Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

M. Zisman

Éléments de cohomologie

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. n° 8, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A8_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)

Année 1956/57

-:-:-:-

Exposé n° 8

ÉLÉMENTS DE COHOMOLOGIE

(Exposé de M. ZISMAN, le 21.1.1957)

I.- GÉNÉRALITÉS

1.- Groupe différentiel gradué.-

Soit A un groupe abélien (resp. module sur un anneau K) gradué par des sous-groupes (resp. sous-modules) A^p, c'est-à-dire $A = \sum_{p=0}^{\infty} A^p$ (p entier $\geqslant 0$; $\sum$ représente la somme directe).

On dira que A est un groupe différentiel s'il existe un endomorphisme $d : A \to A$ (resp. endomorphisme de modules) tel que

a) $dA^p \subset A^{p+1}$

b) $dd = 0$

(Tout ce qui suit est encore valable si la condition a) est remplacée par $dA^p \subset A^{p-1}$ $dA^0 = 0$ à condition de changer de façon évidente les formules ; en gros, on passe d'un cas à l'autre en changeant p en $-p$).

Le noyau de d est appelé l'ensemble des cocycles ; l'image de d est appelée l'ensemble des cobords ; le groupe

$$H(A) = d^{-1}(0)/dA$$

est appelé le groupe de cohomologie de A. On a bien $dA \subset d^{-1}(0)$ puisque $d^2 = 0$ en vertu de b) .

Le groupe $(d^{-1}(0) \cap A^p)/dA^{p-1} = H^p(A)$ est appelé le p-ème groupe de cohomologie de A et l'on a évidemment :

$$H(A) = \sum_{p=0}^{\infty} H^p(A)$$

2.- Nombres de Betti, torsion.

a) Si le module A est un espace vectoriel sur un corps, $d^{-1}(0)$ et dA sont des espaces vectoriels, ainsi que $d^{-1}(0) \cap A^p$, dA^{p-1}, $H^p(A)$, $H(A)$.

Si de plus $H^p(A)$ est un espace vectoriel de dimension finie, on appelle p-ème nombre de Betti de A la dimension de $H^p(A)$; la série formelle $P(t) = \sum_{p=0}^{\infty} (\dim .H^p(A))t^p$ est la "série de Poincaré" de A. La connaissance de $P(t)$ détermine la connaissance de $H(A)$. Si $H^p(A) = 0$ sauf pour un nombre fini de p, le nombre $P(-1) = \sum(-1)^p \dim .H^p(A)$ est appelé la "caractéristique d'Euler Poincaré de A ".

b) Supposons maintenant que A soit un module libre de dimension finie sur l'anneau Z des entiers. Nous savons que dans ces conditions $H^p(A) = (d^{-1}(0) \cap A^p)/dA^{p-1}$ (quotient de 2 modules libres de dimension finie) est la somme directe d'un module libre de dimension finie et d'un certain nombre fini de Z_{q_i} (modules sur Z des entiers modulo q_i) ; les éléments non libres sont appelés les éléments de torsion et les q_i les coefficients de torsion ; la dimension de la partie libre de $H^p(A)$ est encore appelée p-ème nombre de Betti et on définit comme précédemment $P(t)$ et $P(-1)$. Pour déterminer $H(A)$ il faut connaitre non seulement $P(t)$ mais encore les coefficients de torsion.

3.- Algèbre différentielle graduée.

Soit A une algèbre sur un certain anneau K. On dira que A est graduée si elle est graduée en tant que K-module, et si de plus la graduation est "compatible" avec la multiplication dans A, c'est-à-dire si $A^p.A^q \subset A^{p+q}$.

A sera une algèbre différentielle graduée si elle est différentielle en tant que K-module, et si de plus le cobord est "compatible" avec la multiplication et la graduation dans le sens suivant :

$$d(a.b) = (da).b + (-1)^p a.db \qquad (a \in A^p, \quad b \in A)$$

(d s'appelle alors une antidérivation).

PROPOSITION 3-1.- *Si A est une algèbre différentielle graduée, $H(A)$ est une algèbre.*

Si $\overline{a} \in H^p(A)$ $\overline{b} \in H^q(A)$, il faut définir $\overline{a}.\overline{b} \in H^{p+q}(A)$. Soit donc $a \in \overline{a}$, $b \in \overline{b}$; on a : $d(ab) = (da).b + (-1)^p a.db = 0$ car $da = 0$ $db = 0$.

