Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

J. Riguet

Travaux soviétiques récents sur la théorie des demi-groupes : la représentation des demi-groupes ordonnés

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. nº 9, p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A9_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

TRAVAUX SOVIÉTIQUES RÉCENTS SUR LA THÉORIE DES DEMI-GROUPES : LA REPRÉSENTATION DES DEMI-GROUPES ORDONNÉS

(Exposé de J. RIGUET, le 28.1.1956)

[V. V. VAGNER (В. В. ВАГНЕР). - Predstavlenie uporjadočennykh polugrupp, Matematičeskij Sbornik, t. 38 (80), 1956, p. 203-240].

On sait que tout demi-groupe abstrait est toujours représentable de manière triviale par un demi-groupe d'applications d'un ensemble dans lui-même : il suffit de considérer le demi-groupe des translations à droite ou dans le demi-groupe lui-même, ou dans le nouveau demi-groupe obtenu en adjoignant un élément neutre au demi-groupe considéré. Néanmoins, on s'est, jusqu'à présent, assez peu occupé de rechercher toutes les représentations possibles d'un demi-groupe abstrait par un demi-groupe d'applications ou de quasi-applications d'un ensemble dans lui-même. On ne trouve dans la littérature que des recherches sur la représentation de demi-groupes de types spéciaux, à savoir les demi-groupes finis de Suschkevitch (appelés par lui demi-groupes noyaux) et leurs généralisations (appelées par REES demi-groupes complètement simples sans zéro) ; c'est seulement dans le travail de STOLL (Duke math. J., t. 11, 1944, p. 251-265) qu'on trouve une recherche relative à toutes les représentations d'un demi-groupe fini arbitraire qui est susceptible d'être généralisée au cas des demi-groupes infinis. Néanmoins, cette recherche n'a pas permis à STOLL d'énoncer un résultat définitif.

Les recherches sur les fondements de la géométrie différentielle et la théorie des groupes de transformations de Lie avaient déjà montré la nécessité d'étudier les groupes généralisés de quasi applications biunivoques [1]. VAGNER a construit du reste une théorie abstraite de ces groupes généralisés [2].

On voit donc que les travaux que nous venons de mentionner rendent assez naturelle l'étude des représentations des demi-groupes abstraits par des demi-groupes de

(1) Cf. Exposé de J. RIGUET, Séminaire Châtelet-Dubreil, t. 7 bis, 1953/54.

(2) V. V. VAGNER. - Teorija obobščennykh grud i obobščennykh grupp, Matematičeskij Sbornik, t. 32 (74), 1953, p. 545-632. Voir l'analyse en français dans Mathematical Reviews, t. 15, 1954, p. 501-502.

quasi-applications d'un ensemble dans lui-même. Cette étude présente de plus un intérêt particulier du fait que lorsque l'on s'est donné un demi-groupe ordonné, il est naturel de se demander s'il existe une représentation de ce demi-groupe à l'aide de quasi-applications pour laquelle l'ordre dans le demi-groupe correspond à l'ordre d'inclusion des quasi-applications. Pour un demi-groupe arbitraire, une telle représentation peut ne pas exister comme le montre l'exemple des groupes ordonnés de manière non triviale (des demi-groupes ordonnés pour lesquels une telle représentation existe seront appelés plus loin demi-groupes ordonnés représentables).

Le présent travail va donner une méthode générale permettant de trouver toutes les représentations d'un demi-groupe donné par des quasi-applications. On en déduira les conditions auxquelles doivent satisfaire une relation d'ordre compatible sur un demi-groupe pour que le demi-groupe ordonné ainsi constitué soit représentable.

Pour permettre au lecteur de se reporter facilement au texte russe, les numéros des formules et des théorèmes ont été conservés. Toutefois, certaines notations ont été changées.

I. Rappel de quelques définitions.

1.- En théorie des relations binaires.

Etant donné un ensemble E , une relation $R \subset E \times E$ est dite quasi-fonctionnelle lorsque $R\bar{R}^1 \subset \Delta$, elle est dite fonctionnelle lorsque $R\bar{R}^1 \subset \Delta \subset \bar{R}^1 R$.

A toute relation quasi-fonctionnelle R on peut associer une quasi-application r qui à $x \in pr_1 R$ fait correspondre $r(x) \in E$ de manière que $R(x) = \{r(x)\}$. Lorsque R est fonctionnelle $r(x)$ a un sens, quel que soit x et on dit que r est l'application correspondante à R .

Dans ce qui suit, on confondra, par abus de langage, R et r , bien qu'il faille toujours avoir la distinction présente à l'esprit.

Rappelons qu'une relation $R \subset E \times E$ est appelée relation de préordre lorsqu'elle est à la fois réflexive et transitive, autrement dit, lorsqu'elle satisfait à $R \supset \Delta$ et $RR \subset R$. Une relation de préordre satisfaisant à $R \cap \bar{R}^1 = \Delta$ est appelée relation d'ordre. Une relation de préordre symétrique est appelée relation d'équivalence. Si R est un préordre, $R \cap \bar{R}^1$ est une équivalence. Enfin une relation R qui est à la fois symétrique et transitive est appelée une relation de quasi-équivalence.

Enfin, rappelons (3) que si $R_1 \subset E_1 \times F_1$ et $R_2 \subset E_2 \times F_2$ sont deux relations binaires, on définit leur produit $R_1 \otimes R_2 \subset (E_1 \times E_2) \times (F_1 \times F_2)$ comme l'ensemble de tous les couples $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (E_1 \times E_2) \times (F_1 \times F_2)$ tels que $(x_1, x_2) \in R_1$ et $(y_1, y_2) \in R_2$.

Si $R \subset E_1 \times E_2$, on a alors

2.4 $$(R_1 \otimes R_2)(R) = R_2 R \overset{-1}{R_1}$$

En effet

$$(R_1 \otimes R_2)(R) = \bigcup_{(x_1,x_2) \in R} (R_1 \otimes R_2)(x_1,x_2) = \bigcup_{(x_1,x_2) \in R} R_1(x_1) \times R_2(x_2) = \bigcup_{(x_1,x_2) \in R} R_2\{(x_1,x_2)\} \overset{-1}{R_1} =$$
$$= R_2 R \overset{-1}{R_1}$$

2.- <u>En théorie des demi-groupes.</u>

Si G est un demi-groupe, les applications γ_x et δ_x définies respectivement par $\gamma_x(y) = xy$, $\delta_x(y) = yx$ sont appelées respectivement <u>translation à gauche</u> et <u>translation à droite</u>.

Si $H \subset G$ on pose

$$\gamma_H = \bigcup_{x \in H} \gamma_x \quad , \quad \delta_H = \bigcup_{x \in H} \delta_x \quad .$$

Une relation binaire $R \subset G \times G$ sera dite <u>régulière à gauche</u> lorsque $(g_1, g_2) \in R$ entraîne $(gg_1, gg_2) \in R$ autrement dit lorsque $R \subset \overset{-1}{\gamma_g} R \gamma_g$.

Etant donné une relation binaire quelconque $R \subset G \times G$, nous appellerons <u>ouverture régulière à gauche</u> de R la plus petite relation binaire $\mathcal{O}(R)$ régulière à gauche contenue dans R :

$$\mathcal{O}(R) = R \cap \bigcap_{g \in G} \overset{-1}{\gamma_g} R \gamma_g$$

(cette définition est justifiée car $\mathcal{O}(R) \subset R$, $\mathcal{O}(\mathcal{O}(R)) = \mathcal{O}(R)$, $R_1 \subset R_2 \rightarrow \mathcal{O}(R_1) \subset \mathcal{O}(R_2)$ et R régulière à gauche $\rightleftarrows R = \mathcal{O}(R)$).

