O. Zariski

Le problème des modèles minimum pour les surfaces algébriques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. nº 24, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A22_0>

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1956/57

-:-:-:-

Exposé n° 24

LE PROBLÈME DES MODÈLES MINIMUM POUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES

(Exposés de O. ZARISKI, les 28 et 29 mai 1957)

1.- Introduction.

Il y a un certain nombre de critères pour qu'une surface algébrique soit birationnellement équivalente à une surface réglée, et, en particulier, à une surface rationnelle. Tous ces critères étaient connus des géomètres italiens dans le cas où le corps des constantes est le corps des nombres complexes. Il est possible maintenant de donner des démonstrations rigoureuses de presque tous ces critères dans le cas d'un corps de base k algébriquement clos et de caractéristique $p > 0$. J'ai présenté de telles démonstrations dans un cours à l'Université de Kyoto. Parmi ces critères, il y a un théorème de Castelnuovo qui est le suivant : si $p_a = P_2 = 0$, la surface est rationnelle. J'ai appris de M. SERRE que KODAIRA a donné aussi une démonstration de ce théorème dans un cours à Princeton. La démonstration de Kodaira est très semblable à la mienne, elle est, dans un cas, plus simple, mais par contre, elle n'établit pas complètement le théorème de Castelnuovo dans le cas d'une caractéristique $p > 0$. Vous pourrez trouver des renseignements sur la démonstration de Kodaira dans l'exposé fait par M. SERRE au Séminaire Bourbaki de février 1957. Je reviendrai dans ma deuxième conférence sur le théorème de Castelnuovo, parce que ce théorème doit être utilisé dans la solution du problème des modèles minimum. Cette solution donne un autre critère pour qu'une surface algébrique soit birationnellement équivalente à une surface réglée. Je vais maintenant donner l'énoncé de ce critère.

2.- Enoncé du théorème fondamental.

Soit k un corps de base algébriquement clos et de caractéristique quelconque. Soit B une classe birationnelle de surfaces algébriques non-singulières et soit Σ le corps des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, lequel est défini par la classe B. D'après quelques uns de mes travaux et ceux plus récents de mon élève ABHYANKAR, l'hypothèse qu'il s'agit de surfaces non-singulières n'apporte aucune restriction sur le corps de fonctions Σ.

Les membres de la classe B sont des modèles projectifs du corps Σ, c'est-à-dire qu'ils sont des couples (F, P) où F est une surface projective non-singulière ayant Σ comme corps de fonctions rationnelles et P un point général de F/k tel que $\Sigma = k(P)$. Il s'ensuit que deux membres quelconques (F, P) et (F', P') de B sont liés par une transformation birationnelle $T : F \to F'$ bien déterminée : c'est la transformation dans laquelle P et P' sont points correspondants. On dit que F (plus précisément : (F, P)) précède F', symboliquement : $F < F'$ si T^{-1} est une transformation univoque, donc régulière. Nous convenons de dire dans ce cas que T est une transformation antirégulière de F . Dans une telle transformation T il y aura un nombre fini de points exceptionnels sur F , appelés points fondamentaux, auxquels correspondent des courbes algébriques sur F , mais il n'y a pas de points fondamentaux sur F'.

Avec cette définition de la relation $F < F'$, notre classe birationnelle B devient un ensemble ordonné. Nous ne ferons aucune distinction entre deux modèles F et F' qui sont birégulièrement équivalents (c'est-à-dire, tels que l'on ait simultanément $F < F'$ et $F' < F$). On dira qu'une surface F dans B est un modèle minimum relatif si F est un élément minimal de l'ensemble ordonné B , c'est-à-dire s'il n'existe pas dans B des modèles plus petits que F . On dira que F est un modèle minimum (du corps des fonctions Σ) si F est la borne inférieure de la classe B , c'est-à-dire si l'on a $F < F'$ pour toute surface F' dans B . Le théorème que je veux démontrer dans ces conférences est le suivant :

THÉORÈME FONDAMENTAL.- Si le corps des fonctions Σ ne possède pas un modèle minimum, alors Σ est le corps des fonctions rationnelles d'une surface réglée (c'est-à-dire : Σ est une extension transcendante simple d'un corps des fonctions algébriques d'une variable indépendante).

La réciproque est vraie aussi, mais elle est bien élémentaire.

