Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

JULIEN PETRESCO

Relations fondamentales définissant les groupes libres

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. n° 2, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A2_0>

RELATIONS FONDAMENTALES DÉFINISSANT LES GROUPES LIBRES.

(Exposé par Julien PETRESCO, le 19.11.1956)

La représentation d'un groupe G en tant que groupe quotient F/N du groupe libre F de rang m, n'est évidemment pas unique. Nous montrons dans ce qui suit que, G étant lui-même un groupe libre, on peut construire tous les sous-groupes normaux N satisfaisant à

$$\text{(a)} \qquad G \simeq F/N \ .$$

S'il s'agit en particulier de représenter G, libre, avec une seule relation fondamentale, on peut donner la forme générale de toutes ces relations.

Le fait que N ne caractérise pas le groupe G, conduit à la recherche d'autres sous-groupes de F pouvant être rattachés univoquement à G. B.H. Neumann [2] considère par exemple le groupe $V_m(G)$ des <u>relations identiques</u> (fonctions de m variables prenant la valeur 1, pour toute suite de m éléments de G). Ce groupe est, dans F, l'intersection de tous les sous-groupes normaux S tels que F/S soit isomorphe à un sous-groupe de G. $V_m(G)$ est un sous-groupe complètement invariant et on montre également qu'il est, pour chaque représentation (a), le sous-groupe maximum de cette espèce à être contenu par N.

Plus récemment, B.H. Neumann et Hanna Neumann [3] considèrent le groupe $U_m(G)$, intersection de tous les N satisfaisant à (a). Il correspond dans G à ce qu'on pourrait appeler l'ensemble des <u>relations identiques entre générateurs</u> (fonctions de m variables prenant la valeur 1, pour toute suite de m <u>générateurs</u> de G). Il semble qu'un certain parallélisme puisse être établi avec le groupe $V_m(G)$; $U_m(G)$ est un sous-groupe super-caractéristique (nous exposons les quelques propriétés se rattachant à cette notion) et on peut raisonablement conjecturer que $U_m(G)$ est maximum de cette espèce à être contenu par N.

Le fait de connaître les sous-groupes N, dans le cas de G libre, laisse espérer un calcul simple de $U_m(G)$; il en est ainsi pour G cyclique infini, $U_m(G)$ se réduisant au sous-groupe commutateur de F. Dans le cas de G libre de rang $n < m$, on peut ramener le calcul à l'intersection des agrégats commutateurs d'indice $m-n$ (voir [4]) relatifs à chaque décomposition en produit libre de groupes cycliques infinis de F.

1.- Représentation des groupes libres.

Soit $G = [[A]]$, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ le groupe libre de rang n. On peut également définir ce groupe avec une m-suite $A_m = \{a_1, \dots, a_n, \dots, a_m\}$ $n \leqslant m$, de générateurs et la m-n-suite de relations fondamentales :

$$(0) \qquad a_{n+1} = 1 \, , \, \dots \, , \, a_m = 1$$

D'après la proposition 8.5 de [5].

(A). Si X_m et Y_m sont deux m-suites de générateurs de G, il existe une transformation ψ du groupe de Nielsen $\mathfrak{N}_m(G)$ telle que

$$Y_m = \psi X_m$$

D'autre part, d'après la proposition 2.2 de [6], on a pour tout groupe G :

(B). Si X_m est une m-suite de générateurs de G, si

$$R_t(x_i) = 1 \, , \quad t = 1, 2, \dots$$

est une suite de relations fondamentales entre les éléments de X_m et si $Y_m = \psi X_m$, où $\psi \in \mathfrak{N}_m(G)$,

$$R_t(\psi^{-1} y_i) = 1 \, , \; t = 1, 2, \dots$$

constitue un système de relations fondamentales entre les éléments de Y_m.

On peut montrer facilement à l'aide de ces deux propositions que :

1.1.- Toute m-suite X_m de générateurs du groupe libre G de rang n admet un système de relations fondamentales de la forme

$$(1) \qquad \psi x_{n+1} = 1 \, , \, \dots \, , \, \psi x_m = 1 \, ,$$

où $\psi \in \mathfrak{N}_m(G)$, et dans ce cas

$$(1') \qquad \psi x_1 \, , \, \dots \, , \, \psi x_n$$

constitue une base libre de G.

