Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

C. Chamfy

Sur les coefficients de certaines fonctions méromorphes dans le cercle-unité, en liaison avec un problème d'arithmétique

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. nº 5, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A5_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1956/57
-:-:-:-

SUR LES COEFFICIENTS DE CERTAINES FONCTIONS MÉROMORPHES DANS LE CERCLE-UNITÉ, EN LIAISON AVEC UN PROBLÈME D'ARITHMÉTIQUE.

(Exposé de Mlle C. CHAMFY, le 10.12.1956).

Etant donnée une fonction $f(z)$, holomorphe et telle que $|f(z)| \leqslant 1$ pour $|z| \leqslant 1$, les coefficients de son développement en série de puissances au voisinage de $z = 0$ satisfont à une suite d'inégalités rationnelles que l'on obtient par application du lemme de Schwarz. On a montré que ces inégalités constituent une condition nécessaire et suffisante pour que $f(z)$ soit holomorphe et bornée par 1 en module pour $|z| \leqslant 1$ (cf. Schur, J. für die reine und ang. Math., 147, 1917, p. 205-232 et 148, 1918, p. 122-145.)

MM. Dufresnoy et Pisot (cf. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 72, 1955, p. 69-92), ont généralisé cela, dans certaines conditions, à une fonction méromorphe bornée par 1 en module sur $|z| = 1$ et présentant un seul pôle, $\neq 0$, simple pour $|z| < 1$, et ont montré que les coefficients d'une telle fonction satisfont aussi à une suite d'inégalités rationnelles.

Cas d'une fonction méromorphe bornée par 1 en module sur $|z| = 1$ et ayant p pôles dans $|z| < 1$:

On peut généraliser les résultats précédents au cas d'une fonction méromorphe bornée par 1 en module sur $|z| = 1$ et ayant p pôles distincts ou non, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, tous $\neq 0$, dans $|z| < 1$.

Nous allons voir que, étant donnée une telle fonction $f(z)$, telle que : $f(z) \equiv u_0 + \ldots + u_n z^n + \ldots$ (où nous supposerons $u_0 \neq 0$) au voisinage de $z = 0$, on peut former dans tous les cas une fonction $F(z)$, holomorphe et bornée par 1 en module pour $|z| \leqslant 1$ si et seulement si $f(z)$ est bornée par 1 en module sur $|z| = 1$ et a exactement p pôles pour $|z| < 1$. Le mode de formation de $F(z)$ à partir de $f(z)$ ne dépend que des u_n, et ses coefficients au voisinage de $z = 0$ sont des fonctions rationnelles des u_n.

En appliquant le lemme de Schwarz à $F(z)$, on obtient une suite d'inégalites rationnelles sur les u_n, constituant une condition nécessaire et suffisante pour que $F(z)$ soit holomorphe et bornée par 1 en module pour $|z| \leqslant 1$ et, par conséquent, pour que $f(z)$ ait p pôles dans $|z| < 1$ et soit bornée par 1 en module sur $|z| = 1$.

Nous utiliserons le lemme préliminaire :

Si $A(z)$ et $B(z)$ sont deux polynômes vérifiant $|B(z)| \leqslant |A(z)|$ sur $|z| = 1$ et si la fonction : $\varphi(z) \equiv B(z)\, f(z) - A(z)$ présente au voisinage de $z = 0$ le développement : $\varphi(z) \equiv a_k z^k + \dots$ où $k \geqslant 0$ et $a_k \neq 0$.

q étant le nombre de zéros de $A(z)$ dans $|z| < 1$, on a $p + q \geqslant k$ et $\varphi(z)$ a, dans $|z| < 1$, au plus $p + q - k$ zéros autres que $z = 0$.

Ce résultat s'obtient en appliquant le théorème de Rouché à la fonction $[B(z)\, f(z) - \lambda A(z)]\,(z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_p)$, où $\lambda > 1$, et en faisant tendre λ vers 1.

Nous nous bornerons tout d'abord à une fonction $f(z)$ réelle pour z réel.

