

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

P. LEVY-BRUHL

Tresses algébriques : quelques applications

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. n° 4,
p. 1-18

http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A4_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRESSES ALGÈBRIQUES : QUELQUES APPLICATIONS

(Exposé de Mme P. LEVY-BRUHL, le 3.12.56)

1.- Formes canoniques de la tresse d'une courbe algébrique.

1ère forme de Mr Chisini.

Par continuité et sans coïncidence de points de diramation il est possible de passer d'une courbe algébrique d'ordre n à la courbe d'équation

$$\varphi = y^n - ny + x^n = 0 .$$

Aux $n(n-1) = m$ points de diramation de la fonction $y(x)$ est associé un système L_1 de lacets du plan $\overline{\Pi}_x$ donnant naissance à la tresse ; ce système est celui des segments joignant l'origine 0 de $\overline{\Pi}_x$ aux sommets du polynome $\overline{\Pi}$, définis par $x = (n-1)^{\frac{1}{n}}$, dont un sommet le premier est sur l'axe réel. A chaque sommet de $\overline{\Pi}$ correspondent dans $\overline{\Pi}_y$ les $(n-1)$ valeurs : $y^{n-1} = 1$ et à chacune de celles-ci, les sommets de $\overline{\Pi}$.

Pour $x = 0$, il existe n déterminations de $y(x)$ ordonnées à partir de l'axe réel : $y_1 = 0, y_2 \dots y_n$ et formant un polynome P dans $\overline{\Pi}_y$ de centre y_1 . Comme pour $x > 0$, l'équation $\varphi = 0$ a au plus 2 racines positives, le parcours du lacet L_1 produit sur les n déterminations y_i uniquement l'échange $(y_1 y_2)$: ainsi les chemins décrits dans $\overline{\Pi}_y$ par $y_3 \dots y_n$ ne coupent pas ceux décrits par y_1 et par y_2 quand x décrit L_1 .

Or la transformation $x' = x \cdot e^{\frac{2i\pi}{n(n-1)}}$ $y' = y \cdot e^{\frac{2i\pi}{n-1}}$ laisse invariante $\varphi = 0$ et y_1 mais permute circulairement $y_2 \dots y_n$ et mute L_1 en $L_2, L_3 \dots$: ainsi L_2 produit l'échange $(y_1 y_3)$ etc.

Ainsi le tableau du groupe de monodromie de $y(x)$ est formé de n lignes identiques à :

$$(12) (13) \dots (1n) .$$

D'après la configuration initiale dans $\overline{\Pi}_y$, chaque couple de fils de la tresse aura dans chaque secteur la torsion définie dans les traits anoniques.

La tresse est formée de n groupes tous égaux composés chacun des $(n - 1)$ traits canoniques notés en abrégé :

$$(1\ 2)^1 \ (1\ 3)^1 \ \dots \ (1\ n)^1$$

2ème forme canonique.

Les opérations P et S permettent de passer de la 1ère forme canonique à une autre forme dite 2ème forme constituée par des traits encore tous canoniques, comme l'a montré Mr Dedo.

Partant de la tresse : $(1\ 2) \ (1\ 3) \ \dots \ (1\ n) \ (1\ 2) \ \dots \ (1\ n) \ \dots$
 $\dots \ (1\ n) \ (1\ 2) \ \dots \ (1\ n)$. On applique P de façon à écrire le transformé du $(n - 1)$ ème trait $(1\ n)$ à la seconde place et on itère :

$$(1\ 2) \ (1\ 2) \ (1\ 3) \ (1\ 3) \ \dots \ (1\ n) \ (1\ n) \ (2\ n) \ (3\ n) \ \dots \ ((n - 1)\ n) \ \dots \ (2\ n) \ \dots \ ((n - 1)\ n) .$$

Par P , on transporte $2n$ à la fin de chacun des $(n - 1)$ groupes et on itère le procédé sur les tresses de fils $2,3 \dots n$; $3,4 \dots n$ etc. ; on arrive à la forme T_n :

$$\begin{array}{ccccccc} (1\ 2) & (1\ 2) & (1\ 3) & (1\ 3) & \dots & (1\ n) & (1\ n) \\ & & (2\ 3) & (2\ 3) & \dots & (2\ n) & (2\ n) \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & & [(n - 1)\ n][n - 1, n] . \end{array}$$

Mr Chisini a obtenu directement cette forme en partant de la courbe dégénérée en n droites, ayant $\frac{n(n-1)}{2}$ points doubles, obtenus par coïncidence de couples de points de diramation qui donnent des échanges consécutifs égaux.

Autres formes canoniques.

La tresse représentant le groupe de monodromie de la fonction $y(x)$, à chaque forme de celui-ci est liée une forme de la tresse. Mme Marchionni-Tibiletti a étudié deux cas particuliers de la forme générale de Lüroth :

$$(1\ 2)^{2r_1} \ (2\ 3)^{2r_2} \ \dots \ (n - 1, n)^{2r_{n-1}}$$

avec $\sum_1^{n-1} r_i = n + p - 1$. c'est-à-dire le cas où

$$r_i = 2 \ (i = 1, \dots, n - 2) \quad r_{n-1} = 2p + 2$$

et le cas où $r_i = 2i \ (i = 1, \dots, n - 1)$.

Les formes de la tresse sont décrites en abrégé par la formule précédente où $(i, i + 1)^r$ représente r traits consécutifs portant sur l'échange

($i, i + 1$), ces traits pouvant être canoniques, élémentaires ou élémentaires généralisés. Il suffit de faire les opérations P et S convenablement sur la forme T_n ; on obtient la forme T_n^*

$$T_n^* : \begin{array}{cccccc} 12 & 12(F_3) & & & & \\ & 23 & 23(F_4) & 23 & 23(F_4) & \\ & 34 & 34(F_5) & 34 & 34(F_5) & 34 & 34(F_5) \end{array}$$

$[(n-2)(n-1)] [(n-2)(n-1)(F_n)] [(n-2)(n-1)] [(n-2)(n-1)(F_n)] \dots$
 $\dots [(n-2) \text{ couples de traits}]$

$$[n-1, n] [n-1, n] \dots [2(n-1) \text{ traits}]$$

où F_i représente tous les fils d'indices supérieurs à i .