3.- <u>Demi-groupes de quasi-applications.</u>

Soit $\mathcal{T}$ un demi-groupe de quasi-applications d'un ensemble E dans lui-même. On appellera <u>relation de transitivité</u> de $\mathcal{T}$ la relation transitive $T_{\mathcal{T}} \subset E \times E$ définie par

---

(3) Cf. J. RIGUET. - Fondements de la théorie des relations binaires. - Thèse Sc. math. Paris. 1951.

$$T_{\mathfrak{F}} = \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{F}} \gamma \quad .$$

$T_{\mathfrak{F}} \cup \Delta$ est une relation de préordre.

$\mathfrak{F}$ sera dit <u>effectif</u> lorsque $pr_1 T_{\mathfrak{F}} \cup pr_2 T_{\mathfrak{F}} = E$.

On appellera <u>poids</u> de $\mathfrak{F}$ la puissance minimale d'un sous-ensemble partout dense par rapport à la fermeture associée à $T_{\mathfrak{F}} \cup \Delta$, autrement dit la puissance minimale des sous-ensembles $X \subset E$ tels que $(T_{\mathfrak{F}} \cup \Delta)(X) = E$.

On appellera <u>poids partiel</u> de $\mathfrak{F}$ le poids de $\mathfrak{F}$ en tant que demi-groupe de quasi-applications sur $pr_1 T_{\mathfrak{F}}$ autrement dit la puissance minimale des sous-ensembles $X \subset E$ tels que $pr_1 T_{\mathfrak{F}} \subset (T_{\mathfrak{F}} \cup \Delta)(X)$ (ou, ce qui est équivalent, tels que $(T_{\mathfrak{F}} \cup \Delta)(X) = pr_1 T_{\mathfrak{F}}$) .

On dira qu'une relation de quasi-équivalence $R \subset E \times E$ est une <u>relation d'imprimitivité</u> de $\mathfrak{F}$ lorsque, quels que soient $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{F}$ on a

(2.13) $$R \gamma R \overset{-1}{\gamma} R \subset R$$

(2.14) $$R \gamma_2 R \gamma_1 R = R \gamma_2 \gamma_1 R$$

II. <u>Homomorphismes partiellement représentatifs des demi-groupes de quasi-applications</u>.

<u>DÉFINITION</u>.- Soit $\mathfrak{F}$ un demi-groupe de quasi-applications de l'ensemble E dans lui-même et soit F un ensemble quleconque. Nous dirons qu'une quasi-application θ de E dans F est un <u>homomorphisme partiellement représentatif</u> de $\mathfrak{F}$ lorsque

- quel que soit $\gamma \in \mathfrak{F}$, $\theta \gamma \overset{-1}{\theta}$ est une quasi-application (de F dans F)
- quels que soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{F}$, $\theta \gamma_2 \overset{-1}{\theta} \theta \gamma_1 \overset{-1}{\theta} = \theta \gamma_2 \gamma_1 \overset{-1}{\theta}$.

Il est facile de montrer que, pour que θ soit un homomorphisme, partiellement représentatif de $\mathfrak{F}$, il faut et il suffit que la quasi-équivalence $\overset{-1}{\theta}\theta$ soit une relation d'imprimitivité de $\mathfrak{F}$.

<u>DEFINITION</u>.- $\mathfrak{F}$ et E ayant même signification que ci-dessus, nous dirons qu'un sous-ensemble $X \subset E$ est <u>homomorphe</u> par rapport à $\mathfrak{F}$ lorsque Δ_X est un homomorphisme partiellement représentatif de $\mathfrak{F}$.

<u>THEOREME 2.1</u>.- <u>Pour que</u> $X \subset E$ <u>soit homomorphe par rapport à</u> $\mathfrak{F}$ <u>il faut et il suffit que</u> X <u>soit l'intersection de deux sous-ensembles</u> X_1 <u>et</u> X_2 <u>satisfaisant à</u> $T_{\mathfrak{F}}(X_1) \subset X_1$, $\overset{-1}{T_{\mathfrak{F}}}(X_2) \subset X_2$.

En effet pour que X soit homomorphe, il faut et il suffit, d'après la définition, que l'on ait

$$\Delta_X \gamma_2 \Delta_X \gamma_1 \Delta_X \subset \Delta_X \gamma_2 \gamma_1 \Delta_X$$

ou encore, ce qui est équivalent

(2.15) $$\Delta_X \gamma_2 \gamma_1 \Delta_X \subset \gamma_2 \Delta_X \gamma_1$$

Mais la condition (2.15) est elle-même équivalente à

(2.15') $$\Delta_X \gamma_2 \Delta_{\gamma_1(X)} \subset \gamma_2 \Delta_X$$

En effet (2.15) entraîne (2.15') car

$$\Delta_X \gamma_2 \Delta_{\gamma_1(X)} = \Delta_X \gamma_2 \gamma_1 \Delta_X \overset{-1}{\gamma_1} \subset \gamma_2 \Delta_X \gamma_1 \overset{-1}{\gamma_1} \subset \gamma_2 \Delta_X$$

et (2.15') entraîne (2.15) car

$$\Delta_X\gamma_2\gamma_1 \Delta_X = \Delta_X \gamma_2\gamma_1 \Delta_{pr_1 \gamma_1} \Delta_X = \Delta_X \gamma_2\gamma_1 \Delta_X \Delta_{pr_1 \gamma_1} \subset \Delta_X \gamma_2\gamma_1\Delta_X\overset{-1}{\gamma_1}\gamma_1 = \Delta_X \gamma_2\Delta_{\gamma_1(X)}\gamma_1$$

d'où

$$\Delta_X \gamma_2\gamma_1 \Delta_X \subset (\Delta_X\gamma_2 \Delta_{\gamma_1(X)}) \gamma_1 \subset \gamma_2 \Delta_X \gamma_1 \quad \text{d'après (2.15')}$$

Les deux termes de (2.15') étant des quasi-applications, (2.15') est équivalente à la condition

$$pr_1(\Delta_X \gamma_2 \Delta_{\gamma_1(X)}) \subset pr_1 \gamma_2 \Delta_X$$

elle-même équivalente à

$$\gamma_1(X) \cap \overset{-1}{\gamma_2}(X) \subset X \cap pr_1 \gamma_2$$

elle-même équivalente à

$$\gamma_1(X) \cap \overset{-1}{\gamma_2}(X) \subset X$$

quels que soient $\gamma_1 , \gamma_2 \in \mathcal{F}$.

Donc pour que X soit homomorphe par rapport à $\mathcal{F}$ il faut et il suffit que

$$T_{\mathcal{F}} (X) \cap \overset{-1}{T_{\mathcal{F}}} (X) \subset X$$

ce qu'on peut encore écrire

$$X = (T_{\mathcal{F}} \cup \Delta) (X) \cap \overset{-1}{(T_{\mathcal{F}} \cup \Delta)} (X)$$

Il suffit de prendre $X_1 = (T_{\mathcal{F}} \cup \Delta) (X)$, $X_2 = \overset{-1}{T_{\mathcal{F}} \cup \Delta} (X)$ pour voir que cette condition entraîne celle de l'énoncé. Réciproquement la condition de l'énoncé entraîne que

$$X = X_1 \cap X_2 \subset X_1 \qquad \text{d'où} \qquad T_{\mathcal{F}}(X) \subset X_1$$

et $$X = X_1 \cap X_2 \subset X_2 \qquad \text{d'où} \qquad \overset{-1}{T}_{\mathcal{F}}(X) \subset X_2 \quad .$$

D'où

$$T_{\mathcal{F}}(X) \cap \overset{-1}{T}_{\mathcal{F}}(X) \subset X_1 \cap X_2 = X \quad .$$

DÉFINITION.- $\mathcal{F}$ et E ayant toujours même signification et X étant un sous-ensemble homomorphe de E par rapport à $\mathcal{F}$, on appellera restriction bilatère de $\mathcal{F}$ au sous-ensemble X le demi-groupe $\Delta_X \mathcal{F} \Delta_X$ image homomorphe de $\mathcal{F}$ par l'homomorphisme partiellement représentatif Δ_X .