Soit, au voisinage de $z = 0$, $f(z) \equiv u_0 + u_m z^m + \dots$ où u_0 et u_m sont $\neq 0$ et $m \geqslant 1$.

1/ Si $|u_0| > 1$: Soit $f_1(z) \equiv z^m \dfrac{u_0 f(z) - 1}{f(z) - u_0}$. Alors : $f(z) \equiv \dfrac{u_0 f_1(z) - z^m}{f_1(z) - u_0 z^m}$

$f_1(z)$ n'a 0 ni pour pôle ni pour zéro. $|f_1(z)| \leqslant 1$ sur $|z| = 1$ et on voit en appliquant le lemme à $f(z) - u_0$ et $f_1(z) - u_0 z^m$ que, pour que $f(z)$ ait p pôles dans $|z| < 1$, il est nécessaire et suffisant que $f_1(z)$ en ait exactement $p - m$.

2/ Si $|u_0| = 1$: $g_1(z) = \dfrac{(z^{2m} + u_0 u_m z^m - 1) u_0 f(z) - (z^{2m} - 1)}{(z^{2m} - 1) u_0 f(z) - (z^{2m} - u_0 u_m z^m - 1)}$

$|z^{2m} - u_0 u_m z^m - 1| > |z^{2m} - 1|$ sur $|z| = 1$ et $z^{2m} - u_0 u_m z^m - 1$ a dans $|z| < 1$ m racines, tandis que le dénominateur de $g_1(z)$ a, au voisinage de $z = 0$, un développement dont le premier terme est de degré $> m$.

Le lemme préliminaire montre que $g_1(z)$ a dans $|z| < 1$ un nombre de pôles $< p - |g_1(z)| \leqslant 1$ sur $|z| = 1$ et on voit comme dans le cas précédent que le nombre de pôles de $g_1(z)$ dépend uniquement de p et des u_n. En multipliant au besoin $g_1(z)$ par une puissance convenable de z qui, elle aussi, ne dépend que des u_n, on obtient une fonction holomorphe au voisinage de $z = 0$ et ne s'annulant pas pour $z = 0$. Cette fonction a les mêmes propriétés que $f(z)$, et un nombre de pôles strictement inférieur.

3/ Si $|u_0| < 1$: Soit $h_1(z) = \dfrac{f(z) - u_0}{u_0 f(z) - 1} \times \dfrac{1}{z^m}$

$|h_1(z)| \leqslant 1$ sur $|z| = 1$ et $h_1(z)$ a p pôles dans $|z| < 1$.

Soit au voisinage de $z = 0$: $h_1(z) \equiv u_{1,0} + u_{1,m_1} z^{m_1} + \dots$ avec $u_{1,m_1} \neq 0$, $m_1 \geqslant 1$.

Si $|u_{1,0}| < 1$, on forme $h_2(z) \equiv \dfrac{h_1(z) - u_{1,0}}{h_1(z)u_{1,0} - 1} \times \dfrac{1}{z^{m1}}$

et de même : $h_{r+1}(z) \equiv \dfrac{h_r(z) - u_{r,0}}{h_r(z)u_{r,0} - 1} \times \dfrac{1}{z^{m_r}}$

où $h_r(z) \equiv u_{r,0} + u_{r,m_r} z^{m_r} + \dots$ avec $u_{r,m_r} \neq 0$, $m_r \geqslant 1$, au voisinage de $z = 0$, et ceci tant que $|u_{r,0}| < 1$.

Or les conditions $|u_{r,0}| < 1$ pour tout r sont suffisantes pour que $f(z)$ soit holomorphe et bornée par 1 en module pour $|z| \leqslant 1$.

Donc il existe un rang R tel que $|u_{R,0}| \geqslant 1$.

En traitant $h_R(z)$ qui a exactement les mêmes propriétés que $f(z)$ par la méthode envisagée dans les cas 1/ ou 2/, on obtient une fonction ayant les mêmes propriétés que $f_1(z)$ ou $g_1(z)$.