Tresse d'une courbe algébrique passant par le point impropre Y dwy .

Si la courbe passe simplement par Y , une seule détermination, y_1 , devient infinie, deux points de diramation simples viennent en Y et portent sur un même échange $(y_1 y_2)$; les fonctions $(y_2 - y_1)$ ont une variation d'argument de -2π .

Ces faits se traduisent sur la tresse T_n^* par la suppression du 1er fil et des 2 premiers traits ; on obtient une tresse T_{n-1}^1 de $(n-1)$ fils dont le 1er fil a l'ordre 2.

Ou encore, on ajoute à la ligne L' , le lacet entourant le pôle de $y(x)$; cela revient à enlever dans T_n^* le fil 1 et à ajouter devant la tresse deux traits dans lesquels le fil 2 fait un tour complet négatif autour de l'ensemble des autres fils, parallèles entre eux : c'est la tresse amplifiée.

Si la courbe a en Y un point r -uple, la tresse T_{n-r}^r se déduit de T_n^* par suppression des r -premiers fils et des $r(r+1)$ traits correspondants aux échanges des r -premières déterminations avec y_{r+1} .

2.- Théorème d'existence des tresses algébriques. (Chisini)

Les tresses déduites de la forme canonique par les opérations P et S et par l'union de traits consécutifs identiques (trait obtenu en enlevant le diaphragme qui sépare les 2 traits identiques) sont construites a priori ; le théorème d'existence de Mr Chisini donne une condition suffisante pour que ces tresses correspondent à des courbes existantes. Les étapes de la démonstration sont les suivantes.

1°) La variété linéaire S des courbes \prod_n^r algébriques planes d'ordre $(n+r)$, ayant un point r -uple en Y , est de dimension

$$d = \frac{n(n+3)}{2} + r(n+1)$$

S contient la sous-variété V_r des courbes C_n^r de genre $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ et dotées en plus de $r(n-1)$ points doubles avec $n \geq 3$.

LEMME 1.- n étant fixé, la série linéaire g_n^1 découpée sur C_n^r par le faisceau de droites de sommet Y est complète.

LEMME 2.- Sur toute courbe C_n^r générique où $r = p + 2 - n$, le réseau des droites découpe une série linéaire $g_{n+r}^2 = g_{p+2}^2$ complète.

Ces deux lemmes se démontrent en utilisant l'image canonique, d'une courbe de genre p , qui acquiert p points doubles et les séries découpées par les hyperplans de faisceaux particuliers.

LEMME 3.- La variété U des courbes C_n^r qui définissent des fonctions $y(x)$ birationnellement identiques (par rapport au groupe de monodromie) est de dimension $d_u = r + 3$.

Deux telles courbes C_n^r se déduisent par les homologies de centre Y et il existe $\omega^r g_{n+r}^2$ contenant une même g_n^1 .

THÉORÈME 1.- La dimension de la variété V_r est :

$$d_r = \frac{n(n+3)}{2} + 2r \quad \text{où } r = p + 2 - n.$$

En effet V_r est de dimension $d_r = d - r(n-1) + \varepsilon$

$$\text{soit } d_r = \frac{n(n+3)}{2} + 2r + \varepsilon \quad \varepsilon \geq 0 \quad (1)$$

Si $\eta \geq 0$ est le nombre de relations entre les $n(n-1)$ points de diramation de C_n^r , ces points définissent une variété de C_n^r de dimension $d_r = n(n-1) - \eta + (r+3) \quad \eta \geq 0 \quad (2)$.

En égalant (1) et (2) quand $r = p + 2 - n = \frac{n(n-5)}{2} + 3$ on trouve $\varepsilon = \eta = 0$.

CONSÉQUENCE.-

A : L'imposition d'un point r -uple donné et de $r(n-1)$ points doubles à une courbe d'ordre $n+r$ où $r = \frac{n(n-5)}{2} + 3$ donne des conditions indépendantes.

B : Les $n(n-1) = m$ points de diramation d'une courbe C_n^r peuvent être choisis arbitrairement.

C : Etant donné les points de diramation et le groupe de monodromie transitif associé, C_n^r est définie et irréductible.

En effet C_n^r est décomposé; si elle l'est, en une courbe C_s^{s-1} d'ordre s , ayant un point multiple d'ordre $(s-1)$ en Y et en t droites du faisceau de sommet Y tel que $r = n(s-1) + t$; ces courbes forment un système de dimension $\bar{d} = \frac{s(s+3)}{2} - \frac{s(s-1)}{2} + t < r + 3 = d_U$: donc il existe des C_n^r irréductibles.

2°) Par variation continue en fonction d'un paramètre réel t , $C_n^r(t)$ peut acquérir δ points doubles $N_1 \dots N_\delta$ et k cuspidés $K_1 \dots K_k$: soit Q_n^r cette courbe supposée obtenue pour $t = 1$.

Dans un espace S_m où $m = n(n-1)$, les m abscisses des points de diramation d'une C_n^r déterminent les coordonnées d'un point qui représentent une classe de C_n^r modulo U .

Les 2 ou 3 points de diramation qui coïncident pour former un noeud N ou un cuspidé K sont liés par 1 ou 2 relations linéaires; ces équations déterminent dans S_m un espace linéaire $L(t)$ à $(m - \delta - 2k)$ dimensions. Les courbes Q_n^r décomposées en une courbe Q_n et r droites issues de Y ont pour images dans S_m une variété Σ de dimension $\frac{n(n+3)}{2} - 3$ (car il existe ∞^3 homologues entre 2 courbes Q_n appartenant à une même classe U).