Dans le cas particulier où X satisfait à $T_{\mathcal{F}}(X) \subset X$ (ce qui entraîne, d'après le théorème 2.1, qu'il est homomorphe) on peut écrire $\Delta_X \mathcal{F} \Delta_X = \mathcal{F} \Delta_X$.

Dans le cas particulier où X satisfait à $\overset{-1}{T}_{\mathcal{F}}(X) \subset X$ (ce qui entraîne qu'il est homomorphe d'après 2.1) on peut écrire $\Delta_X \mathcal{F} \Delta_X = \Delta_X \mathcal{F}$.

Cela résulte immédiatement du fait que si R est une relation binaire quelconque

$$R(X) \subset X \rightleftarrows \Delta_X R \Delta_X = R \Delta_X$$

$$\overset{-1}{R}(X) \subset X \rightleftarrows \Delta_X R \Delta_X = \Delta_X R$$

THÉORÈME 2.2.- Si $\mathcal{F}$ est un demi-groupe de quasi-applications de E dans lui-même et si $P = \bigcap_{\gamma \in \mathcal{F}} pr_1 \gamma$ on a $T_{\mathcal{F}}(P) \subset P$.

En effet, $pr_1\, \gamma_2 \gamma_1 = \overset{-1}{\gamma}_1(pr_1\, \gamma_2)$. Donc

$$P = \bigcap_{\gamma \in \mathcal{F}} pr_1 \gamma \subset \overset{-1}{\gamma}_1(pr_1\, \gamma_2)$$

quels que soient $\gamma_1 , \gamma_2 \in \mathcal{F}$. Donc

$$\gamma_1(A) \subset \gamma_1\, \overset{-1}{\gamma}_1(pr_2\, \gamma_2) \subset pr_2\, \gamma_2$$

quels que soient $\gamma_1 , \gamma_2 \in \mathcal{F}$. Donc

$$\gamma_1(P) \subset \bigcap_{\gamma_2 \in \mathcal{F}} pr_2\, \gamma_2 = P \quad \text{quel que soit } \gamma_1 \ .$$

THÉORÈME 2.3.- Si $\mathcal{F}$ est un demi-groupe de quasi-applications de E dans lui-même dont l'une au moins n'est pas une application, il existe un demi-groupe $\hat{\mathcal{F}}$ d'applications de l'ensemble $\hat{E}$, obtenu par adjonction d'un élément à E , dans lui-même, de même poids que $\mathcal{F}$ et tel que $\mathcal{F} = \Delta_E \hat{\mathcal{F}} \Delta_E = \Delta_E \hat{\mathcal{F}}$.

Soit $\hat{E} = E \cup \{c\}$. Etant donné $\gamma \in \mathfrak{F}$ posons

(2.23) $$\hat{\gamma} = \gamma \cup (pr_1 \gamma)' \times \{c\}$$

$(pr_1 \gamma)'$ désignant le complément de $pr_1 \gamma$ dans $\hat{E}$.

La correspondance $\gamma \to \hat{\gamma}$ est évidemment un isomorphisme du demi-groupe $\mathfrak{F}$ sur le demi-groupe $\hat{\mathfrak{F}}$ défini comme l'ensemble parcouru par les $\hat{\gamma}$ lorsque γ parcourt $\mathfrak{F}$.

On a $T_{\hat{\mathfrak{F}}}(c) = \{c\}$ puisque $c \in (pr_1 \gamma)'$ entraîne $\hat{\gamma}(c) = \{c\}$. Donc $T_{\hat{\mathfrak{F}}}(c) \cap \{c\}' = \emptyset$ c'est-à-dire $T_{\hat{\mathfrak{F}}}(c) \cap E = \emptyset$ ou encore $\{c\} \cap \overset{-1}{T}_{\hat{\mathfrak{F}}}(E) = \emptyset$ où $\overset{-1}{T}_{\hat{\mathfrak{F}}}(E) \subset \{c\}' = E$. On a donc d'après les remarques précedant le théorème 2.2

$$\mathfrak{F} = \Delta_E \hat{\mathfrak{F}} \Delta_E = \Delta_E \mathfrak{F} .$$

Soit A un sous-ensemble de E tel que $(T_{\mathfrak{F}} \cup \Delta)(A) = E$ avec puissance de A = poids de $\mathfrak{F}$. D'après (2.23) on a

$$T_{\hat{\mathfrak{F}}} = T_{\mathfrak{F}} \cup P' \times \{c\} \quad \text{en posant} \quad P = \bigcap_{\gamma \in \mathfrak{F}} pr_1 \gamma$$

D'où

$$(T_{\hat{\mathfrak{F}}} \cup \Delta)(A) = (T_{\mathfrak{F}} \cup \Delta)(A) \cup \{c\} = E \cup \{c\} = \hat{E}$$

car on a en effet $A \cap P' \neq \emptyset$. Sinon, on aurait $A \subset P$ d'où l'on tirerait

$$E = (T_{\mathfrak{F}} \cup \Delta)(A) \subset (T_{\mathfrak{F}} \cup \Delta)(P) = P \quad \text{d'après le théorème 2.2.}$$

On aurait donc $E \subset \bigcap_{\gamma \in \mathfrak{F}} pr_1 \gamma$ c'est-à-dire $pr_1 \gamma = E$ quel que soit $\gamma \in \mathfrak{F}$. Autrement dit tous les éléments γ de $\mathfrak{F}$ seraient des applications, contre l'hypothèse.

On a donc $(T_{\hat{\mathfrak{F}}} \cup \Delta)(A) = \hat{E}$ ce qui montre que poids $\hat{\mathfrak{F}} \leq$ poids $\mathfrak{F}$. L'inégalité en sens inverse étant évidente, on a bien poids $\hat{\mathfrak{F}}$ = poids $\mathfrak{F}$.

Le théorème ainsi démontré est important, parce qu'il donne la possibilité de ramener l'étude des demi-groupes de quasi-applications à des demi-groupes d'applications.

III. Représentation des demi-groupes.

Soit G un demi-groupe et E un ensemble.

DÉFINITION.- On appellera <u>représentation</u> du demi-groupe G , par des quasi-applications de E , tout homomorphisme de G dans le demi-groupe constitué par toutes les quasi-applications de E dans lui-même.

Une représentation P de G par des quasi-applications de E peut donc être considérée comme une relation binaire $P \subset G \times (E \times E)$ telle que

(4.1) - quel que soit $g \in G$ $P_{(g)}$ est une quasi-application de E dans E

(4.2) - quels que soient $g_1 , g_2 \in G$ $P_{(g_2)} P_{(g_1)} = P_{(g_2 g_1)}$.

On désignera toujours dans ce qui suit par $\mathfrak{F}_P$ l'image de G dans le demi-groupe de toutes les quasi-applications de E définie par P .

On dira que P est <u>effective</u> lorsque $\mathfrak{F}_P$ l'est. On appellera <u>poids</u> de P le poids de $\mathfrak{F}_P$.

On appellera <u>préordre fondamental de</u> P la relation ζ_P constituée par l'ensemble des couples $(g_1 , g_2) \in G \times G$ tels que $P_{(g_1)} \subset P_{(g_2)}$.

On appellera <u>relation d'union de</u> P la relation ξ_P constituée par l'ensemble des couples $(g_1 , g_2) \in G \times G$ tels que $P_{(g_1)} \cup P_{(g_2)}$ est une quasi-application.

On appellera <u>première</u> (respectivement <u>seconde</u>) <u>projection du préordre de</u> P la relation $\underset{1}{\chi}_P$ (respectivement $\underset{2}{\chi}_P$) constituée par l'ensemble des couples $(g_1 , g_2) \in G \times G$ tels que $pr_1 P_{(g_1)} \subset pr_1 P_{(g_2)}$ (resp. $pr_2 P_{(g_1)} \subset pr_2 P_{(g_2)}$) .