Nous arriverons donc ainsi dans tous les cas à former une fonction $F(z)$ bornée dans $|z| \leqslant 1$ et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des u_n, et telle qu'il soit nécessaire et suffisant pour que $f(z)$ ait p pôles dans $|z| < 1$ que $F(z)$ y soit bornée, ce qui résoud le problème.

J'ai supposé $f(z)$ réelle pour z réel en vue d'applications arithmétiques où on se trouve dans ce cas. Mais, ainsi qu'on me l'a d'ailleurs signalé, ce résultat est encore vrai pour une fonction $f(z)$ complexe. Pour réduire le nombre de pôles de $f(z)$, il suffit de considérer les fonctions si $|u_0| > 1$: $\qquad f_1(z) \equiv \dfrac{\overline{u}_0 f(z) - 1}{f(z) - \overline{u}_0} \cdot z^m$

si $|u_0| = 1$: $\qquad g_1(z) \equiv \dfrac{\overline{u}_0(z^{2m} + |u_m|\, z^m - 1)f(z) - (z^{2m} - 1)}{(z^{2m} - 1)f(z) - u_0(z^{2m} - |u_m|\, z^m - 1)}$

en supposant pour simplifier l'expression qu'on a effectué une rotation préalable de façon que $\overline{u}_0 u_m$ soit réel et > 0 .

si $|u_0| < 1$: $\qquad h_1(z) \quad \dfrac{f(z) - u_0}{\overline{u}_0 f(z) - 1} \times \dfrac{1}{z^m}$

et tous les raisonnements précédents restent vrais.

Problèmes arithmétiques :

. MM. Dufresnoy et Pisot, dans le cas $p = 1$, ont appliqué leurs résultats au cas particulier d'une fraction rationnelle $f(z) \equiv \frac{P(z)}{Q(z)}$ où $P(z)$ est un polynôme irréductible à coefficients entiers réels de la forme $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots$ n'ayant qu'une racine à l'extérieur de $|z| = 1$ et n'en ayant pas sur ce cercle, et où $Q(z) \equiv \pm z^n P(\frac{1}{z})$.

Ils ont ainsi pu établir certaines propriétés des entiers algébriques dont tous les conjugués sont intérieurs au cercle unité, et en particulier déterminer les plus petits nombres de cet ensemble que nous appellerons S_1 .

On peut donc espérer appliquer les résultats plus généraux à l'étude de certaines familles d'entiers algébriques supérieurs à 1 en module n'ayant pas de conjugués sur $|z| = 1$ et en ayant un nombre donné à l'extérieur de $|z| = 1$. On peut tout d'abord étudier le cas de deux entiers conjugués à l'extérieur de $|z| = 1$, qui correspond à $p = 2$. Il faut distinguer dans cette famille deux ensembles, suivant que les nombres considérés sont réels ou imaginaires. Soit S_2 le second de ces ensembles. M. Kelly a démontré (Amer. J. Math., 72, 1950, p. 565-572) que les points d'accumulation de S_2 appartiennent à S_2 ou S_1 . Il n'y a pas de points d'accumulation de S_2 sur le cercle unité, et on peut chercher quels sont ceux de ces nombres qui ont le plus petit module.

Je ne suis arrivée qu'à une limite inférieure trop large encore pour leurs modules, en n'appliquant il est vrai que faiblement les résultats précédents.

Soit $P(z)$ le polynôme irréductible de degré n dont sont racines les deux nombres de S_2 $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\bar{\alpha}}$, $Q(z) \equiv \varepsilon z^n P(\frac{1}{z}) - \varepsilon = \pm 1$, $f(z) \equiv \frac{P(z)}{Q(z)}$.