Si $\delta + 2k < \frac{n(n+3)}{2} - 3$, $L(t)$ coupe Σ .

Il existe ainsi des C_n^r décomposées en r droites et en C_n pour $t = 0$, en Q_n pour $t = 1$. Ainsi on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C_n^r(0) & \xrightarrow{\lambda \in L(0)} & C_n(0) \\ f(t) \downarrow & & \downarrow g(t) \\ Q_n^r & \xrightarrow{\lambda \in L(1)} & Q_n \end{array}$$

On montre enfin par l'absurde que les noeuds et cuspidés de Q_n proviennent de ceux acquis par Q_n^r et que Q_n n'a pas de singularités plus élevées.

THÉORÈME 2.— Par continuité on peut passer d'une Q_n^r dotée de δ noeuds et k cuspidés acquis à une courbe dégénérée en Q_n et r droites parallèles à Oy , de façon que Q_n possède encore et seulement δ noeuds et k cuspidés qui sont limites des éléments analogues de Q_n^r si la condition suffisante

$$\delta + 2k < \frac{n(n+3)}{2} - 3 \quad \text{est réalisée.}$$

CONSÉQUENCE. - A une Q_n^r irréductible correspond une $Q_{n,r}$ irréductible, qui, jointe à r droites, a même groupe de monodromie que Q_n^r .

3°) La tresse de C_n^r est T_n^r amplifiée et se déduit de la tresse d'une C_n^r dégénérée en r droites parallèles à Oy et en une C_n ; il suffit de doubler les r points d'intersection des r droites avec la même détermination y par exemple, de C_n et en gardant doubles tous les autres points d'intersection.

Sur la tresse T_n^r , on peut suivre la transformation $C_n^r \longrightarrow Q_n^r$: l'acquisition des noeuds et cuspidés se traduit par fusion de traits consécutifs identiques.

On montre

- 1) que les points de diramation apparente peuvent être considérés comme inexistant pour opérer les fusions sur les m traits de diramation effective.
- 2) que la transformation qui dans Π_x réunit chaque pôle x_i au groupe des $(n-1)$ points de diramation impropre, conduit à la fusion des n traits en un trait unique de fils parallèles, car les torsions sont toutes nulles: ce trait s'élimine.
- 3) que la tresse restante est celle de Q_n .

THÉORÈME. - Etant donné la tresse canonique d'une courbe plane C_n d'ordre n , on opère sur elle les opérations P , S et la fusion de traits consécutifs identiques, en passant à une nouvelle tresse avec δ traits représentatifs de noeuds et k de cuspidés; alors sous la condition

$$\delta + 2k < \frac{n(n+3)}{2} - 3$$
, la tresse obtenue représente une courbe Q_n d'ordre n effectivement existante.

CONSÉQUENCE. - Le résultat s'étend aux singularités plus élevées.

3.- Exemples de tresses.

La méthode souvent utilisée est de déduire la tresse de la courbe donnée de la tresse connue d'une forme limite de la courbe; elle a pour base le théorème suivant de Chisini:

A) THÉORÈME. - Si une courbe algébrique $\varphi_\lambda(x, y) = 0$ dépendant d'un paramètre λ admet pour $\lambda = 0$ une forme limite réduite en une partie double θ et une partie simple ψ qui sont tangentes en un point O , la singularité en O de $\varphi_0 = \theta^2 \cdot \psi$ étant la limite exactement de 3 cuspidés de la courbe φ_λ variable (c'est-à-dire que l'abscisse de O est, dans Π_x , la

limite des abscisses de 3 cuspidos et pas d'autres points de diramation), alors le trait relatif à φ_0 est la limite de 3 traits consécutifs qui sont les traits canoniques $(12)^3 (13)^3 (23)^3$.

La démonstration de ce théorème est assez complexe : partant de la courbe de diramation φ_λ d'un plan triple, satisfaisant aux hypothèses du théorème, les développements en séries de Puiseux des coordonnées des 3 cuspidos qui concourent en 0 pour $\lambda = 0$ permettent de déterminer la forme de la tresse :

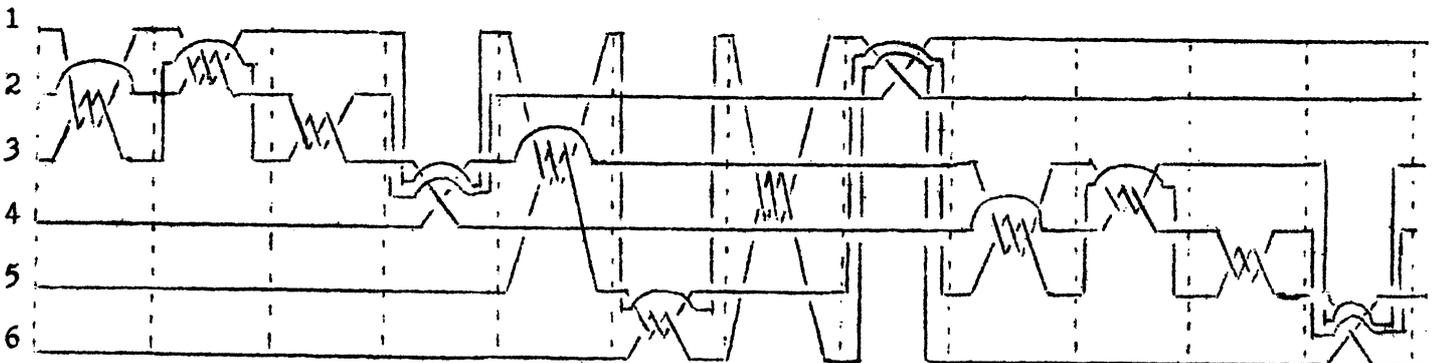
$$T = A (12)^3 A^{-1} (123)^{-2} A (12)^3 A^{-1} (123)^2 (123)^{-4} A (12)^3 A^{-1} (123)^4 .$$

On montre ensuite que A est l'identité, en considérant les torsions des 3 fils 1, 2, 3. On généralise ensuite aux fonctions analytiques puis à un plan multiple en utilisant une transformation ponctuelle régulière analogue à celle de Jonquières du plan projectif complexe qui, pour λ suffisamment petit, réduit la courbe de diramation φ_λ à une quartique tricuspidale au voisinage de 0, ces 2 courbes ayant mêmes points de diramation et lacets au voisinage de 0.