Donc ab est un cocycle $\in d^{-1}(0) \cap A^{p+q}$. On pose $\overline{a}.\overline{b} = \overline{ab}$ = classe de cohomologie du cocycle ab. Pour justifier cette définition il faut montrer que $\overline{ab}$ ne dépend que de $\overline{a}$ et de $\overline{b}$ et non des représentants a et b.

or si $a' = a + d\alpha$ $(\alpha \in A^{p-1})$ $a'b = ab + (d\alpha)b$ mais $d(\alpha . b) = (d\alpha)b + (-1)^{p-1}\alpha . db = (d\alpha)b$ donc $a'b = ab + d(\alpha . b)$ et par conséquent $\overline{a'b} = \overline{ab}$ C.Q.F.D.

Si l'algèbre A est anticommutative, (c'est-à-dire si $ab = (-1)^{pq} ba$, $a \in A^p$ $b \in A^q$) on montre immédiatement que $H(A)$ est aussi anticommutative.

EXEMPLE.- L'algèbre des formes différentielles différentiables définies sur une variété V est une algèbre différentielle graduée au sens défini plus haut.

4.- Homomorphismes.

Soient A et B deux groupes différentiels gradués (resp. modules, resp. algèbres). On appelle homomorphisme de A dans B un homomorphisme $f : A \longrightarrow B$ des structures de groupes (resp. modules resp. algèbres) de A et de B, compatibles avec les graduations et les opérateurs de cobords :

$$f(A^p) \subset B^p$$

$f \circ d = d \circ f$ (d désigne à la fois l'opérateur de cobord de A et de B).

PROPOSITION 4-1.- f induit un homomorphisme $f^* : H(A) \longrightarrow H(B)$.

Soit a un cocycle de A $df(a) = f(da) = 0$ donc fa est un cocycle de B. De plus, si $a' = a + d\alpha$, $f(a') = f(a) + fd\alpha = f(a) + df\alpha$ donc $f(a') - f(a) \in dB$.

L'application $a \longrightarrow f(a)$ passe donc au quotient et définit l'homomorphisme cherché $f^* : H(A) \longrightarrow H(B)$.

5.- La suite exacte de cohomologie.

(rappelons qu'une suite de modules et d'homomorphismes

$$A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \quad A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}}$$

est dite exacte si, quel que soit i, image de f_i = noyau de f_{i+1})

Soit A un sous-groupe différentiel gradué de B, c'est-à-dire un groupe différentiel gradué tel que l'injection $i : A \longrightarrow B$ soit un homomorphisme au sens de I-4, et $C = B/A$.

On a donc la suite exacte :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$$

LEMME 5-1.- C est un groupe différentiel gradué, et j un homomorphisme de groupe différentiel gradué ;

En effet posons $C^p = j(B^p)$ donc $C = \sum_{p=0}^{\infty} C^p$

Si $b \in B$, posons $d(jb) = j(db)$. Ceci définit un opérateur d sur C en effet j étant sur, tout élément de C peut s'écrire jb, et si $jb = jb'$ $b - b' \in i(A)$ et $d(jb - jb') = d(j(b - b')) = jd(b - b') \in jdi(A) = = ji(dA) = 0$ car $j \circ i = 0$.

$d^2 = 0$ car $d^2 j(b) = jd^2(b) = j(0) = 0$

Enfin j est un homomorphisme de groupe différentiel gradué par définition même de la structure de C.

Terminons ces généralités par l'important théorème suivant :

THÉORÈME 5-1.- Si la suite de groupes différentiels gradués

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$$

est exacte, la suite

$$0 \longrightarrow H^0(A) \xrightarrow{i^*} H^0(B) \xrightarrow{j^*} H^0(C) \xrightarrow{\delta^*} H^1(A) \xrightarrow{i^*} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{\delta^*} H^p(A) \xrightarrow{i^*} H^p(B) \xrightarrow{j^*} H^p(C) \xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(A) \xrightarrow{i^*} \cdots$$

est aussi exacte.

i^* et j^* sont définis par la proposition 4-1. Définissons δ^*.
Soit c un cocycle de C^p. j étant sur, il existe $b \in B^p$ tel que $jb = c$ mais $djb = jdb = dc = 0$ donc $db \in i(A^{p+1})$, mais i étant injectif, il existe un seul a tel que $db = ia$. a est un cocycle de A^{p+1} en effet

$$ida = dia = d^2 b = 0$$

par définition, $\delta^* \bar{c} = \bar{a}$ (la barre représente la classe de cohomologie de l'élément écrit au-dessous).Pour justifier cette définition, il faut montrer que $\bar{a}$ ne dépend que de $\bar{c}$, et non de c et b. Or si $jb = jb' = c$, $b' - b \in i(A^p)$ $db' - db \in di(A^p) = i(dA^p)$ et $a' - a \in dA^p$, en désignant par a' l'élément de A^{p+1} tel que $ia' = db'$.