Appliquons le lemme de Schwarz à la fonction bornée par 1 en module pour $|z| \leq 1$: $\varphi(z) \equiv \frac{P(z)}{Q(z)} \times \frac{(z - \alpha)(z - \bar{\alpha})}{(1 - \alpha z)(1 - \bar{\alpha} z)}$

Les coefficients u_n de $f(z)$ au voisinage de $z = 0$ sont des entiers.

a/ $|\varphi(0)| = |u_0| \alpha \bar{\alpha}$ est ≤ 1. On a donc nécessairement $|u_0| = 1$ si $\boxed{\alpha \bar{\alpha} > \frac{1}{2}}$

Supposons α et $\bar{\alpha}$ satisfaisant à cette condition, et ε choisi de façon que $u_0 = +1$.

b/ Formons $\varphi_1(z) = \frac{\varphi(z) - \varphi(0)}{\varphi(z)\,\varphi(0) - 1} \times \frac{1}{z}$. La condition $|\varphi_1(0)| < 1$ est équivalente à :

$$- \frac{1 - \alpha \bar{\alpha}}{\alpha \bar{\alpha}} (1 - \alpha)(1 - \bar{\alpha}) < u_1 < \frac{1 - \alpha \bar{\alpha}}{\alpha \bar{\alpha}} (1 + \alpha)(1 + \bar{\alpha})$$

On a donc nécessairement $u_1 = 0$ si α et $\bar{\alpha}$ se trouvent dans la région telle que : $\boxed{\frac{1 - \alpha \bar{\alpha}}{\alpha \bar{\alpha}}(1 + \alpha)(1 + \bar{\alpha}) < 1 \quad \text{et} \quad \frac{1 - \alpha \bar{\alpha}}{\alpha \bar{\alpha}}(1 - \alpha)(1 - \bar{\alpha}) < 1}$

qui est l'intersection de 2 régions symétriques par rapport à l'axe imaginaire. Soit A cette région. Elle est limitée d'une part par le cercle $|z| = 1$ d'autre part par une courbe (1) sur laquelle $|z|$ croît de l'axe imaginaire à l'axe réel, en restant < 1. Supposons que α et $\bar{\alpha}$ correspondent à des points de la région A. (le cercle de centre 0 et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ne coupe pas la région A.).

c/ Formons $\varphi_2(z) = \frac{\varphi_1(z) - \varphi_1(0)}{\varphi_1(z)\,\varphi_1(0) - 1} \times \frac{1}{z}$

$|\varphi_2(0)| < 1$ et équivalent à : $- 2 \frac{1 - \alpha \bar{\alpha}}{\alpha \bar{\alpha}(1 + \alpha \bar{\alpha})} (1 - \alpha^2)(1 - \bar{\alpha}^2) < u_2 < 0$

Or $f_2(z) - 1 \equiv u_2 z^2 + \ldots$ au voisinage de $z = 0$ et $f(z) - 1$ a au plus 2 racines pour $|z| < 1$ en vertu du lemme préliminaire. Donc $u_2 \neq 0$.

Les nombres α et $\bar{\alpha}$ correspondant à la région A satisfont donc nécessairement à :

$$\boxed{- 2 \frac{1 - \alpha \bar{\alpha}}{\alpha \bar{\alpha}(1 + \alpha \bar{\alpha})} (1 - \alpha^2)(1 - \bar{\alpha}^2) < - 1}$$