B) EXEMPLE DE LA TRESSE DE C^6 AYANT 9 CUSPIDES (Mme Marchionna)

1°) Une sextique est la courbe réciproque d'une cubique elliptique ; elle dégénère donc en 3 droites doubles. La tresse de C^6 s'obtient à partir de celle de la cubique en doublant les fils qui en chacun des 3 points d'intersection des 3 droites forment 3 couples de torsion 1 et on résout la singularité en 3 cuspidos selon le procédé du théorème précédent.

2°) A partir de la tresse canonique de C^6 , Mme Marchionna obtient la tresse d'une sextique ayant 9 cuspidos par fusion de traits consécutifs de même forme géométrique ou rendus tels par les opérations P et S. Le théorème d'existence de Ghisini justifie le résultat ; la tresse est la suivante :



C) CONSTRUCTION DES TRESSES DES COURBES DE DIRAMATION :

Comme la courbe de diramation φ d'un plan multiple général (dont les points sont essentiels) se déduit par continuité de la courbe $2\bar{\varphi}$ où $\bar{\varphi} = C_1 + \dots + C_{m-1}$ (voir exposé 1), les courbes φ et $2\bar{\varphi}$ ont même tresse.

La tresse de $\bar{\varphi}$ construite, la tresse de φ s'en déduit en doublant les fils de façon que les couples obtenus aient pour torsion 1. Mme Marchionna construit algébriquement la tresse de $\bar{\varphi}$, dégénérée en $(C_1 + \dots + C_{m-1})$ à partir de la 2ème forme canonique de la tresse de la courbe $\bar{\varphi}$ générique, dans laquelle on opère la fusion de certains traits : C_1 étant associé au fil 1, C_2 aux fils $2_1 2_2 \dots C_i$ au fils $i_1 \dots i_i$ etc. la fusion porte sur des couples de traits identiques échangeant des fils i_r et j_s avec $i \neq j$. Si T_i est la 2ème forme canonique de la tresse de C_i , $\bar{\varphi}$ a la forme de tresse suivante, obtenue à partir de la précédente par les opérations P et S :

$$T_{\bar{\varphi}} \begin{array}{l} (1_1 2_1)^2 (1_1 2_2)^2 (1_1 3_1)^2 (1_1 3_2)^2 (1_1 3_3)^2 \dots (1_1 (m-1)_1)^2 \dots (1_1 (m-1)_{m-1})^2 \\ (2_1 3_1)^2 (2_1 3_2)^2 (2_1 3_3)^2 \dots (2_1 (m-1)_1)^2 \dots (2_1 (m-1)_{m-1})^2 \\ \dots \\ ((m-2)_{m-2} (m-1)_1)^2 \dots ((m-2)_{m-2} (m-1)_{m-1})^2 \\ T_2 T_3 \dots T_{m-1} \end{array}$$

Le passage de la tresse $\bar{\varphi}$ à celle de $2\bar{\varphi}$ se fait en doublant chaque fil i_r en i_r, i'_r ($i = 1, \dots, m-1$; $r = 1, \dots, i$) de façon que $(i_r j_s)^2$ donne naissance à l'ensemble des traits.

$$T_{i_r j_s} = (i_r j_s)^2 (i'_r j_s)^2 (i_r j'_s)^2 (i'_r j'_s)^2 (i_r i'_r) (j_s j'_s)$$

qui s'écrit à l'aide des opérations P et S en abrégé :

$$T_{i_r j_s} = (i_r i'_r)^2 (j_s j'_s)^2 \sum_{i_r j_s} (i_r i'_r) (j_s j'_s) = [(i_r i'_r) (j_s j'_s)]^2 (i_r i'_r) (j_s j'_s)$$

où :

$$\sum_{i_r j_s} = [(i'_r j_s) (i_r j'_s) (i'_r j'_s) (i_r j_s) (i'_r j'_s) (i_r j_s)] [(i_r j'_s) (i'_r j_s) (i_r j'_s) (i'_r j_s)] = (i'_r j_s) [(i_r j'_s) (i'_r j_s)] (i'_r j_s) [(i_r j'_s) (i'_r j_s)]$$

Si $j = i + 1$, $T_{i_r j_s} = K_{i_r j_s}$ représente 3 cuspidés et un point de diramation simple ; l'ensemble des cuspidés formés par tous les couples de fils i et $(i + 1)$ sera $K_{i, i+1} = \sum_{r, s} K_{i_r (i+1)_s}$

L'ensemble des traits $N_{i_r j_s} = [(i_r \ i'_r)(j_s \ j'_s)]^2$ agissant sur des couples de fils i et j non consécutifs représente 4 noeuds, N_{ij} sera l'ensemble des quaternes de noeuds formés par tous les fils i et j : $N_{ij} = \sum_{r,s} N_{i_r j_s}$.

Enfin \sum_i représente les quaternes d'échanges formés avec tous les fils i , ensemble de diramations simples $\sum_i = \sum_{r,s} \sum_{i_r j_s}$.