Les formules suivantes sont faciles à établir :

(4.9) $$\zeta_P = \xi_P \cap \underset{1}{\chi}_P$$

(4.10) $$\zeta_P \subset \underset{2}{\chi}_P$$

(4.11) $$\overset{-1}{\zeta_P} \zeta_P \subset \xi_P$$

(4.12) $$\overset{-1}{\delta_G} \subset \underset{1}{\chi}_P \quad , \quad \overset{-1}{\gamma_G} \subset \underset{2}{\chi}_P$$

(4.13) $$\overset{-1}{\zeta_P} \zeta_P \cap \overset{-1}{\delta_G} \subset \zeta_P \quad .$$

On dit que P est une <u>représentation propre</u> lorsque c'est un isomorphisme de G autrement dit lorsque $\zeta_P \cap \overset{-1}{\zeta_P} = \Delta$.

Soit $P \subset G \times (E \times E)$ une représentation de G .

Si F est un ensemble et θ une quasi-application de E dans F qui est un homomorphisme partiellement représentatif de $\mathfrak{F}_P$, la relation $Q = (\theta \otimes \theta) P \subset G \times (F \times F)$ est aussi une représentation de G qu'on appellera <u>image homomorphe partiellement représentative de</u> P par θ . Il revient au même de dire que Q est la représentation qui, à tout $g \in G$, associe la quasi-application $Q_{(g)}$ de F dans lui-même définie par

$$Q_{(g)} = \theta P_{(g)} \bar{\theta}^{1}$$

Si $X \subset E$ est un sous-ensemble homomorphe par rapport à $\mathcal{F}_P$, on appellera <u>restriction de</u> P <u>à</u> X l'image homomorphe $Q = (\Delta_X \otimes \Delta_X)P$ de P par Δ_X. Autrement dit, la représentation qui à tout $g \in G$ associe la quasi-application $Q_{(g)}$ de F dans lui-même définie par $Q_{(g)} = \Delta_X P_{(g)} \Delta_X$.

<u>DÉFINITIONS</u>.- Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de représentation de G par des quasi-applications de E. On dira que c'est une <u>famille unie</u> si $\bigcup_{i \in I} P_i$ est une représentation de G (qu'on appellera alors l'<u>union</u> de la famille $(P_i)_{i \in I}$).

Soit P une représentation de G et soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E telle que $pr_1 T_{\mathcal{F}_P} \subset \bigcup_{i \in I} X_i$, chaque X_i satisfaisant à $T_{\mathcal{F}_P}(X_i) \subset X_i$.

On appellera <u>décomposition de</u> P <u>par la famille</u> $(X_i)_{i \in I}$ la famille (unie) de représentations $(P_i)_{i \in I}$ où chaque P_i est la restriction de P à X, autrement dit :

$$P_{i(g)} = P_{(g)} \Delta_{X_i} \quad \text{quel que soit } g \in G$$

(définitions analogues si les X_i satisfont à $\bar{T}^{1}_{\mathcal{F}_P}(X_i) \subset X_i$).

<u>THÉORÈME 4.1</u>.- <u>Toute représentation de poids partiel</u> W <u>du demi-groupe</u> G <u>est décomposable par une famille de sous-ensemble en</u> W <u>représentations de poids partiel</u> 1.

Soit P une représentation de G de poids partiel W par des quasi-applications de E dans lui-même, et soit I un sous-ensemble de E de puissance W et tel que $pr_1 T_{\mathcal{F}_P} \subset (T_{\mathcal{F}_P} \cup \Delta)(I)$.

Posons, quel que soit $i \in I$

$$X_i = (T_{\mathcal{F}_P} \cup \Delta)(i)$$

Les conditions : $pr_1 T_{\mathcal{F}_P} \subset \bigcup X_i$ et $T_{\mathcal{F}_P}(X_i) \subset X_i$ étant satisfaites, la famille $(X_i)_{i \in I}$ décompose P en W représentations P_i telles que

$$P_{i(g)} = P_{(g)} \Delta_{X_i}$$

Alors

$$\mathcal{F}_{P_i} = \mathcal{F}_P \Delta_{X_i}$$

D'où

$$T\mathcal{F}_{P_i} = T\mathcal{F}_P \Delta_{X_i}$$

D'où encore

$$pr_1 \, T\mathcal{F}_{P_i} = X_i \cap pr_1 \, T\mathcal{F}_P \subset X_i \quad .$$

Puisque $i \in X_i$, on tire aussi de l'avant-dernière formule :

$$T\mathcal{F}_{P_i}(i) = T\mathcal{F}_P(i)$$

ou encore

$$X_i = (T\mathcal{F}_{P_i} \cup \Delta)(i)$$

On a donc

$$pr_1 \, T\mathcal{F}_{P_i} \subset (T\mathcal{F}_{P_i} \cup \Delta)(i)$$

Il en résulte que le poids partiel de P_i est égal à 1 .

Définissons de manière précise ce que nous entendrons par somme, produit et puissance I-ième de familles de représentations.

Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de représentations de G , P_i étant une représentation de G à l'aide de quasi-applications de l'ensemble E_i dans lui-même.

Soit E l'ensemble somme de la famille $(E_i)_{i \in I}$. Si chaque E_i est identifié avec un sous-ensemble de E , chaque P_i peut être considéré comme représentation de G à l'aide de quasi-applications de E dans lui-même. Alors la famille $(P_i)_{i \in I}$ est unie et la représentation $\bigcup_{i \in I} P_i$, union de cette famille, sera appelée représentation <u>somme de la famille de représentations</u> $(P_i)_{i \in I}$.

Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de représentations de G , P_i étant une représentation de G à l'aide de quasi-applications de l'ensemble E_i dans lui-même.

Soit $P \subset (G \times (\prod_{i \in I} E_i)) \times (G \times \prod_{i \in I} E_i)$ la relation binaire telle que

$$P_{(g)} = \bigotimes_{i \in I} P_{i(g)} \quad . \tag{4.18}$$

On voit facilement que P est une représentation de G à l'aide de quasi-applications de l'ensemble $\prod_{i \in I} E_i$ dans lui-même. P sera appelé représentation <u>produit de la famille</u> de représentations $(P_i)_{i \in I}$.

Soit P une représentation du demi-groupe G à l'aide de quasi-applications de E dans lui-même et soit I un ensemble arbitraire. On appellera puissance I-ième de P la représentation P_I du demi-groupe G à l'aide de quasi-applications de l'ensemble $E \times I$ dans lui-même définie par :

$$P_{I(g)} = P_{(g)} \otimes \Delta_I \tag{4.19}$$

On peut considérer P_I comme somme de la famille de **représentations** $(P_i)_{i \in I}$ **où** tous les P_i sont égaux à P. En effet, on peut considérer $E \times I$ comme somme de la famille d'ensembles $(E_i)_{i \in I}$ où tous les E_i sont égaux à E si chaque E_i est identifié au sous-ensemble $E \times \{i\}$ de $E \times I$

LEMME.- Si P est une représentation de G par des quasi-applications de E, si I est un sous-ensemble de E et si θ désigne la quasi-application de $G \times I$ dans E constituée par l'ensemble des couples $((g, i), x) \in (G \times I) \times E$ tels que $P_{(g)}(i) = x$, l'image homomorphe partiellement représentative $(\theta \otimes \theta)\, \delta_I$ de la représentation δ_I puissance I-ième de δ par θ coïncide avec la restriction de P au sous-ensemble $T_{\mathfrak{F}_P}(I)$.