De même, si $c' = c + d\gamma$ ($\gamma \in C^{p-1}$) et $jb' = c'$

$$j(b' - b) = d\gamma = dj\beta \qquad (\beta \in B^{p-1}) \qquad \text{donc}$$

$$b' - b - d\beta \in i(A^p) \qquad \text{c'est-à-dire} \quad db' - db \in i(dA^p)$$

ou $\quad a' - a \in d(A^p)$.

δ^* est bien un homomorphisme $H^p(C) \longrightarrow H^{p+1}(A)$

La vérification du fait que la suite est exacte, n'offre aucune difficulté.

REMARQUE.- Si d abaisse le degré de 1 $(dA^p \subset A^{p-1})$ la suite exacte du théorème s'écrit :

$$\xrightarrow{\delta^*} H^p(A) \xrightarrow{i^*} H^p(B) \xrightarrow{d^*} H^p(C) \xrightarrow{\delta^*} H^{p-1}(A) \xrightarrow{i^*} \cdots$$
$$\xrightarrow{\delta^*} H^0(A) \xrightarrow{i^*} H^0(B) \xrightarrow{d^*} H^0(C) \longrightarrow 0$$

II.- HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE

6.- Dans ce paragraphe, A désignera un groupe différentiel gradué par des A_p , l'opérateur différentiel abaissant le degré de 1 ; cet opérateur sera désigné par ∂ . On a donc $\partial : A_p \longrightarrow A_{p-1}$ $\quad \partial A_0 = 0$. Les groupes $(\partial^{-1}(0) \cap A_p) / dA_{p+1} = H_p(A)$ sont les groupes d'homologie de A .

(quand d abaisse le degré de 1 on parle d'homologie au lieu de cohomologie et on met les indices au bas des lettres au lieu de les mettre en haut).

Soit G un groupe additif, et $A^p = \mathrm{Hom}(A_p , G)$, où $\mathrm{Hom}(A_p , G)$ représente le groupe additif de tous les homomorphismes de A_p dans le groupe additif G . (Si G et A sont des K-modules, $\mathrm{Hom}(A_p , G)$ désignera le K-module des K-homomorphismes de A_p dans G).

Un élément $f \in A^p$ est donc une fonction linéaire sur A_p à valeur dans G dont la valeur pour $a \in A_p$ sera notée $\langle a , f \rangle$. On munit $A^* = \sum_{p=0}^{\infty} A^p$ d'un opérateur d tel que $\langle \partial a , f \rangle = \langle a , df \rangle$ $f \in A^p$, $a \in A_{p+1}$ $\quad d$ est donc un homomorphisme $A^p \longrightarrow A^{p+1}$ tel que $d^2 = 0$ puisque

$$\langle a , d^2 f \rangle = \langle \partial a , df \rangle = \langle \partial^2 a , f \rangle = 0$$

pour tout $a \in A_{p+2}$ et tout $f \in A^p$.

A^* est donc un groupe différentiel gradué. Les groupes de cohomologie de A^* seront désignés par $H^p(A^*)$, $H^p(A)$ ou $H^p(A , G)$.

<u>PROPOSITION 6-1.- Tout élément</u> $\overline{f} \in H^p(A , G)$ <u>définit canoniquement un homomorphisme de</u> $H_p(A)$ <u>dans</u> G .

Soit f un cocycle de $\overline{f}$; si $a \in A_p \cap \partial^{-1}(0)$, $\langle a , f \rangle$ est indépendant du choix de f dans $\overline{f}$ et du choix de a dans $\overline{a}$. En effet

$$\langle a + \partial\alpha , f \rangle = \langle a , f \rangle + \langle \partial\alpha , f \rangle = \langle q , f \rangle + \langle \alpha , df \rangle = \langle a , f \rangle$$

car $df = 0$.

$$\langle a , f + d\varphi \rangle = \langle a , f \rangle + \langle a , d\varphi \rangle = \langle a , f \rangle + \langle \partial a , \varphi \rangle = \langle a , f \rangle$$

car $\partial a = 0$.