Soit en effet un groupe $G = [X_m]$ défini par les relations (1). D'après les propriétés du groupe de Nielsen [5], si $Y_m = \psi X_m$, on a $G = [Y_m]$ et d'après (B) appliquée à (1)

$$\psi(\psi^{-1}y_{m+1}) = 1 \ , \ \dots \ , \psi(\psi^{-1}y_m) = 1$$

ou encore

$$y_{m+1} = 1 \ , \ \dots \ , \ y_m = 1$$

constitue un système de relations fondamentales pour Y_m , donc $G = [[y_1 \ , \ \dots \ , \ y_m]]$.

Réciproquement, soit G un groupe libre de rang n , défini avec la suite A_m et les relations (0) . Une m-suite de générateurs de G est, d'après (A) , et du fait que $\mathfrak{M}_m(G)$ est un groupe, de la forme $X_m = \psi^{-1}A_m$, donc, d'après (B) appliquée à (0)

$$\psi x_{n+1} = 1 \ , \ \dots \ , \psi x_m = 1$$

constitue un système de relations fondamentales pour X_m .

Si l'on tient compte du théorème de Magnus [1] : _si_ $G = [X_m]$ _est défini par une seule relation_ $R(x_i) = 1$, _toute relation fondamentale entre les éléments de_ X_m _est de la forme_ $v(x_i).R(x_i).v^{-1}(x_i) = 1$; $v(x_i)$ étant des mots quelconques formés avec les éléments de X_m , on déduit en particulier de 1.1 :

COROLLAIRE.- Pour qu'une relation entre m _variables_ X_m _définisse un groupe libre, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme_

$$v(x_i) \, . \, \psi x_m \, . \, v^{-1}(x_i) = 1$$

et il s'agit alors du groupe libre de rang $m - 1$.

D'autre part, on peut, en faisant intervenir le théorème de Dyck, exprimer 1.1 comme suit :

1.1'.- _Si_ $F = [[X_m]]$ _est le groupe libre de rang_ m _et_ N _un sous-groupe normal de_ F , _la condition nécessaire et suffisante pour que_ F/N _soit le groupe libre de rang_ $n \leqslant m$ _est que_ N _soit engendré en tant que sous-groupe normal, par_ $m - n$ _éléments de la forme_

$$\psi x_{n+1} \ , \ \dots \ , \psi x_m$$

_où_ $\psi \in \mathfrak{M}_m(F)$, _autrement dit par_ $m - n$ _éléments d'une base libre de_ F .

1.2.- _Si_ X_m _est un système minimal de générateurs d'un groupe quelconque_ G , _on a_

$$\psi x_i \neq 1$$

pour tout $\psi \in \mathfrak{M}_m(G)$.

Considérons le groupe libre $F[[X_m]]$ et le sous-groupe normal N tel que $F/N \simeq G$ et soit $N(\psi x_i)$ le sous-groupe normal engendré par ψx_i dans F ; d'après 1.1' , $F/N(\psi x_i)$ est un groupe libre de rang $m-1$. Si maintenant $\psi x_i \in N$, donc $N(\psi x_i) \subseteq N$,

$$G \simeq F/N \simeq F/N(\psi x_i) \big/ N/N(\psi x_i)$$

ce qui montre l'existence d'un système de $m-1$ générateurs pour G .

1.3.- <u>Tout sous-groupe normal</u> N <u>du groupe libre</u> $F = [[X_m]]$ <u>tel que</u> F/N <u>soit groupe libre est isomorphe au groupe libre de rang infini</u>.

D'après 1.1' , N est engendré par $m-n$ éléments d'une base libre de F et par conséquent isomorphe au sous-groupe normal $N(x_{m+1}, \dots, x_n)$ engendré par $x_{n+1}, \dots, x_m$ dans F . Celui-ci est évidemment engendré par les conjugués des éléments $x_i^{\pm 1}$, $i = n+1, \dots, m$ qui peuvent se mettre sous la forme

$$v_1r_1v_2r_2 \dots r_{k-1}v_k \cdot x_i^{\pm 1}(v_1r_1 \dots r_{k-1}v_k)^{-1} = (v_1r_1v_1^{-1})(v_1v_2r_2v_2^{-1}v_1^{-1}) \dots$$
$$\dots(v_1 \dots v_{k-1}r_{k-1}v_{k-1}^{-1} \dots v_1^{-1})(v_1 \dots v_kx_i^{\pm 1}v_k^{-1} \dots v_1^{-1})(v_1 \dots v_{k-1}r_{k-1}^{-1}v_{k-1}^{-1} \dots v_1^{-1})$$
$$\dots(v_1r_1^{-1}v_1^{-1})$$

où $v_j \in [[x_1, \dots, x_n]]$ et $r_j \in \{x_{n+1}^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}\}$.