Autrement dit, on a quel que soit $g \in G$, l'égalité

$$\theta(\delta_g \otimes \Delta_I)\, \bar{\theta}^{1} = P_{(g)}\, \Delta_{T_{\mathfrak{F}_P}(I)} \tag{4.22}$$

La démonstration est immédiate.

THÉORÈME FONDAMENTAL 4.2.- Si P est une représentation de G de poids partiel W par des applications de E dans lui-même, P est une image homomorphe partiellement représentative de la représentation puissance I-ième de δ^*, δ^* désignant la représentation de G par les translations à droite de G^*, G^* désignant l'extension de G avec élément neutre et I étant un ensemble de puissance W.

En effet, soit P^* la représentation de G^* dans l'ensemble des applications de E dans lui-même, définie par

$$P^*_{(g)} = \left| \begin{array}{ll} P_{(g)} & \text{si} \quad g \in G \\ \Delta_E & \text{si} \quad g = e \end{array} \right.$$

On a alors $T_{\mathfrak{F}_{P^*}} = T_{\mathfrak{F}} \cup \Delta$.

Soit I un sous-ensemble de E dont la puissance soit égale à W et qui soit tel que

$$pr_1\, T_{\mathfrak{F}_P} \subset T_{\mathfrak{F}_P}(I) \cup I$$

Soit θ^* la quasi-application de $G^* \times I$ dans E obtenue en ajoutant à l'ensemble θ l'ensemble des $((e, x), x)$ où x parcourt l'ensemble E.
En appliquant le lemme précédent à P^*, représentation de G^*, on a

$$\theta^*(\delta^*_g \otimes \Delta_I)\, \bar{\theta}^{1*} = P_{(g)}\, \Delta_{\mathfrak{F}_P(I) \cup I}$$

c'est-à-dire

$$\theta^*(\delta_g^* \otimes \Delta_I)\,\overset{-1}{\theta^*} = P_{(g)}$$

ce qui démontre le théorème.

Si on considère le cas particulier $W = 1$ le théorème fondamental prend la forme :

THÉORÈME 4.3.- Si P est une représentation de G de poids partiel 1 par des applications de E dans lui-même, P est une image homomorphe partiellement représentative de la représentation de G par les translations à droite de G^*, G^* désignant l'extension de G obtenue par addition d'un élément neutre.

IV. Demi-groupes ordonnés représentables

Soit G un demi-groupe et $\Omega \subset G \times G$ une relation de préordre sur G. On dira que Ω est fondamentalement représentable s'il existe une représentation P de G à l'aide de quasi-applications de E dans lui-même telle que $\zeta_P = \Omega$.

On désignera dans ce qui suit par Z_G l'ensemble des préordres fondamentalement représentables de G.

On appellera poids du préordre Ω fondamentalement représentable le minimum des poids des représentations P pour lesquelles $\Omega = \zeta_P$.

THÉORÈME 5.1.- Si $\overline{P}$, représentation du demi-groupe G, est une image homomorphe partiellement représentative de la représentation P on a

(5.1) $$\zeta_P \subset \zeta_{\overline{P}}$$

THÉORÈME 5.2.- Si la famille de représentations $(P_i)_{i \in I}$ du demi-groupe G est une décomposition de P par une certaine famille de sous-ensembles, on a

(5.2) $$\zeta_P = \bigcap_{i \in I} \zeta_{P_i}$$

Les démonstrations de ces deux théorèmes sont faciles.

THÉORÈME 5.3.- Z_G est un treillis complet d'intersection.

En effet, soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille de préordres de G fondamentalement représentables. Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de représentations de G telle que $\zeta_{P_i} = \Omega_i$. On peut considérer $(P_i)_{i \in I}$ comme la décomposition de la somme P de la famille $(P_i)_{i \in I}$ par une certaine famille de sous-ensembles et appliquer le théorème 5.2. On obtient alors

$$\bigcap_{i \in I} \Omega_i = \zeta_P \quad .$$

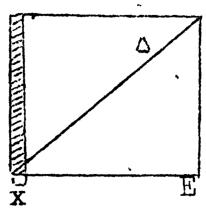
Donc $\bigcap_{i \in I} \Omega_i$ est un préordre fondamentalement représentable.

THÉORÈME 5.4.- Le sous-ensemble Z_1 de Z_G constitué par les préordres de G fondamentalement représentables et de poids 1 est une base d'intersection pour Z_G.

En effet, à partir des théorèmes 4.1 et 5.2 , on montre immédiatement que tout préordre fondamentalement représentable peut être représenté sous la forme de l'intersection d'un certain ensemble de relations de préordres fondamentalement représentables et de poids 1 .

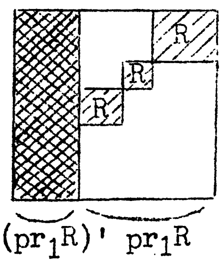
Soit $\Omega \subset E \times E$ une relation de préordre sur un ensemble E et I un ensemble en correspondance biunivoque avec l'ensemble quotient $E/\Omega \cap \Omega^{-1}$. Si θ est l'application canonique de E sur I , $\theta\,\Omega\,\theta^{-1}$ est une relation de préordre sur I qu'on appellera image de Ω par θ .

Par ailleurs, on dira qu'une relation d'ordre $\Omega \subset E \times E$ sur un ensemble E est un ordre nul s'il existe un élément $x \in E$ tel que



$$\Omega = (\{x\} \times \{x\}') \cup \Delta = \{x\} \times E \cup \Delta$$

On dira qu'une relation d'ordre $\Omega \subset E \times E$ sur un ensemble E est un préordre nul s'il existe une relation de quasi-équivalence $R \subset E \times E$ telle que



$$(5.4) \qquad \Omega = R \cup ((pr_1R)' \times E)$$

avec

$$(5.5) \qquad pr_1R \neq E \quad .$$

Le sous-ensemble $(pr_1R)'$ sera appelé le sous-ensemble nul du préordre nul Ω .

THÉORÈME 5.5.- Z_1 est constitué :

- par toutes les équivalences stables sur G .
- par toutes les ouvertures régulières à gauche de tous les préordres réguliers à droite dont l'ordre image est nul et dont le sous-ensemble nul est un idéal à droite de G .

En effet, soit R une équivalence stable sur G . Alors $R^* = R \cup \{e\} \times \{e\}$ est une équivalence stable sur $G^* = G \cup \{e\}$ extension de G avec élément neutre e . L'application canonique de G^* sur G^*/R^* est un homomorphisme représentatif du demi-groupe des translations à droite de G^* engendré par les éléments de G . On obtient ainsi une représentation de G qui est image homomorphe d'une représentation de G , à l'aide de quasi-applications de l'ensemble G^*/R^* dans lui-même, qui est de poids 1 .

Ainsi, pour toute représentation P à l'aide d'applications de G^*, le quasi-ordre fondamental ζ_P est une relation d'équivalence et on voit facilement que $\zeta_P = R$.

On a ainsi montré que toute équivalence stable sur G appartient à Z_1 .

Soit Ω un préordre fondamentalement représentable de poids 1 et qui n'est pas une relation d'équivalence. Alors, il existe une représentation P de G à l'aide de quasi-application de E dans lui-même telle que sa restriction

$$\Delta_{\{c\}' \times \{c\}'} P = \Delta_{\{c\}'} P$$

au complémentaire $\{c\}'$ d'un élément invariant $c \in E$ est une représentation pour laquelle

$$\Omega = \zeta_{\Delta_{\{c\}'} P} .$$

D'après le théorème 4.4, on a

$P_{(g)} = \theta^* \delta^*_g \overset{-1}{\theta^*}$, où θ^* désigne l'application de G^* dans E définissant l'homomorphisme représentatif du demi-groupe des translations à droite de G^* correspondant aux éléments de G .