En ce qui concerne l'existence des modèles minimum relatifs, la situation est tout à fait différente : de tels modèles existent toujours, sans exception. On a de plus : toute classe birationnelle de variétés non singulières, de dimension quelconque, satisfait toujours à la condition de chaînes descendantes finies. Pour démontrer cette assertion, on observe en premier lieu que toute transformation birationnelle antirégulière $T : V \to V'$ d'une variété non-singulière V jouit de la propriété suivante : la variété exceptionnelle, sur V' , de la transformation réciproque T^{-1} est une variété pure, de dimension $r - 1$, où r est la dimension de V . En utilisant le théorème de Néron-Severi, on voit donc que si $V < V'$ et V est non-singulière, alors on a $\rho(V) < \rho(V')$, où ρ est le nombre de base pour les cycles algébriques de dimension $r - 1$, et cela établit la condition de chaînes descendantes finies pour chaque classe birationnelle des variétés non-singulières. Dans le cas de surfaces algébriques, on peut donner deux autres démonstrations qui n'utilisent pas le théorème de Néron-Severi. Dans une de ces démonstrations, on observe avec M. SERRE que si $F < F'$ (strictement) alors $h^{1,1}(F) < h^{1,1}(F')$, les notations étant celles de la théorie de faisceaux. La deuxième démonstration s'appuie sur la considération du système anticanonique $|-K|$ d'une surface algébrique. On démontre que, si on a une chaîne descendante infinie $F_1 > F_2 > \dots$ de surfaces non-singulières, alors la dimension du système $|-K(F_i)|$ tend vers l'infini, et on peut démontrer que cela entraîne une contradiction.

3.- Courbes exceptionnelles.

L'analyse du problème des modèles minimum exige une étude préliminaire des courbes exceptionnelles situées sur une surface algébrique non-singulière.

Etant donnée une transformation birationnelle $T : F \rightarrow F'$ d'une surface algébrique F, on dit que T est antirégulière dans un point P de F si la réciproque T^{-1} est régulière dans tout point de la transformée totale $T\{P\}$ de P. Dans un sens très étendu, on peut définir une courbe exceptionnelle d'une surface algébrique F de la manière suivante :

DÉFINITION.- Une courbe algébrique E (qui peut être réductible) sur une surface algébrique normale F est dite exceptionnelle s'il existe une transformation birationnelle $T : F \rightarrow F'$ telle que E est la transformée totale d'un point normal P' de la surface F'. Le point P' s'appelle alors une contraction de la courbe exceptionnelle E. On dit que la courbe exceptionnelle E est de première espèce si, pour un choix convenable de la transformation T, on peut satisfaire la condition additionnelle que T soit régulière dans tout point de la courbe E. Dans le cas contraire, on dit que E est de 2e espèce.

Selon la définition, une courbe exceptionnelle E de première espèce est, localement, la transformée totale antirégulière d'un point normal P'. On démontre facilement que l'on a dans ce cas :

$$O_{P'} = \bigcap_{P \in E} O_P \quad ,$$

où $O_{P'}$ est l'anneau local du point P' (et de même pour O_P). Par conséquent, une courbe exceptionnelle de première espèce possède, au point de vue birégulier, une et une seule contraction normale P' telle que E soit transformée totale antirégulière du point P'. Nous appellerons cette contraction la contraction régulière de la courbe E . Au contraire, une courbe exceptionnelle E de première espèce possède en général un nombre infini de contractions normales qui ne sont pas régulières.

Les seules courbes exceptionnelles qui interviennent dans le problème des modèles minimum et qui étaient considérées par les géomètres italiens sont celles qui possèdent au moins une contraction qui est un point simple. Nous les appellerons provisoirement courbes exceptionnelles dans le sens étroit, et nous dirons provisoirement qu'une courbe exceptionnelle E est de première espèce dans le sens étroit si E est la transformée totale antirégulière d'un point simple. On peut démontrer qu'une courbe exceptionnelle E de première espèce dans le sens étroit possède une et une seule contraction simple P' (on n'exige pas ici *a priori* que E soit transformée antirégulière de P' ; cela vient seulement *a posteriori* comme conséquence de l'unicité de la contraction simple de notre courbe exceptionnelle de première espèce dans le sens étroit). Donc, pour les courbes exceptionnelles de première espèce dans le sens étroit, on peut parler sans ambiguïté de la contraction simple de la courbe. Cela n'est pas plus vrai pour les courbes exceptionnelles dans le sens étroit qui sont de deuxième espèce.

Pour l'application au problème des modèles minimum, il est essentiel de savoir si l'opération de contraction d'une courbe exceptionnelle de première espèce en un point peut se faire d'une manière telle qu'on ne touche rien en dehors de la courbe. Et en effet, on peut démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 1.- Si E est une courbe exceptionnelle de première espèce située sur une surface non-singulière F , alors il existe une transformation birationnelle $T : F \to F'$ telle que

1) T est régulière sur E et birégulière sur $F - E$

2) $E = T^{-1}\{P'\}$ où $P' \in F'$ est la contraction normale régulière de la courbe E . (L'hypothèse que F est non-singulière est essentielle).