La tresse de $2\bar{\psi}$ s'écrit :

$$\begin{array}{cccc}
 K_{12} & N_{13} & \cdots & N_{1,m-1} \\
 & K_{23} & N_{24} & \cdots & N_{2,m-1} \\
 & & \cdots & & \\
 & & & K_{m-3,m-2} & N_{m-3,m-1} \\
 & & & & K_{m-2,m-1} \\
 & & & & \sum_{m-2} \\
 \sum_2 & \sum_3 & \cdots & \sum_{m-2}
 \end{array}$$

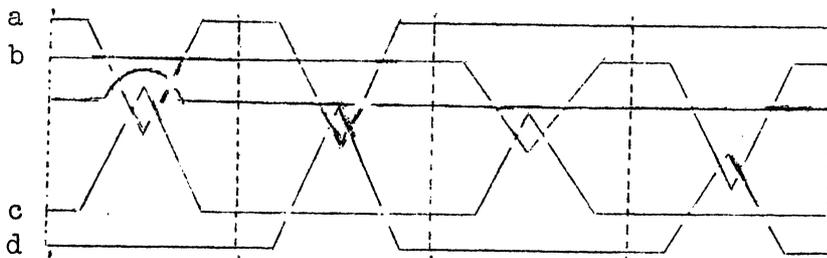
$$[(m-1)_1 (m-1)'_1] \dots [(m-1)_1 (m-1)'_1] \dots [(m-1)_{m-1} (m-1)'_{m-1}] \dots [(m-1)_{m-1} (m-1)'_{m-1}] \sum_{m-1}$$

où dans la dernière ligne, il existe m traits égaux à chaque traits $[(m-1)_i (m-1)'_i]$. La forme de la tresse met en évidence 3 sortes de groupes de 4 traits :

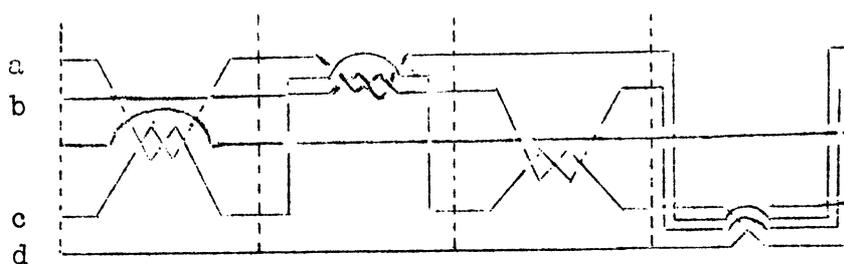
$$K_{i_r (i+1)_s} \quad , \quad N_{i_r j_s} \quad , \quad \sum_{i_r i_s}$$

Nous noterons, pour simplifier a, b, c, d les 4 fils qui interviennent dans ces 3 groupes, bien qu'ils soient différents d'un groupe à l'autre

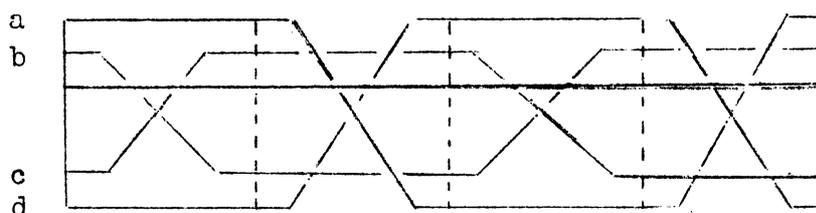
1°) $N(a, b, c, d)$:



2°) $K(a, b, c, d)$:



3°) $\sum (a, b, c, d)$ peut prendre à l'aide des opérations P et S la forme :



Tresse d'un plan multiple simple.

Sachant que la courbe de diramation φ a alors pour forme limite

$\bar{\varphi} = C_h + \dots + C_{h+m-2}$, de façon analogue au cas du plan général, Mme Marchionna donne la forme canonique suivante de la tresse de $2\bar{\varphi}$:

$$\begin{array}{cccc}
 (h_1 \ h'_1)^{h-1} & \dots & (h_h \ h'_h)^{h-1} & \\
 K_{h,h+1} \ N_{h,h+2} & \dots & N_{h,h+m-2} & \\
 & & \dots & \\
 & & & K_{h+m-3, h+m-2} \\
 \sum_h \sum_{h+1} & \dots & \sum_{h+m-3} & \\
 [(h+m-2)_1 (h+m-2)'_1]^{h+m-1} & \dots & [(h+m-2)_{h+m-2} (h+m-2)'_{h+m-2}]^{h+m-1} & \sum_{h+m-2}
 \end{array}$$

En effet ce cas est limite du précédent où la surface F image du plan multiple d'ordre $m+h-1$ acquiert un point h -uple ; dans la tresse relative à la courbe de diramation du plan multiple d'ordre $(m+h-1)$, il suffit de supprimer les fils correspondants aux $(h-1)$ premières courbes C_j ; la 1ère ligne de la tresse obtenue correspond aux échanges $(h_j \ h'_j)$ provenant de la suppression des fils $(h-1)_j$ et $(h-1)'_j$ ($j = 1, \dots, h-1$).

4.- Applications des tresses algébriques au problème des plans multiples.

Etant donné la tresse d'une courbe φ de diramation d'un plan multiple général ou simple, à chaque détermination $y_i(x)$ est lié une substitution sur 2 déterminations de $z(xy)$. Le théorème de Chisini indique que les substitutions $(z_r z_s)$ liées aux fils des composantes $C_1 \dots C_{m-1}$ sont respectivement $(z_1 z_2) \dots (z_{m-1} z_m)$; si à la tresse de 2φ égale à celle de φ on adjoint ainsi les échanges $(z_r z_s)$, on vérifie que les conditions d'invariance d'Enriques sont satisfaites pour chaque ensemble de traits K , N et Σ . On définit ainsi un plan m -uplo de courbe de diramation φ ; ce plan est unique, s'il est d'ordre supérieur à 4; la démonstration de cette unicité revient à celle de la possibilité d'assigner aux fils de la tresse un ensemble de substitutions $(z_r z_s)$ qui engendre un groupe imprimitif et transitif satisfaisant aux conditions d'invariance d'Enriques, lesquelles dépendent du groupe G fondamental (ou de Poincaré) de la courbe φ (puisque la surface image est supposée sans courbe double): ce groupe est appelé groupe Γ de monodromie de $z(xy)$. La lecture de la tresse permet de le déterminer: le plan Π_y étant parallèle aux plans des diaphragmes, les points d'intersection de la tresse avec Π_y variable définissent les centres d'un système de lacets joignant ces points au point de l'infini sur y lacets qui déterminent les échanges $|z_r z_s|$.