On a ainsi un homomorphisme $\overline{f}$ de $H_p(A)$ dans G tel que

$$\langle \overline{a} , \overline{f} \rangle = \langle a , f \rangle .$$

En d'autres termes on a une application, évidemment bilinéaire, de $H^p(A) \times H_p(A)$ dans G .

<u>Mais on n'a pas, en général</u> $H^p(A , G) = \mathrm{Hom}(H_p(A) , G)$ car $\langle \overline{a} , \overline{f} \rangle$ peut être nul pour tout $\overline{a} \in H_p(A)$ sans que $\overline{f}$ soit nul.

La formule ci-dessus est cependant exacte dans les 2 cas suivants :

a) A et G sont des K-modules ou K <u>est un corps</u>

b) A et G sont des Z-modules et $H(A)$ <u>est sans torsion</u>.

Donnons nous 3 groupes différentiels gradués A , B , C tels que la suite $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$ soit exacte, et supposons de plus que A <u>soit facteur direct</u> de B . La suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C^p , G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B^p , G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A^p , G) \longrightarrow 0$$

est alors exacte pour tout p .

Le théorème 5-1 s'applique et donne :

<u>THÉORÈME 6-1.- Dans les conditions ci-dessus on a la suite exacte de cohomologie</u> :

$$0 \longrightarrow H^0(C , G) \xrightarrow{j^*} H^0(B , G) \xrightarrow{i^*} H^0(A , G) \xrightarrow{\delta^*} H^1(C , G) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^p(C , G) \longrightarrow H^p(B , G) \longrightarrow H^p(A , G) \xrightarrow{\delta^*} H^p(C , G) \longrightarrow \cdots$$

7.- Homomorphismes.

Soit h un homomorphisme $G \longrightarrow G'$, on en déduit un homomorphisme noté encore $h : \mathrm{Hom}(A_p , G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A_p , G')$ par $\langle a , hf \rangle = h \langle a , f \rangle$ $a \in A_p$ $f \in \mathrm{Hom}(A_p , G)$. Notons encore d l'opérateur différentiel défini sur $\sum \mathrm{Hom}(A_p , G')$ dans (II-6). On a : $hd = dh$ en effet

$$\langle a , dhf \rangle = \langle \partial a , hf \rangle = h \langle \partial a , f \rangle$$

$$\langle a , hdf \rangle = h \langle a , df \rangle = h \langle \partial a , f \rangle$$

le raisonnement fait dans (I-4) s'applique :

h induit canoniquement un homomorphisme noté h^* de $H^p(A , G)$ dans $H^p(A , G')$.

Si A est libre et si la suite $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ est exacte, la suite $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A^p , G') \longrightarrow \mathrm{Hom}(A^p , G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A^p , G'') \longrightarrow 0$ est aussi exacte. Le raisonnement qui nous a servi à démontrer le théorème 5-I s'applique sans changement, et l'on a

THÉORÈME 7-1.- Si la suite $0 \longrightarrow G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G'' \longrightarrow 0$ est exacte, la suite

$$0 \longrightarrow H^0(A , G') \xrightarrow{i^*} H^0(A , G) \xrightarrow{j^*} H^0(A , G'') \xrightarrow{\theta} H^1(A , G') \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^{q-1}(A , G'') \xrightarrow{\theta} H^q(A , G') \xrightarrow{i^*} H^q(A , G) \xrightarrow{j^*} H^q(A , G'') \longrightarrow \cdots$$

est aussi exacte.

III.- LE COMPLEXE SIMPLICIAL

8.- Définitions.

On appelle n-simplexe un ensemble de $n+1$ éléments appelés sommets (ou 0-simplexe) ; une q-face d'un n-simplexe est un sous-ensemble de $(q+1)$ éléments du n-simplexe, c'est donc aussi un q-simplexe. Un complexe simplicial K, est un ensemble de simplexes, qui avec tout simplexe contient l'ensemble de ses faces.

Une q-chaine élémentaire est une suite ordonnée de $q+1$ sommets de K pris dans un même simplexe de K, ou si l'on veut une fonction qui à tout entier $i = 0 , 1 , \ldots , q$, fait correspondre un sommet $a_i \in K$ tel que tous les a_i appartiennent à un même simplexe de K.

<u>Le groupe des q-chaines</u> est le groupe abélien libre engendré par les q-chaines élémentaires. Il sera désigné par $C_q(K)$. ($q \geqslant 0$) ; ($C_q = 0$ si $q < 0$).

