts de $\mathfrak{n}^\times$ dans $A^\times$ et ceci a lieu si et seulement si $\rho_i = 1$, (définition de ρ_i en IV, 11).

Par ailleurs $\mathfrak{p}^\times$ étant un idéal premier de $A^\times$, dont l'intersection avec A est l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de rang 1, contenant $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}^\times$ est un idéal de rang 1, qui ne doit contenir qu'un seul idéal premier essentiel de (0) , dont l'intersection avec A est obligatoirement $\mathfrak{n}$. Ceci a lieu si et seulement si, en posant $S = A - \mathfrak{p}$, $\overline{f}_i^{(S)}$ désignant le polynome déduit de $f_i(x)$ par passage aux classes des coefficients dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}$, $\overline{f}_i^{(S)}$ et $\overline{f}_j^{(S)}$ n'ont pas de facteurs en commun pour tout i , j , $i \neq j$.

14. – Soit, enfin $\mathfrak{p}^\times$ un idéal premier de $A^\times$ de rang 1, contenant un seul idéal premier essentiel de (0) , $\mathfrak{n}^\times$, qui est aussi la composante primaire de (0) relative à $\mathfrak{n}^\times$ lui-même. Posons $S^\times = A^\times - \mathfrak{p}^\times$ et considérons $A^\times_{S^\times}$; $A^\times_{S^\times} = (\frac{A^\times}{\mathfrak{n}^\times})_{S^\times/\mathfrak{n}^\times}$

Or $\frac{A^\times}{\mathfrak{n}^\times} = \frac{A}{\mathfrak{n}}[\theta^\times]$, le polynome caractéristique de $\theta^\times$ sur $\frac{A}{\mathfrak{n}}$ étant $f_i(x)$, ($\mathfrak{n}^\times$ étant engendré par $f_i'(\theta)$ et $\mathfrak{n}$). On peut écrire :

$$\left(\frac{A}{\mathfrak{n}}[\theta^\times]\right)_{S^\times/\mathfrak{n}^\times} = \left(\left[\frac{A}{\mathfrak{n}}[\theta^\times]\right]_{S/\mathfrak{n}}\right)_{S^\times/\mathfrak{n}^\times} = \left(A_S[\theta^\times]\right)_{S^\times/\mathfrak{n}^\times} ,$$

(on pose $S = A - \mathfrak{p}$ avec $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^\times \cap A$] .

Soit $\mathfrak{p}^\times_S$ l'idéal $\frac{\mathfrak{p}^\times}{\mathfrak{n}^\times} A_S[\theta^\times]$ et soit $S^\times_S = A_S[\theta^\times] - \mathfrak{p}^\times_S$. Comme $S^\times_S$ contient $S^\times/\mathfrak{n}^\times$, on peut écrire

$$(A_S[\theta^\times])_{S^\times_S} = [(A_S[\theta^\times])_{\frac{S^\times}{\mathfrak{n}^\times}}]_{S^\times_S} = (A^\times_{S^\times})_{S^\times_S} .$$

Si $A^\times$ est supposé intégralement clos, $A^\times_{S^\times}$ l'est d'après la condition (H_1') et par suite aussi $(A_S[\theta^\times])_{S^\times_S}$. Comme ceci a lieu pour tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}^\times$ de $A^\times$, contenant $\mathfrak{n}^\times$, dont l'intersection avec A est $\mathfrak{p}$, on peut voir (II, 2, remarque) que $A_S[\theta^\times]$ est intégralement clos.

Donc pour que $A^\times$ soit intégralement clos, il est nécessaire, que, $\mathfrak{p}$ étant un idéal premier de rang 1 de A quelconque, dont on appelle $\mathfrak{n}$ l'idéal utile, et S étant égal à $A - \mathfrak{p}$, $A_S[x]/(f_i(x))$, $i = 1, \ldots, r_{\mathfrak{n}}$, soit intégralement clos.

Si cette condition est réalisée, la condition (H_1') est réalisée dans $A^\times$.

Si la condition (H_1') est réalisée dans $A^\times$, un raisonnement, utilisant R_2 , analogue à celui du paragraphe (II, 8) montre que la condition (H_2') l'est aussi.

15. - On peut donc énoncer :

Pour que $A[\theta]$ soit intégralement clos, sous les hypothèses énoncées au paragraphe (IV, 8) il faut et il suffit que les conditions C_1 , C_2 , C_3 suivantes soient simultanément réalisées :

C_1 : $\mathfrak{n}$ étant un idéal utile quelconque,

$$\varphi_{\mathfrak{n}}(x) = \prod_{i=1}^{r_{\mathfrak{n}}} f_i(x) ,$$

$f_i(x)$ appartenant à $\frac{A}{\mathfrak{n}}[x]$, et étant irréductible dans $\frac{A}{\mathfrak{n}}[x]$, $i = 1, \ldots, r_{\mathfrak{n}}$.

C_2 : Si $\overline{f}_i^{(S)}(x)$ désigne ce que devient $f_i(x)$ modulo $\mathfrak{p}_S$, $S = A - \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ étant un idéal premier quelconque de rang 1 de A , dont on note $\mathfrak{n}$ l'idéal utile, $\overline{f}_i^{(S)}(x)$ et $\overline{f}_j^{(S)}(x)$ n'ont pas de facteur commun dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$, pour tout i et j , variant de 1 à $r_{\mathfrak{n}}$, $i \neq j$.

C_3 : Si $\overline{f}_i^{(S)}(x) = \prod_{k=1}^{h} \overline{g}_{ik}^{\alpha_{ik}}(x)$ est la décomposition de $\overline{f}_i^{(S)}(x)$ en facteurs premiers dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$, et $\overline{g}_{ik}(x)$ se relevant en un polynome $g_{ik}(x)$, de même degré que $\overline{g}_{ik}(x)$, dans $A_S[x]$, le reste de la division de $f_i(x)$ par un $g_{ik}(x)$ relatif à un α_{ik} supérieur à 1, n'a pas tous ses coefficients dans $\mathfrak{p}_S^2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LAFON (J.-P.) et MAURY (G.). - Théorie des idéaux dans $A[\theta]$, extension simple d'un anneau A , C.R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 392-393.

[2] MAURY (Guy). - Théorèmes de transfert de certaines propriétés de l'anneau $A[\theta]$ extension simple entière de A , C.R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 265-267.

[3] NAGATA (Masayoshi). - Basic theorems on general commutative rings, Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto, Série A, t. 29, 1955, p. 59-77.

[4] NORTHCOTT (D.G.). - Ideal theory. - Cambridge, University Press, 1953.