On conclut que l'ensemble des éléments de la forme

$$(2) \qquad vx_iv^{-1} \quad ; \quad i = n+1, \dots, m \quad ; \quad v \in [[x_1, \dots, x_n]]$$

constitue un système de générateurs de $N(x_{n+1}, \dots, x_m)$.

Soit maintenant $\bar{R} = r_1r_2 \dots r_h = 1$ une relation irréductible avec $h \geqslant 3$ entre les éléments de (2) . Notons $r_j = v_jx_{i_j}^{\pm 1}v_j^{-1}$; le remplacement dans R , conduit à une identité $\bar{R}^* = 1$ entre les éléments de $X_m \cup X_m^{-1}$; soit ρ la segmentation concordante et unitaire qu'admet dans ce cas R^* . Puisque $\{x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\} \cap \{x_{n+1}^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}\} = 0$, on a nécessairement $S\rho(x_{i_j}^{\pm 1}) = S(x_{i_j}^{\pm 1}x_{i_k}^{\pm 1})$ et on peut supposer $j \neq 1, h$ ainsi que $j < k$. On a dans ces conditions

$$\bar{S}(r_jr_k) = v_j\,\bar{S}(x_{i_j}^{\pm 1}x_{i_k}^{\pm 1})\,v_k^{-1} = v_jv_k^{-1} \in [[x_1, \dots, x_n]]$$

et puisque $[[x_1, \dots, x_n]] \cap N(x_{n+1}, \dots, x_m) = 1$,

$$\bar{S}(r_j r_k) = 1$$

ce qui est contradictoire.

On déduit que (2) est de plus un système libre.

2.- Sous-groupes super-caractéristiques.

Le sous-groupe normal N du groupe G est dit super-caractéristique si pour tout sous-groupe normal K de G

$$(3) \qquad G/K \simeq G/N \Longrightarrow K \supseteq N \quad ;$$

N est dit ultra-caractéristique si, plus strictement,

$$(3') \qquad G/K \simeq G/N \Longrightarrow K = N \quad .$$

Appelons d'autre part, d'après R. Baer, Q-groupe, un groupe dont les groupes quotients propres ne lui sont jamais isomorphes ; tel est le cas par exemple des groupes libres de rang fini.

2.1.- Pour que le sous-groupe super-caractéristique N soit ultra-caractéristique, il faut et il suffit que G/N soit un Q-groupe.

Si G/N n'est pas Q-groupe il existe $K \supset N$, normal, et tel que

$$G/N \simeq G/N \big/ K/N = G/K$$

et réciproquement, s'il existe $K \supset N$ avec $G/N \simeq G/K$,

$$G/N \simeq G/N \big/ K/N \quad .$$

2.2.- Un sous-groupe N super-caractéristique est caractéristique.

Si φ est un automorphisme de G, on déduit de $\varphi G = G$

$$G/\varphi N \simeq \varphi G/\varphi N \simeq G/N$$

donc d'après (3)

$$\varphi N \supseteq N$$

et de façon analogue

$$\varphi^{-1} N \supseteq N$$

ou encore en appliquant φ

$$N \supseteq \varphi N \; .$$

2.3.- L'intersection d'un ensemble de sous-groupes super-caractéristiques ou ultra-caractéristiques est un sous-groupe de même nature.

Soit Σ un ensemble d'indices. Si les sous-groupes N_σ, $\sigma \in \Sigma$ sont super-caractéristiques, d'après 2.2 ,

$$N = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} N_\sigma$$

est un sous-groupe normal. Considérons K tel que

$$G/K \simeq G/N$$

A chaque N_σ/N correspond dans cet isomorphisme un K_σ/K tel que

$$G/K_\sigma \simeq G/K \Big/ K_\sigma/K \simeq G/N \Big/ N_\sigma/N \simeq G/N_\sigma$$

donc d'après (3)

$$K_\sigma \supseteq N_\sigma$$

et d'autre part ce même isomorphisme entraîne

$$K = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} K_\sigma$$

de sorte que

$$K \supseteq N .$$

Le cas des sous-groupes ultra-caractéristiques est analogue (on remplace $\supseteq$ par $=$) .