Soit $a_0 \dots a_q$ une q-chaine élémentaire, on pose

$$\partial(a_0 \dots a_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \, a_0 \dots \hat{a}_i \dots a_q$$

(le signe ^ signifie que l'on a supprimé la lettre au dessus de laquelle il a été placé).

Les q-chaînes élémentaires engendrant $C_q(K)$, on peut prolonger ∂ par linéarisation à un homomorphisme noté encore $\partial : C_q(K) \to C_{q-1}(K)$. On vérifie immédiatement que $\partial\partial = 0$. Le groupe libre (ou Z-module) $\sum_{q=0}^{\infty} C_q(K)$ est donc un groupe différentiel gradué. On peut donc définir ses groupes d'homologie et de cohomologie, que nous noterons $H_q(K)$, $H^q(K , G)$.

9.- <u>Le cup-produit.</u>

Nous supposerons maintenant que G est un anneau. On peut alors définir sur $\sum \mathrm{Hom}(C_q(K) , G)$ un produit.

En effet, si $f \in C^n(K , G)$ $g \in C^p(K , G)$, (où $C^q(K , G) = \mathrm{Hom}(C_p(K) , (G))$ on pose pour tout (n+p)-simplexe $a_0 \dots a_{n+p}$:

$$\langle a_0 \dots a_{n+p} , f.g \rangle = \langle a_0 \dots a_n , f \rangle \quad \langle a_n \dots a_{n+1} , g \rangle$$

la (n+1)-cochaine $f.g$ ainsi définie est le cup-produit de f et de g .

On a $d(f.g) = df.g + (-1)^n f.dg$ en effet :

$$\langle a_0 \dots a_{n+p+1} , d(f.g) \rangle = \langle d(a_0 \dots a_{n+p+1}) , f.g \rangle =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle a_0 \dots \hat{a}_i \dots a_n \, a_{n+1} \dots a_{n+p+1} , f.g \rangle +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{n+i} \langle a_0 \dots a_n \, a_{n+1} \dots \hat{a}_{n+i} \dots a_{n+p+1} , f.g \rangle =$$

$$= \langle (\partial a_0 \dots a_n) a_{n+1} \dots a_{n+p+1} , f.g \rangle + (-1)^n \langle a_0 \dots a_n (\partial a_{n+1} \dots a_{n+p+1}) f.g \rangle$$

$$= \langle (\partial a_0 \dots a_n) a_{n+1} , f \rangle \langle a_{n+1} \dots a_{n+p+1} , g \rangle +$$

$$+ (-1)^n \langle a_0 \dots a_n , f \rangle \langle a_n (\partial a_{n+1} \dots a_{n+p+1} , g \rangle$$

$= \langle (\partial a_0 \dots a_{n+1}), f \rangle \langle a_{n+1} \dots a_{n+p+1}, g \rangle +$

$+ (-1)^n \langle a_0 \dots a_n ; f \rangle \langle \partial(a_n \dots a_{n+p+1} ; g) \rangle =$

$= \langle a_0 \dots a_{n+1}, df \rangle \langle a_{n+1} \dots a_{n+p+1}, g \rangle +$

$+ (-1)^n \langle a_0 \dots a_n, f \rangle \langle a_n \dots a_{n+p+1}, dg \rangle =$

$= \langle a_0 \dots a_{n+p+1}, df.g + (-1)^n f.dg \rangle$

(dans le calcul précédent on a, pour simplifier l'écriture, "mis en facteur" certains éléments de chaines élémentaires. Par exemple $(\partial a_0 \dots a_n)a_{n+1}$ signifie $\sum_{i=0}^{n} (-1)^n a_0 \dots \hat{a}_i \dots a_n a_{n+1}$ et $a_n \partial(a_{n+1} \dots a_{n+p+1})$ signifie $\sum_{i=1}^{p+i} (-1)^{-i} a_n a_{n+1} \dots \hat{a}_{n+i} \dots a_{n+p+1} \dots$)

La proposition 3-1 permet alors de munir $H(K, G)$ d'une structure multiplicative compatible avec les graduations. Cette multiplication est le cup-produit.