En appelant du même nom le fil et le lacet associé, on obtient les relations génératrices de G , qui doivent être satisfaites par Γ quand on substitue à chaque lacet générateur la substitution relative sur les branches de $z(xy)$.

Les conditions d'Enriques donnent immédiatement les relations génératrices suivantes: 1°) le produit des lacets est l'identité.

2°) les lacets a et b étant associés à un point de diramation simple à un noeud ou à un cuspide

$$a = b, \quad ab = ba, \quad aba = bab.$$

les échanges sont respectivement égaux, disjoints, enchainés.

3°) la forme $K(a b c d)$:

$$\begin{aligned} aca &= cac \\ a(c^{-1}bc)a &= c^{-1}bc)a(c^{-1}bc) \end{aligned}$$

$$bcb = cbc$$

$$abcb^{-1}a^{-1} = d$$

Les échanges associés aux lacets sont liés par les relations:

$$(ac)^3 = 1 \quad (cbca)^3 = 1 \quad (bc)^3 = 1 \quad abcba = d$$

a est enchainé avec c et cbc ; c avec b et a , sans égalité possible;

les 2 seuls types d'échanges sont donc au nombre de :

	a	b	c	d
	12	12	13	13
ou	12	34	13	24

c'est-à-dire aux 2 composantes C_i et C_{i+1} qui donnent l'ensemble $K(a b c d)$ sont liés les 2 substitutions $S_1 = ab$ $S_2 = cd$ (abcd précédentes).

4°) la forme $N(a b c d)$

$$ac = ca$$

$$ad = da$$

$$bd = db$$

$$bc = cb$$

Si a et b appartiennent aux fils i , c et d aux fils j , i et j non consécutifs, les échanges relatifs à a et b agissent sur des déterminations toutes différentes de celles sur lesquelles agissent c et d : aux composantes $C_i C_j$ sont liées des couples de substitutions $S_i S_j$ qui opèrent sur des éléments respectivement différents.

5°) la forme $\sum (a b c d)$

$$\left| \begin{array}{l} b = c \\ d = b^{-1}ab \\ b = c \\ d = b^{-1}ab \end{array} \right.$$

les échanges sont liés par $b = c$; $d = a$

les échanges sont égaux tous les 4 ou par couples :

a	b	c	d
12	12	12	12
12	34	34	12

Ces conditions interprétées sur la tresse $2\bar{\varphi}$ conduisent au même groupe de monodromie ; c'est-à-dire, à tous les fils d'une composante C_i est liée un même échange $z_i z_{i+1}$ dès que l'ordre du plan est supérieur à 4. Pour $m > 4$, la tresse de la courbe φ suffit à représenter un plan multiple et toute la famille des surfaces qui lui sont birationnellement équivalentes.

THÉORÈME. - Etant donné la tresse d' une courbe de diramation φ satisfaisant aux conditions du théorème de Chisini, il existe un plan multiple et un seul dont φ est la courbe de diramation, dès que l'ordre de multiplicité est supérieur à 4.

(il est défini par le théorème de Chisini).

Ce théorème n'est plus exact si le plan est d'ordre inférieur ou égal à 4 ; un contre-exemple est donné par la tresse de la sextique ayant 9 cuspidos ; par lecture sur la tresse les relations génératrices du groupe G sont :

- (1) $aca = cac$; (2) $a(c^{-1}bc)a = (c^{-1}bc)a(c^{-1}bc)$; (3) $bc b = cbc$;
 (4) $abcb^{-1}a^{-1} = d$; (5) $cae = aea$; (6) $(aea^{-1})f(aea^{-1}) = f(aea^{-1})f$;
 (7) $afa = faf$; (8) $f^{-1}c^{-1}bef = a$; (9) $cec = ecc$;
 (10) $c(e^{-1}dc)c = (e^{-1}dc)c(e^{-1}dc)$; (11) $dod = ede$; (12) $cded^{-1}c^{-1} = f$;
 (13) $abcdef = 1$.

Les substitutions associées vérifient :

$$\begin{array}{l} (ac)^3 = (bc)^3 = (ae)^3 = (af)^3 = (ce)^3 = (de)^3 = 1 . \\ (cbca)^3 = 1 ; (faca)^3 = 1 ; (edec)^3 = 1 . \\ dabcba = 1 \quad afebef = 1 \quad fededc = 1 \quad abcdef = 1 . \end{array}$$

(les deux premières lignes traduisent l'enchaînement des échanges en 2 groupes).
 on en déduit que cette sextique est de diramation pour

1°) un plan triple :

$$a = b = (z_1 z_2) \quad c = d = (z_1 z_3) \quad e = f = (z_2 z_3)$$

2°) 3 plans quadruples :

a	b	c	d	e	f
14	14	12	12	13	13
14	23	12	34	13	24
14	23	12	34	24	13

D'autre part Mme Marchionna et Mr Dedo ont montré de façon analogue que :

1°) une sextique ayant 6 cuspidos et 4 noeuds est de diramation pour 1 plan triple et 1 plan quadruple.

2°) une sextique ayant 6 cuspidos est de diramation pour 1 plan triple seulement.