Dans le problème des modèles minimum, on doit utiliser la proposition précédente seulement dans le cas où E est une courbe exceptionnelle de première espèce dans le sens étroit. Toutefois, la proposition générale a un intérêt spécial pour la question suivante : est-il toujours possible de plonger une surface normale abstraite, dans le sens de Weil, dans un espace projectif ? Je veux discuter brièvement cette application, bien qu'elle soit un peu en dehors de notre sujet principal.

J'observe d'abord que la proposition 1 peut s'énoncer sous la forme suivante : si E est une courbe exceptionnelle de première espèce sur une surface non-singulière et si P' est la contraction normale régulière de E, alors la surface abstraite $F - E + P'$ est une surface projective.

J'ajouterai deux mots concernant la démonstration de la proposition 1. Dans ma Note sur le 14e problème d'Hilbert, j'ai démontré la proposition suivante :

PROPOSITION 2.- Soit L un système linéaire irréductible, de dimension positive, sur une surface F non-singulière. Alors, si l'entier h est suffisamment grand, le système complet $|hL|$ n'a pas de points bases.

Nous utilisons cette proposition dans la démonstration de la proposition 1. Par hypothèse, il existe une transformation birationnelle $g : F \to F_1$, régulière sur E, telle que l'on ait $E = g^{-1}\{P'\}$, $P' \in F_1$ étant la contraction normale régulière de E. On peut éliminer les points fondamentaux de g^{-1}, sur F_1, différents de P', en appliquant à F_1 des transformations quadratiques successives, sans toucher le point P'. On peut donc supposer que P' est le seul point fondamental de g^{-1}. Donc g est antirégulière sur $F - E$, régulière sur E. Soit L le système linéaire sur F qui correspond au système de sections hyperplanes de F_1. Le système L n'a pas de points bases sur E, et les seules courbes exceptionnelles de L (courbes fondamentales de L, dans la terminologie italienne) sont les composantes irréductibles de E.

Le système L peut avoir des points bases en dehors de la courbe E : ce sont les points fondamentaux de la transformation g. Appliquons la proposition 2 au système L et posons $L_h = |hL|$. Le système linéaire L_h définit une transformation birationnelle de F en une surface F_h. Soit F' la normalisation de F_h. Alors on voit facilement que la transformation birationnelle $T : F \to F'$ satisfait à toutes les conditions énoncées dans la proposition 1.

Par induction, on obtient immédiatement la généralisation partielle suivante de la proposition 1 :

PROPOSITION 3.- Soient $E_1, E_2, \ldots, E_s$ des courbes exceptionnelles de première espèce sur une surface non-singulière F et soit P'_i la contraction normale régulière de E_i. Supposons que

1) l'intersection $E_i \cap E_j$ soit vide, pour $i \neq j$ $(i, j = 1, 2 \ldots s)$

2) tous les points P'_i, sauf peut-être un de ces points, soient des points simples.

Alors la surface abstraite $F - \sum_{i=1}^{s} E_i + \sum_{i=1}^{s} P_i'$ est une surface projective.

On sait que chaque surface abstraite F^* est une transformée régulière d'une surface F plongée dans l'espace projectif. On peut résoudre les singularités de F par une transformation antirégulière. Donc on peut supposer que F est non-singulière. Si F^* est aussi non-singulière, ou si F^* possède un seul point singulier, lequel est normal, on peut appliquer la proposition 3 à la surface F et aux courbes exceptionnelles E_i de F qui correspondent aux points fondamentaux P_i' de la transformation birationnelle $F^* \to F$.

On obtient alors le résultat suivant :

chaque surface abstraite normale qui possède au plus un point singulier peut être plongée dans l'espace projectif.

Donc, s'il existe une surface normale abstraite qui n'est pas projective, on doit la chercher parmi les surfaces abstraites qui possèdent au moins deux points singuliers. C'est ce qui a inspiré NAGATA dans sa construction récente d'un exemple d'une surface normale abstraite non-projective. La surface de Nagata est en effet la réunion de deux cônes elliptiques affines, birationnellement équivalents, et, tous les deux, les sommets de ces cônes appartiennent à la surface abstraite.

4.- Les courbes exceptionnelles de 2e espèce et le problème des modèles minimum.

Nous revenons maintenant à notre classe birationnelle B du corps des fonctions Σ. Dans tous ce qui suit, nous entendons par courbe exceptionnelle ce que nous avons appelé provisoirement courbe exceptionnelle dans le sens étroit. Il résulte de la proposition 1 qu'une surface F dans B est un modèle minimum relatif si et seulement si F ne possède pas de courbes exceptionnelles de première espèce.