$\sum \mathrm{Hom}(C_q(K), G)$ n'est pas anticommutative pour le cup-produit comme on le remarque sans peine. Cependant on a le théorème :

<u>THÉORÈME 9-1</u>.- $H(K, G)$ <u>est une algèbre anticommutative</u>

c'est-à-dire que $\overline{f}.\overline{g} = (-1)^{np}\, \overline{g}.\overline{f}$ si $\overline{f} \in H^n(K, G)$, $\overline{g} \in H^p(K, G)$

La démonstration se fera en quatre parties.

a) A toute n-chaîne élémentaire $s = a_0 \dots a_n$ faisons correspondre la n-chaîne élémentaire $\rho(s) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a_n \dots a_0$.

ρ définit par linéarisation un homomorphisme $C_n(K) \longrightarrow C_n(K)$ pour tous les degrés n, et par passage aux Hom un homomorphisme noté encore ρ de $C^n(K, G)$ dans $C^n(K, G)$.

On a évidemment $\partial \rho = \rho \partial$ et par conséquent $\rho d = d \rho$.

b) Soient $f \in C^n(K, G)$ et $g \in C^p(K, G)$; calculons $\rho(f.g)$

$\langle a_0 \dots a_{n+p}, \rho(f.g) \rangle = \langle \rho(a_0 \dots a_{n+p}), f.g \rangle =$

$= (-1)^{\frac{(n+p)(n+p+1)}{2}} \langle a_{n+p} \dots a_0, f.g \rangle =$

$$= (-1)^{\frac{(n+p)(n+p+1)}{2}} < a_{n+p} \cdots a_p , f > \langle a_p \cdots a_0 , g \rangle =$$

$$=(-1)^{\frac{(n+p)(n+p+1)}{2}}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} < \rho(a_p \ldots a_{n+p}), f > \langle \rho(a_0 \ldots a_p), g \rangle =$$

$$= (-1)^{np} < a_p \cdots a_{n+p} , \rho(f) > \langle a_0 \cdots a_p \ \rho(g) \rangle =$$

$$= (-1)^{np} < a_0 \cdots a_{n+p} , \rho(g) \ \rho(f) >$$

par conséquent $\rho(f.g) = (-1)^{np} \rho(g). \ \rho(f)$

c) ρ induit un <u>isomorphisme</u> de $H_n(K)$ sur $H_n(K)$ et de $H^n(K)$ sur $H^n(K)$. Pour le démontrer nous allons construire un opérateur $\tau : C_q(K) \to C_{p+1}(K)$ tel que

$$(1) \qquad \partial \tau + \tau \partial = I - \rho \qquad (I \text{ est l'opérateur identique})$$

τ est appelé un opérateur d'homotopie. On définit τ par récurrence sur q. Sur $C_0(K)$ on pose $\tau = 0$. Supposons connu τ sur $C_k(K)$ pour $k \leqslant q-1$, l'identité (1) étant vérifiée, et posons

$$\tau(a_0 \ldots a_q) = a_0[a_0 \ldots a_q - \rho(a_0 \ldots a_q) - \tau(\partial a_0 \ldots a_q)]$$

un calcul facile montre que :

$$\partial(\tau(a_0 \ldots a_q)) = a_0 \ldots a_q - \rho(a_0 \ldots a_q) - \tau(\partial a_0 \ldots a_q) -$$

$$- a_0[\partial(a_0 \ldots a_q) - \partial \rho(a_0 \ldots a_q) - \partial \tau(\partial a_0 \ldots a_q)]$$

(1) étant vérifié pour la $(q-1)$ choisie $\partial a_0 \ldots a_q$ on a

$$\partial \tau(\partial a_0 \ldots a_q) + \tau \partial(\partial a_0 \ldots a_q) = \partial a_0 \ldots a_q - \rho \, \partial a_0 \ldots a_q$$

et comme $\partial \rho = \rho \partial$ $\partial\partial = 0$, le crochet est nul. Il reste

$$(\partial \tau + \tau \partial)(a_0 \ldots a_q) = I(a_0 \ldots a_q) - \rho(a_0 \ldots a_q)$$

d'un transposant (1), et désignant encore par τ l'opération transposée, on a $\tau d + d \tau = I - \rho$. Si f est un cocycle on a donc $- d \rho f + df = - d \rho f = d \tau df + d^2 \tau f = 0$: $\rho(f)$ est donc aussi un cocycle ; de plus $f - \rho f = \tau df + d \tau f = d \tau f$: f et $\rho(f)$ ne diffèrent que d'un cobord et appartiennent par conséquent à la même classe de cohomologie.

<u>b</u> montre alors que $f.g$ et $(-1)^{np} g.f$ appartiennent à la même classe de cohomologie. C.Q.F.D.