De façon générale, si φ est de diramation pour un plan triple et si celui-ci représente une surface dont les sections par les plans contenant Z ont le genre p , φ est d'ordre $(2p + 4)$ et les échanges liés aux lacets dans Π_y (et aux fils de la tresse) peuvent être donnés par la forme de Luröth Clebsch
 (12) (12) $\underbrace{(23) \dots (23)}_{2p+2}$; comme sur un même fil de φ , les échanges liés au

plan triple et au plan quadruple sont égaux ou enchainés, la seule distribution pour le plan quadruple est :

$$(14) (14) (13) \underbrace{(13) \dots (13)}_{\text{nombre impair}} \underbrace{(24) \dots (24)}_{\text{nombre pair}},$$

Le nombre de plans quadruples ayant même courbe de diramation qu'un plan triple est 2^{2p-1} (car il existe au moins un échange (24) pour l'irréductibilité du plan multiple).

5.- Autres applications.

1°) Recherche des surfaces d'un ordre donné privées de courbe double et ayant un nombre élevé de points doubles.

Les points doubles isolés d'une surface F' donnent des points doubles essentiels de la courbe de diramation φ' et réciproquement. D'après les résultats de Mr B. Seyre, si φ , courbe de diramation d'un plan m -uple représentatif d'une surface F^n d'ordre $n \geq m$, varie dans un système continu en gardant les types et le nombre des singularités essentielles, alors φ reste courbe de diramation d'un plan m -uple représentatif d'une surface d'ordre n . D'après le théorème d'existence de Chisini, il est possible en opérant sur les parties $\sum_i i_r i_s$ de la tresse de faire acquérir à φ de nouveaux points doubles auxquels correspondent sur la surface F d'ordre n des points doubles isolés. Mme Marchionna retrouve la surface de Togliatti du 5e ordre ayant 31 points doubles, à partir de la tresse de la courbe de diramation d'un plan simple représentatif de la surface F^5 projetée à partir de son point double Z (les calculs à l'aide des opérations P et S sont assez longs).

2°) Cycles indépendants et irrégularité d'une surface F .

Lefschetz a montré que le double de l'irrégularité d'une surface est égal au nombre r de cycles linéaires indépendants (indice de connexion linéaire) sur une riemannienne. Zariski a démontré que tout cycle linéaire de F est homologue (mod F) à un cycle d'une section plane générique de F ; il peut exister des cycles homologues à zéro sur F correspondant à des cycles δ_i non homologues à zéro de la section plane f : ils sont obtenus pour les positions du plan d'un faisceau contenant f qui sont tangentes à F ou passent par des points doubles de F . Le plan $x = 0$ représente la direction des sections, un cycle est un produit L de lacets de \prod_y ayant pour centre les déterminations y_i (racines de $\varphi(0, y) = 0$), c'est-à-dire les intersections des fils de la tresse de

avec \prod_y et, ayant pour origine le point à l'infini sur y'' ; les cycles δ_i correspondent sur la tresse aux contacts, aux noeuds et cuspides inessentiels.

Si p est le genre de la section plane f , $\gamma_1 \dots \gamma_{2p}$, un système de $2p$ cycles indépendants de f , est formé de cycles représentés sur \prod_y par

$\gamma_h = f_h f_{h+1}$ $h = 1, \dots, 2p$ où f_h est un lacet relatif à la forme de Luröth Clebsch du groupe de monodromie de f , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (2p + 2) \text{ lacets } f_1 \dots f_{2p+2} & \text{ relatifs à } (z_1 z_2) \\ 2 \text{ lacets } f_{2p+3} \quad f_{2p+4} & \text{ relatifs à } (z_2 z_3) \\ 2 \text{ lacets } f_{2p+5} \quad f_{2p+6} & \text{ relatifs à } (z_3 z_4) \text{ etc...} \end{aligned}$$

(on peut toujours par les opérations P et S se ramener à cette forme) ; la matrice $\|[\gamma_i \delta_k]\|$ formée par les indices de Kronecker a pour caractéristique $\rho = 2p - r$. L'irrégularité de F est donc $q = p - \frac{r}{2}$. Par exemple pour la C^6 ayant 9 cuspides et relative au plan triple, f est de genre 1 ; γ_1 et γ_2 sont par exemple les lacets entourant les intersections des fils 12 et des fils 246.

$$\gamma_1 = f_1 f_2 \quad \gamma_2 = f_4 f_5 f_6$$

les cycles δ_i correspondent aux contacts :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (f_1 f_2) f_3 (f_1 f_2)^{-1} f_4 \\ \delta_2 &= f_1 (f_5 f_6)^{-1} f_2 (f_5 f_6) \\ \delta_3 &= (f_3 f_4) f_5 (f_3 f_4)^{-1} f_6 \end{aligned}$$

$[\gamma_i \delta_k]$ sont combinaisons des indices $[f_r f_s]$ on trouve ici une caractéristique nulle donc $q = 1$.

3°) Problèmes connexes.

Mr Marchionna montre, par la recherche effective du groupe fondamental G et à l'aide de la tresse de φ que sur un plan m -uple général et sur la famille de surfaces F_m birationnellement équivalentes, il n'est pas possible de trouver une fonction algébrique, irréductible à $\mu > 1$ valeurs, des points de F , $u(x y z)$ privée de courbe de diramation.

En effet le plan multiple associé $w(x y)$ a $m\mu$ valeurs et l'unique solution définie par les relations génératrices de G n'est pas transitif (cette impossibilité résulte du nombre trop élevé de traits du type \sum) aussi par fusion de traits les relations du type $a = b$ se transforment en relations plus

faibles. Mr Marchionna énonce des propriétés intéressantes en particulier

THÉORÈME.— Il existe des surfaces F d'ordre $m > 2$ dotées de δ points doubles avec

$$\begin{aligned}\delta &= m^2 - 2m && \text{si } m \text{ pair} \\ &= (m - 1)^2 && \text{si } m \text{ impair}\end{aligned}$$

sur lesquelles il est possible de déterminer une fonction irréductible à 2 valeurs, privée de courbes de diramation.