2.4.- <u>Soit</u> $\{N_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ <u>l'ensemble des sous-groupes normaux de</u> G <u>dont les groupes quotients sont isomorphes à un certain groupe</u> G_0 :

$$G/N_\sigma \simeq G_0 \quad ;$$

$N = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} N_\sigma$ <u>est un sous-groupe super-caractéristique.</u>

Soit en effet K tel que

$$G/K \simeq G/N .$$

Considérons comme dans la démonstration de 2.3 les K_σ/K correspondant biunivoquement aux N_σ/N ; on a

$$K = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} K_\sigma$$

et

$$G/K_\sigma \simeq G/H_\sigma \simeq G_0 \quad ,$$

d'où, d'après l'hypothèse, $K_\sigma = H_\tau$ pour un certain $\tau \in \Sigma$ et par conséquent

$$K \supseteq N .$$

On voit de plus que : <u>si</u> Σ <u>est fini</u> N <u>est ultra-caractéristique</u>.

Considérons maintenant $F \leq [[X_m]]$, un groupe libre G de rang $n \leq m$ et l'intersection $U_m(G)$ des sous-groupes normaux N de F satisfaisant à

$$\text{(a)} \qquad G = F/N$$

Si R est un produit d'éléments de $X_m \cup X_m^{-1}$, notons $R(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ le produit obtenu de R en supprimant les éléments qui sont de la forme $x_{i_1}^{\pm 1}, \dots, x_{i_k}^{\pm 1}$.

Considérons d'autre part l'ensemble $\sum$ des décompositions

$$(\sigma) \qquad F = [y_1] * [y_2] * \dots * [y_m]$$

de F en produits libres de groupes cycliques infinis et soit 0_σ^ν l'<u>agrégat commutateur</u> d'indice ν relatif à (σ) , c'est-à-dire la réunion de toutes les formes commutatrices ou figurent au moins $\nu + 1$ groupes $[y_i]$.

2.5.- <u>Si</u> G <u>est libre de rang</u> n , <u>on a</u> $U_m(G) = \bigcap_{\sigma \in \sum} 0_\sigma^n$

D'après 1.1' , tout sous-groupe normal $N(y_{i_1}, \dots, y_{i_{m-n}})$ satisfait à (a) ; d'autre part ses éléments sont les produits R avec $R(y_{i_1}, \dots, y_{i_{m-n}}) = 1$. L'intersection de ces sous-groupes normaux est l'ensemble des R avec $R(y_{i_1}, \dots, y_{i_{m-n}}) = 1$ pour tout ensemble $\{y_{i_1}, \dots, y_{i_{m-n}}\}$ de $m-n$ éléments de Y_m , ce qui dans le cas des groupes libres entraîne la même propriété pour tout ensemble de plus de $m-n$ éléments. On conclut, d'après la proposition 5.1 de [4] que

$$\bigcap N(y_{i_1}, \dots, y_{i_{m-n}}) = 0_\sigma^n$$

et si l'on fait intervenir 1.1' , on obtient 2.5.

On voit facilement que l'ensemble des R avec $R(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) = 1$ pour tout y_i est le sous-groupe commutateur C de F , c'est-à-dire que $0_\sigma^1 = C$ et par conséquent $\bigcap_{\sigma \in \sum} 0_\sigma^1 = C$, d'où :

<u>Si</u> G <u>est cyclique infini</u> , $U_m(G) = C$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] W. MAGNUS : Uber diskontinuierliche Gruppen mit einer definirenden Relation, J. reine angew. Math., 163 (1930), p. 141-165.

[2] B.H. NEUMANN: Identical relations in groups. I. Math. Ann., 114 (1937), p. 506-525.

[3] B.H. NEUMANN et Hanna NEUMANN : Zwei Klassen charakteristischer Untergruppen und ihre Faktorgruppen, Math. Nachr., 4 (1951), p. 106-125.

[4] J. PETRESCO : Sur les commutateurs, Math. Z., 61 (1954), p. 348-356.

[5] J. PETRESCO : Sur les groupes libres, Bull. Sc. Math., 80 (1956), p. 6-33.

[6] J. PETRESCO : Systèmes minimaux de relations fondamentales dans les groupes de rang fini, Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT, 1955/56, exposé n° 1.