Donc

$$\Delta_{\{c\}'} P_{(g)} = \theta^* \Delta_{\overset{-1}{\theta^*}(c')} \overset{-1}{\theta^*} \theta^* \delta^*_g \overset{-1}{\theta^*}$$

On a

$$(g_1,g_2) \in \zeta \rightleftarrows \overset{-1}{\theta^*} \theta^* \Delta_{(\overset{-1}{\theta^*}(c))'} \overset{-1}{\theta^*} \theta^* \delta^*_{g_1} \overset{-1}{\theta^*} \theta^* \subset \overset{-1}{\theta^*} \theta^* \Delta_{(\overset{-1}{\theta^*}(c))'} \overset{-1}{\theta^*} \theta^* \delta^*_{g_2} \overset{-1}{\theta^*} \theta^*$$

c'est-à-dire

$$(g_1,g_2) \in \zeta \rightleftarrows \overset{-1}{\theta^*} \theta^* \Delta_{(\overset{-1}{\theta^*}(c))'} \overset{-1}{\theta^*} \theta^* \delta^*_{g_1} \subset \overset{-1}{\theta^*} \theta^* \Delta_{(\overset{-1}{\theta^*}(c))'} \overset{-1}{\theta^*} \theta^* \delta^*_{g_2}$$

Remarquons que $\pi^* = \overset{-1}{\theta^*} \theta^* \Delta_{(\overset{-1}{\theta^*}(c))'} \overset{-1}{\theta^*} \theta^*$ est une quasi-équivalence et que $pr_1 \pi^* = (\overset{-1}{\theta^*}(c))'$ est un sous-ensemble stable pour $T_{\mathcal{F}_G}$. Il en résulte que $(pr_1 \pi^*)'$ ne contient pas l'élément neutre e de G^* et est donc un sous-ensemble de G , et, en fait, comme il est facile de le voir un idéal à droite de G .

On a

$$(g_1, g_2) \in \zeta \rightleftarrows \pi^* \delta^*_{g_1} \subset \pi^* \delta^*_{g_2}$$

Posons

$$\pi = \pi^* \cap (G \times G) .$$

Puisque $(pr_1 \pi^*)' \subset G$, on a $(pr_1 \pi^*)' = (pr_1 \pi)'$.

Or

$$\pi^*\delta^*_{g_1} \subset \pi^*\delta^*_{g_2} \rightleftarrows \pi^*\delta^*_{g_1}(e) \subset \pi^*\delta^*_{g_2}(e) \quad \text{et} \quad \forall g \in G \quad \pi^*\delta^*_{g_1}(g) \subset \pi^*\delta^*_{g_2}(g)$$

$$\rightleftarrows \pi^*(g_1) \subset \pi^*(g_2) \quad \text{et} \quad \forall g \in G \quad \pi^*(gg_1) \subset \pi^*(g\, g_2)$$

$$\rightleftarrows (g_1,g_2) \in \pi^* \quad \text{où} \quad g_1 \in (pr_1\pi^*)' \quad \text{et} \quad \forall g \in G \quad (gg_1,gg_2) \in \pi^* \quad \text{où} \quad gg_1 \in (pr_1\pi^*)'$$

$$\rightleftarrows (g_1,g_2) \in \pi \cup ((pr_1\pi)' \times G) \quad \text{et} \quad \forall g \in G \quad (gg_1,gg_2) \in \pi \cup ((pr_1\pi)' \times G) .$$

Si l'on pose $\zeta_0 = \pi \cup ((pr_1\pi)' \times G)$, on a donc

$$\zeta = \zeta_0 \cap \bigcap_{g \in G} \overset{-1}{\gamma_g} \zeta_0 \gamma_g \quad ,$$

c'est-à-dire que ζ est l'ouverture régulière à gauche de la relation de préordre ζ_0 , ayant un ordre image nul et dont le sous-ensemble nul $(pr_1\pi)'$ est un idéal à droite de G .

Démontrons que ζ_0 est régulier à droite. Remarquons d'abord que $\overset{-1}{\theta^*}\theta^*$ est relation d'imprimitivité pour le demi-groupe des translations à droite de G^* . Donc $\overset{-1}{\theta^*}\theta^* \cap G \times G = \pi \cup ((pr_1\pi)' \times (pr_1\pi)')$ est une relation d'imprimitivité pour le demi-groupe des translations à droite de G . Par ailleurs, puisque $(pr_1\pi)'$ est un idéal à droite, la relation binaire $(pr_1\pi)' \times G$ est régulière à droite.

Donc $\zeta_0 = (\overset{-1}{\theta^*}\theta^* \cap (G \times G)) \cup (pr_1\pi)' \times G$ est une relation de préordre régulière à droite puisque réunion de deux relations régulières à droite.

Soit maintenant ζ_0 un préordre régulier à droite avec ordre image nul dont le sous-ensemble nul est un idéal à droite de G . Alors l'équivalence $\zeta_0 \cap \overset{-1}{\zeta_0}$ est régulière à droite. On en déduit facilement que l'équivalence

$$R^* = (\zeta_0 \cap \overset{-1}{\zeta_0}) \cup \{e\} \times \{e\}$$

est une relation d'imprimitivité pour le demi-groupe $\mathcal{T}$ des translations à droite de G^* .

Soit P la représentation de G à l'aide de quasi-applications de G^*/R^* .

Elle peut être considérée comme l'image de la représentation donnée par les translations à gauche de G^* par l'application canonique de G^* sur G^*/R^* . P est évidemment de poids 1 . En outre, remarquons que $(pr_1 \pi)'$ étant un idéal à droite de G est un élément invariant de G^*/R^* par rapport au demi-groupe de transformations constitué par les $P_{(g)}$. Si l'on considère la restriction de P par rapport au complémentaire de cet élément invariant, on voit que son préordre fondamental est identique à l'ouverture invariante à gauche du préordre donné ξ_0. Ainsi, comme la restriction de P en question a un poids partiel égal à 1 , l'ouverture régulière à gauche d'un préordre quelconque régulier à droite dont l'ordre image est nul et dont le sous-ensemble nul est un idéal à droite de G appartient à Z_1 . Ceci achève la démonstration du théorème.

Désignons par $\overline{Z}_0$ le sous-ensemble de Z_G constitué par les préordres réguliers à droite avec ordre image nul et dont le sous-ensemble nul est un idéal à droite de G et par $\overline{Z}_1$ l'union de $\overline{Z}_0$ et de l'ensemble des équivalences régulières à droite.

Comme l'ouverture régulière à gauche d'une relation d'équivalence régulière à droite est une équivalence stable, on peut énoncer ainsi le

THÉORÈME 5.5 .- Z_1 est l'ensemble des ouvertures régulières à gauche des relations de préordre de $\overline{Z}_1$.

Si on désigne par $\overline{Z}$ l'ensemble des intersections de familles d'éléments arbitraires de $\overline{Z}_1$, on obtient immédiatement, d'après les théorèmes 5.4 et 5.5, l'énoncé suivant :

Z est l'ensemble des ouvertures régulières à gauche des préordres de $\overline{Z}$.

On remarquera que, pour un G donné, trouver $\overline{Z}$ revient à trouver toutes les équivalences régulières à droite dont l'une des classes est un idéal à droite. En effet, si R est une telle équivalence, et si I est l'une de ses classes se trouvant être un idéal à droite, alors $\Omega = R \cup (I \times G)$ est un préordre appartenant à $\overline{Z}_0$ et tout préordre de $\overline{Z}_0$ peut être obtenu ainsi si pour R on prend l'ouverture symétrique.

V. Préordres fondamentalement représentables des demi-groupes monogènes.

Pour illustrer la théorie générale, nous allons considérer le problème suivant : trouver les préordres fondamentalement représentables des demi-groupes monogènes, c'est-à-dire des demi-groupes $G = [g]$ susceptibles d'être engendrés par un de leurs éléments $g \in G$.