BIBLIOGRAPHIE

- E. ARTIN. - Theory of braids (Annals of Math. t. 60, 1947, p. 101-126).
- O. CHISINI. - Un teorema di esistenza dei piani multipli (Rendiconti Accad. Lincei, t. 19, 1934, p. 688-693 et p. 766-772).
- O. CHISINI. - Sulla curva di diramazione dei piani multipli (Rendiconti Accad. Lincei, t. 23, 1936, p. 22-27).
- O. CHISINI. - Un più generale teorema di esistenza dei piani multipli (Rendiconti Accad. Lincei, t. 27, 1938, p. 535-537).
- O. CHISINI. - Altre curve di diramazione dei piani n-upli (Rendiconti Accad. Lincei, t. 29, 1939, p. 460-466).
- O. CHISINI. - Una suggestiva rappresentazione reale per le curve algebriche piane (Rendiconti Istituto Lombardo, t. 66, 1933, p. 1141).
- O. CHISINI. - Forme canoniche per il fascio caratteristico rappresentativo di una curva algebrica piana (Rendiconti Istituto Lombardo, t. 70, 1937, p. 49-61).
- O. CHISINI. - Sull' identità birazionale di due funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione (Rendiconti Istituto Lombardo, t. 77, 1944, p. 339-356).
- O. CHISINI. - Sull' identità birazionale di due funzioni algebriche di più variabili dotate di una medesima varietà di diramazione (Rendiconti Istituto Lombardo, t. 79, 1947).
- O. CHISINI. - Dimostrazione delle condizioni caratteristiche perchè una curva sia di diramazione di un piano quadruplo (Annali di Matematica, t. 28, 1949).
- O. CHISINI. - Sulla costruzione a priori delle trecce caratteristiche (Annali di Matematica serie 4, t. 33, 1952, p. 353-366).
- O. CHISINI. - Il teorema d'esistenza delle trecce algebriche (Rendiconti Accad. Lincei, serie 8, t. 17, 1954, Notes I et II ; t. 18, 1955, Note III).
- M. DEDO. - Algebra delle trecce caratteristiche relazioni fondamentali e loro applicazione (Rendiconti Istituto Lombardo, t. 83, 1950, p. 227-258).
- F. ENRIQUES. - Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione (Annali di Matematica pura e appl., 1923, p. 185-198).
- F. ENRIQUES. - Le superficie algebriche (Zanichelli, 1949).
- C.F. MANARA. - Sulla curve di diramazione dei piani multipli (Rendiconti Istituto Lombardo, t. 82, 1949).
- C.F. MANARA. - Sulla caratterizzazione delle ipersurface di diramazione degli S_n tripli (Rendiconti Istituto Lombardo, t. 82, 1949).
- L. GODEAUX. - Mémoire sur les surfaces multiples. Académie Royale de Belgique t. 27, 1952.
- E. MARCHIONNA. - Condizioni caratteristiche perchè una curva sia di diramazione per un piano multiplo (Rendiconti Istituto Lombardo, t. 83, 1950).

- E. MARCHIONNA. - Una nuova caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli (Rendiconti Accad. Lincei, serie 8, t. 11, 1951, p. 170-177).
- E. MARCHIONNA. - Estensione di un teorema d'Halphen (Rendiconti Istituto Lombardo, t. 83, 1950).
- E. MARCHIONNA. - Sul gruppo fondamentale di una curva algebrica. Applicazioni alle superficie multiple prive di curva diramante (Annali di Matematica, serie 4, t. 41, 1956).
- G. POMPILJ. - Sulla rappresentazione algebrica dei piani multipli (Rendiconti Istituto Lombardo, t. 78, 1946).
- G. POMPILJ. - Per la caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani quadrupli (Rendiconti Istituto Lombardo, t. 81, 1948).
- B. SEGRE. - Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli generali (Memorie Accad. d'Italia, Vol. I n° 4, 1930).
- B. SEGRE. - Nuovi contributi alla geometriaa sulle varietà algebriche (Memorie Accad. d'Italia, 1934).
- F. SEVERI. - Le varietà diramate (Memorias de Matematica del Instituto Jorge Juan, Madrid, 1946).
- C. TIBILETTI. - Costruzioni a priori della sestica con nove cuspidi (Rendiconti Istituto Lombardo, t. 85, 1952, p. 207-220).
- C. TIBILETTI. - Piani tripli e piani quadrupli quadrupli con la stessa curva di diramazione (Rendiconti Accad. Lincei, serie 8, t. 12, 1952, p. 537-543).
- C. TIBILETTI. - Sostituzioni legate ad una curva di diramazione che possa degenerare in parti doppie (Annali di Matematica, serie 4, t. 37, 1954, p. 333-346).
- C. TIBILETTI. - Complementi all' algebra delle trecce caratteristiche e loro applicazione (Rendiconti Istituto Lombardo, t. 85, 1952, p. 249-259).
- C. MARCHIONNA-TIBILETTI. - Trecce relative a forme canoniche del gruppo di monodromia (Rendiconti Istituto Lombardo, t. 88, 1955).
- C. MARCHIONNA-TIBILETTI. - Trecce algebriche di curve di diramazione : costruzioni e applicazioni (Rendiconti Sem. mat. Univ. Padova, t. 24, 1955).
- C. MARCHIONNA-TIBILETTI. - La irregolarità di un piano multiplo dedotta dalla treccia diramante (Rendiconti Accad. Lincei, serie 8, t. 18, 1955, p. 480-486).
- E. VAN KAMPEN. - On the fundamental group of an algebraic curve (American Journal of Math., t. 55, 1933).
- G. ZAPPA. - Sul gruppo fondamentale delle curve di diramazione delle superficie algebriche suscettibili di spezzarsi in sistemi di piani (Annali di Matematica, serie 4, t. 24, 1945).
- O. ZARISKI. - On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve (American Journal of Math., t. 51, 1929).
- O. ZARISKI. - A theorem on the Poincaré group of an algebraic hypersurface (Annals of Math., t. 38, 1937).
-