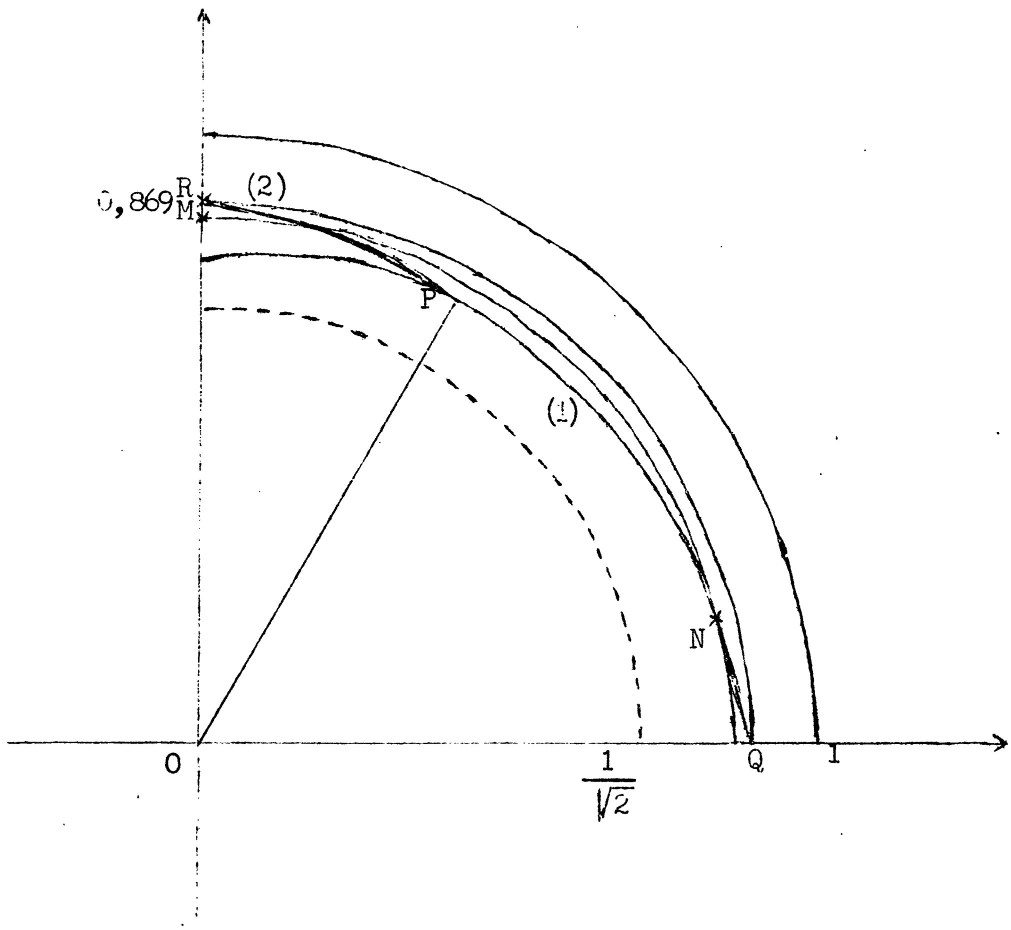
Cette inégalité détermine une région B entourant l'origine, limitée par une courbe (2) sur laquelle $|z|$ décroît de l'axe imaginaire à l'intersection avec (1) .

Les courbes (2) et (1) limitent ainsi une région au voisinage de $|z| = 1$ dans laquelle il ne peut y avoir de nombres α . C'est le point d'intersection de (2) avec l'axe imaginaire qui détermine une limite supérieure des modules des nombres α . L'affixe de ce point est racine de : $2z^4 + z^2 - 2 = 0$. Son inverse n'est pas un entier algébrique, donc ce n'est pas un nombre α et la limite supérieure trouvée est certainement trop large. Elle vaut 0,883 615 .

Parmi les familles connues de nombres de S_2 figurent tous ceux qui sont imaginaires purs, qui sont les racines carrées des nombres négatifs de S_1 . Si θ_1 est le plus petit nombre de S_1, le nombre α imaginaire pur le plus grand en module a donc pour module $\dfrac{1}{\sqrt{\theta_1}} \# 0,869$.

C'est également le plus grand module de nombre α correspondant à la courbe (1) . En effet cette courbe correspond, dans sa partie extérieure à B , à $\varphi_1(z) = \pm 1$. Les nombres α et $\bar{\alpha}$ correspondant sont nécessairement du 3ème degré, ce sont donc les conjugués d'un nombre de S_1 . Les conjugués de θ_1 , qui sont effectivement affixes de points de (1) ont donc le module maximum pour un nombre α correspondant à un point de (1) . Ce module vaut encore $\dfrac{1}{\sqrt{\theta_1}} = 0,869 \ldots$

Je ne connais pas de nombre α ayant un module supérieur, et il semble que ce soit là la vraie borne supérieure pour $|\alpha|$.



M : image du nombre α imaginaire pur ayant le plus grand module.

N : image d'un des conjugués de Θ_1.

OP : 0, 849 ..

OQ est très légèrement inférieur à OR = 0, 883 615 ..