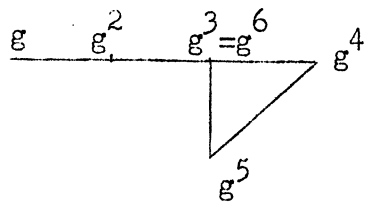
Si $[g]$ est infini, il est isomorphe à l'ensemble N^* des entiers positifs considéré comme demi-groupe additif.

Si $[g]$ est fini d'ordre n, il existe un d entier inférieur ou égal à n tel que $g^{n+1} = g^{n+1-d}$. Alors $G^{n-d+1} = \{g^{n-d+1}, \dots, g^n\}$ est le plus petit idéal de G (c'est un sous-groupe de G). Donc d est le nombre d'éléments du plus petit idéal de G.

Exemple :

$n = 5$

$d = 3$



On dira que (n, d) est le couple caractéristique du demi-groupe monogène G. Il caractérise G à un isomorphisme près.

Il est facile de voir que toute image homomorphe d'un demi-groupe monogène infini qui ne lui est pas isomorphe est un demi-groupe monogène fini et qu'il existe un homomorphisme unique f d'un demi-groupe monogène infini sur un demi-groupe monogène fini de caractéristique donnée (n, d).

Soit $R_{(n,d)}$ l'équivalence dans le demi-groupe monogène infini $G = [g]$ qui est le noyau $\bar{f}^1 f$ de cet homomorphisme.

On obtient, par un raisonnement évident :

(5.6) $\quad (g^{m_1}, g^{m_2}) \in R_{(n,d)} \rightleftarrows m_1 = m_2$ où $m_1 > n-d$, $m_2 > n-d$ et $m_1 - m_2$ divise d.

Il résulte de ce qui précède que les $R_{(n,d)}$, où $d \leq n$ est un entier naturel quelconque, sont les seules équivalences stables dans G qui soient différentes de Δ.

D'après (5.6), on a

(5.7) $\quad R_{(n_1,d_1)} \subset R_{(n_2,d_2)} \rightleftarrows n_2 - d_2 \leq n_1 - d_1$ et d_1 divise d_2.

D'où

(5.8) $$R_{(n_1,d_1)} \cap R_{(n_2,d_2)} = R_{(n,d)}$$

d étant le PPCM de d_1 et d_2, n étant le Max de $n_1 - d_1 + d$ et $n_2 - d_2 + d$.

Puisque les demi-groupes monogènes sont abéliens, tout idéal à gauche est un idéal bilatère. On voit facilement que les seuls idéaux de G sont G, G^2, ... Dans les demi-groupes monogènes, on a donc $Z_1 = \overline{Z}_1$. En remarquant que les seules équivalences stables, dont l'une des classes est un idéal, sont dans le cas où G est monogène infini, les équivalences $R_{(n,1)}$, n entier arbitraire, et que la classe de $R_{(n,1)}$, qui est un idéal, est précisément G^n, on obtient l'énoncé :

Pour un demi-groupe monogène infini, l'ensemble Z_1 est l'ensemble des équivalences stables et des préordres stables :

$$\Omega_n = R_{(n,1)} \cup (G^n \times G) = \Delta_G \cup (G^n \times G^n) \tag{5.9}$$

où n est entier arbitraire.

A partir de (5.9), on a

$$(g^{m_1}, g^{m_2}) \in \Omega_n \rightleftarrows m_1 = m_2 \quad \text{où} \quad n \leq m_1 . \tag{5.10}$$

De plus

$$\Omega_{n_1} \cap \Omega_{n_2} = \Omega_{\max(n_1,n_2)} . \tag{5.11}$$

Si $\mathfrak{n}$ est un sous-ensemble infini arbitraire de N^*, on a

$$\bigcap_{n \in \mathfrak{n}} R_n = \Delta_G . \tag{5.12}$$

En remarquant que

$$R_{(n_1,d_1)} \subset \Omega_{n_2} \rightleftarrows n_2 \leq n_1 - d_1 + 1 \tag{5.13}$$

il résulte de (5.11) et (5.12) que pour un demi-groupe monogène infini, Z se compose de Δ et de toutes les intersections $R_{(n,d)} \cap \Omega_{n-d+k}$ où n et k sont des entiers arbitraires et d'un entier inférieur ou égal à n. On en déduit le

THÉORÈME 5.6.- Pour un demi-groupe monogène infini, il n'existe pas d'ordre fondamentalement représentable différent de l'identité.

En effet, remarquons que $R_{(n,1)} = \Omega_n \cap \Omega_n^{-1}$. L'ouverture symétrique du préordre $R_{(n_1,d_1)} \cap \Omega_{n_2}$ est donc $R_{(n_1,d_1)} \cap R_{(n_2,1)}$ qui est $\neq \Delta$ d'après (5.8).

Pour trouver les préordres fondamentalement représentables dans un demi-groupe monogène fini de caractéristique (n,d) nous utiliserons le fait qu'un tel demi-groupe est image homomorphe d'un demi-groupe infini. L'image inverse d'un préordre fondamentalement représentable est le préordre fondamentalement représentable $R_{(n_1,d_1)} \cap \Omega_{n_1-d_1+k}$ dans le demi-groupe infini satisfaisant à la condition

$$R_{(n,d)} \subset R_{(n_1,d_1)} \cap R_{(n_1-d_1+k,1)}$$

qui, d'après (5.8) et (5.7), est équivalente à la condition :

$$n_1 - d_1 + k - 1 \leqslant n - d$$

et d divise d_1 .

En particulier, l'image inverse d'un ordre fondamental est le préordre fondamental du demi-groupe infini $R_{(n_1,d_1)} \cap \Omega_{n_1-d_1+k}$ satisfaisant à

$$R_{(n,d)} = R_{(n_1,d_1)} \cap R_{(n_1-d_1+k,1)}$$

ou, ce qui est équivalent, à la condition

$$n_1 + k - 1 = n \quad , \quad d_1 = d$$

D'où il résulte que les images inverses des ordres fondamentaux dans un demi-groupe monogène fini de caractéristique (n,d) sont les préordres $R_{(m,n)} \cap \Omega_{n-d+1}$ où $d \leqslant m \leqslant n$.(Pour $m = n$, on obtient l'équivalence $R_{(m,d)}$) . On en déduit facilement le :

THÉORÈME 5.7.- *Pour un demi-groupe monogène fini de caractéristique* (n,d), *il existe* $n-d+1$ *ordres fondamentalement représentables* Ω_m $d \leqslant m \leqslant n$ *définis par la formule* :

(5.14) $$(g^{m_1}, g^{m_2}) \in \Omega_m \iff m_1 = m_2 \text{ ou bien } m_1 \leqslant n \text{ , } m_2 \leqslant n$$
$$\text{et } m_1 > m-d \text{ , } m_2 > m-d \text{ et } m_1-m_2 \text{ divise } d \text{ .}$$

Comme les seuls demi-groupes finis qui soient des groupes sont ceux de caractéristique (n,n) , on obtient immédiatement le :

THÉORÈME 5.8.- *Dans un groupe monogène fini, il n'existe pas de relations d'ordres fondamentalement représentables différentes de l'identité.*

Il est naturel de se demander si les préordres fondamentalement représentables possèdent des propriétés "Mengentheoretisch" spécifiques. Une réponse négative est fournie par la considération des demi-groupes à zéro à gauche.

Si nous appelons *demi-groupe nul à gauche* un demi-groupe dont tous les éléments sont des zéros à gauche (il en résulte que tout élément est élément neutre à droite) on peut énoncer le

THÉORÈME 5.9.- *Dans un demi-groupe nul à gauche tout préordre est fondamentalement représentable.*

En effet, si $\Omega \subset G \times G$ est un préordre, on a

$$(5.16) \qquad (g_1, g_2) \in \Omega \quad \rightleftarrows \quad \overset{-1}{\Omega}(g_1) \subset \overset{-1}{\Omega}(g_2)$$

$$\rightleftarrows \quad \forall g \in G \quad \overset{-1}{\Omega}(g_1) \cap \{g\} \subset \overset{-1}{\Omega}(g_2) \cap \{g\} .$$

Or

$$\overset{-1}{\Omega}(g_1) \cap \{g\} \subset \overset{-1}{\Omega}(g_2) \cap \{g\} \quad \rightleftarrows \quad g \notin \overset{-1}{\Omega}(g_1) \quad \text{ou} \quad g \in \overset{-1}{\Omega}(g_1) \cap \overset{-1}{\Omega}(g_2)$$

$$\rightleftarrows \quad g_1 \notin \Omega(g) \quad \text{ou} \quad \{g_1, g_2\} \subset \Omega(g)$$

$$\rightleftarrows \quad (g_1, g_2) \in (\Omega(g)' \times G) \cup (\Omega(g) \times \Omega(g)) .$$

Donc

$$(g_1, g_2) \in \Omega \quad \rightleftarrows \quad (g_1, g_2) \in \bigcap_{g \in G} (\Omega(g)' \times G) \cup (\Omega(g) \times \Omega(g)) .$$

Donc

$$(5.17) \qquad \Omega = \bigcap_{g \in G} (\Omega(g)' \times G) \cup (\Omega(g) \times \Omega(g)) .$$

Donc tout préordre est de la forme

$$(5.18) \qquad \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \cup \mathfrak{g}' \times G$$

où $\mathfrak{g}$ est un sous-ensemble $\neq \emptyset$ et $\neq G$.

Il est évident que pour un demi-groupe nul à gauche tout sous-ensemble est idéal à droite et est donc stable. Comme le produit direct de demi-groupes nuls à gauche est un demi-groupe nul à gauche, toute relation binaire sur un demi-groupe nul à gauche est stable.

Ainsi tout préordre de la forme (5.18) appartient, dans le cas de demi-groupe nul à gauche, à Z_1 et par suite, toute relation de préordre est fondamentalement représentable. On peut donner une démonstration immédiate de ce théorème ne reposant pas sur la théorie générale en construisant une représentation P du demi-groupe G nul à gauche pour laquelle un préordre donné arbitraire est fondamental. Or un tel $P \subset G \times (G^* \times G^*)$ où $G^* = G \cup \{c\}$ est défini par la formule

$$(5.19) \qquad P_{(g)} = (\overset{-1}{\Omega}(g) \cup \{c\}) \times \{c\} .$$

On sait qu'on appelle demi-groupe ordonné un demi-groupe muni d'une relation de préordre stable Ω. On dira qu'un tel demi-groupe est <u>représentable</u> si Ω est fondamentalement représentable.

Les résultats de la théorie précédente donnent la possibilité de construire une théorie axiomatique des demi-groupes ordonnés représentables. A cet effet, nous devons définir dans le demi-groupe l'ensemble Z des préordres comme le sous-treillis complet à gauche engendré par les équivalences stables et par l'ensemble des ouvertures régulières à gauche des préordres réguliers à droite avec ordre image nul dont l'ensemble nul est idéal à droite. Alors la théorie axiomatique des demi-groupes ordonnés représentables se construit comme théorie axiomatique des demi-groupes avec une relation d'ordre donnée appartenant à Z .

Les démonstrations des théorèmes 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 sont telles que ces théorèmes dûment formulés peuvent être considérés comme démontrés dans la théorie axiomatique des demi-groupes ordonnés représentables. Il n'en est pas de même du théorème obtenu à partir de la formule (4.13)(cf. paragraphe III) et que nous formulerons ainsi

<u>THÉORÈME 5.10.- Si</u> G , <u>demi-groupe ordonné par la relation</u> Ω , <u>est représentable, on a</u>

(5.20) $$\bar{\Omega}^1\Omega \cap \bar{\delta}_G^1 \subset \Omega \quad .$$

La démonstration de la formule (4.13) ne donne pas la démonstration de ce théorème du point de vue de la théorie axiomatique des demi-groupes ordonnés représentables car elle repose sur la théorie de demi-groupes de quasi-application et par suite est liée à une interprétation particulière de la théorie axiomatique. Etant donnée l'importance de ce théorème exprimant une propriété élémentaire de la relation d'ordre d'un demi-groupe ordonné représentable, nous allons en donner dans ce qui suit une démonstration dans le cadre de la théorie axiomatique.

Considérons la condition :

(5.21) $$\bar{R}^1 R \cap \bar{\delta}_G^1 \subset R$$

où $R \subset G \times G$ est une relation binaire sur G .

Démontrons que cette condition est satisfaite par tout préordre régulier à droite ayant un ordre image nul et dont l'ensemble nul est un idéal à droite. Soit $\Omega = \pi \cup (pr_1 \pi)' \times G$ un tel préordre. On a

$$\bar{\Omega}^1 \Omega = \Omega \cup pr_1 \pi \times (pr_1 \pi)' \quad .$$

Mais $(pr_1 \pi)'$ étant idéal à droite, on a

$$pr_1 \pi \times (pr_1 \pi)' \cap \bar{\delta}_G^1 = \emptyset$$

d'où

$$\bar{\Omega}^1 \Omega \cap \bar{\delta}_G^1 \subset \Omega \quad .$$

Soit $R \subset G \times G$ une relation binaire arbitraire satisfaisant à la condition (5.21). Démontrons que cette condition est alors satisfaite aussi par l'ouverture régulière à gauche $\mathring{o}(R)$ de R. En utilisant le fait que $\overset{-1}{\delta}_G$ est régulière à gauche ainsi que les formules faciles à démontrer :

$$\mathring{o}(\overset{-1}{R}) = \overset{-1}{\widehat{\mathring{o}(R)}} \qquad \mathring{o}(R_1)\,\mathring{o}(R_2) \subset \mathring{o}(R_1R_2)$$

on obtient

$$\overset{-1}{\widehat{\mathring{o}(R)}}\ \mathring{o}(R) \cap \overset{-1}{\delta}_G \subset \mathring{o}(\overset{-1}{R}R \cap \overset{-1}{\delta}_G) \subset \mathring{o}(R) \quad .$$

En remarquant que toute relation d'équivalence satisfait trivialement à la condition (5.21), nous pouvons dire que l'ensemble Z des relations de préordre admet une base d'intersection constituée par les préordres satisfaisant à (5.20). Comme il est facile de montrer que l'ensemble des relations binaires sur G satisfaisant à (5.21) est un treillis complet pour l'intersection, il en résulte que tout préordre de l'ensemble Z satisfait à la condition (5.20) ce qui démontre le théorème.

Comme corollaires du théorème 5.10 nous pouvons énoncer que les demi-groupes dont chaque élément admet un inverse à droite (et en particulier les groupes) peuvent être ordonnés de manière représentable seulement de façon triviale (par Δ). En effet si on substitue $G \times G$ à $\overset{-1}{\delta}_G$ dans (5.20) on obtient $\overset{-1}{\Omega}\,\Omega \subset \Omega$ d'où $\Omega = \Delta$.

En tant que généralisation de la théorie des demi-groupes ordonnés représentables, on peut énoncer le problème suivant qui se pose de façon naturelle en théorie des demi-groupes de quasi-applications. Etant donnée une relation binaire Ξ réflexive et symétrique et deux relations de préordre Ω_1 et Ω_2 entre éléments du demi-groupe G, trouver une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une représentation P de G à l'aide de quasi-applications pour laquelle on ait

$$\Omega = \xi_P \qquad \Omega_1 = \chi_{1}{}_P \qquad \Omega_2 = \chi_{2}{}_P$$

(Rappelons, cf. paragraphe III, que ξ_P désigne la relation d'union de P et que $\chi_{1}{}_P$ et $\chi_{2}{}_P$ désignent respectivement la première et la seconde projection du préordre de P).