Nous supposerons maintenant que B ne contient pas de modèle minimum. Je veux donner plusieurs conditions équivalentes chacune à cette hypothèse.

(1) Si F est un modèle minimum relatif, alors F possède au moins une courbe exceptionnelle (nécessairement de deuxième espèce).

(2) La classe B contient au moins deux modèles minimum relatifs.

(3) Il existe dans B une surface F qui contient une courbe exceptionnelle de deuxième espèce.

DÉMONSTRATION.- La condition est évidemment nécessaire [voir (1)]. Réciproquement, supposons qu'une surface F dans la classe B contient une courbe exceptionnelle

E de 2e espèce. Soit $T : F \to F'$ une transformation birationnelle de F telle que $E = T^{-1}\{P'\}$ où P' est un point simple de F'. Après avoir résolu les singularités de F', sans toucher le point P', nous pouvons supposer que F' est non-singulière, donc $F' \in B$. La transformation T doit avoir au moins un point fondamental sur E, parce que E est de deuxième espèce. Soit P un point fondamental de T, $P \in E$. Alors P et P' sont points correspondants de notre transformation birationnelle (parce que $P \in E$ et E est la transformée de P') et les points P, P' sont tous les deux points fondamentaux (pour T et T^{-1}).

Montrons maintenant que, dans ces conditions, l'existence d'un modèle minimum entraîne une contradiction. Soit F^* un modèle minimum. Soit v une valuation zéro dimensionnelle du corps $\sum$ telle que P et P' soient les centres de v sur F et F' respectivement. Soit P^* le centre de v sur F^*. Nous avons $F^* < F$ et $F^* < F'$, donc $O_{P^*} \subset O_P$ et $O_{P^*} \subset O_{P'}$, et les trois points P, P', P^* sont des centres d'une même valuation v. Or, j'ai démontré, dans certains de mes travaux, que dans ces conditions les points P et P' appartiennent tous les deux à la série linéairement ordonnée des points obtenus à partir de P^* par transformations quadratiques successives, les centres successifs de ces transformations étant bien déterminés par la valuation donnée v. Donc on a nécessairement $O_P \subset O_{P'}$ ou $O_{P'} \subset O_P$, ce qui est impossible parce que la transformation $T : F \to F'$ n'est pas régulière en P, et T^{-1} n'est pas régulière en P'.

(4) Il existe une paire de surfaces F, F' dans la classe B et il existe des points P, P' sur F et F' respectivement tels que

a) P et P' sont points correspondants dans la transformation birationnelle $T : F \to F'$

b) les points P, P' sont tous le deux points fondamentaux (ou, sous une forme équivalente : $O_P \not\subset O_{P'}$ et $O_{P'} \not\subset O_P$).

5.- Courbes exceptionnelles de 2e espèce.

Je considère un modèle minimum F relatif dans notre classe birationnelle B. D'après une proposition précédente, la surface F ne possède pas de courbes exceptionnelles de première espèce. D'autre part, la surface F n'étant pas un modèle minimum, il existe des surfaces F' dans B telles que la transformation birationnelle $F' \to F$ n'est pas régulière sur F'. Donc F possède des courbes exceptionnelles, lesquelles sont alors nécessairement de 2e espèce. On peut démontrer que F possède aussi des courbes exceptionnelles de 2e espèce qui sont irréductibles. Je laisserai de côté la démonstration de cette assertion.

Soit donc E une courbe exceptionnelle irréductible de 2e espèce, sur la surface F. Comme la courbe exceptionnelle E admet comme contraction un point simple, il est bien connu que E doit être une courbe rationnelle. Il nous est nécessaire d'avoir quelque information sur les caractères virtuels de la courbe E, son degré (E^2) et son genre arithmétique $P(E)$.

On obtient ces informations par la voie suivante :

E étant de 2e espèce, chaque transformation birationnelle T de F telle que E soit la transformée totale d'un point simple P' par T^{-1} a nécessairement au moins un point fondamental sur E.

Nous dirons qu'un point P de E est un point fondamental de la courbe E si ce point peut apparaître comme point fondamental d'une transformation telle que T, pour un choix convenable de la transformation. [On peut donner des renseignements très précis sur l'ensemble des points fondamentaux de la courbe E.

On peut démontrer par exemple :

(a) tout point singulier de E est point fondamental de E. On a de plus : un point singulier de E est point fondamental de la transformation T pour chaque choix de la transformation.

(b) l'ensemble des points fondamentaux de E peut être seulement, soit l'ensemble des points singuliers de E, soit l'ensemble de tous les points de E.]

Je prends maintenant un point fondamental de E, soit P, et j'applique à la surface F une transformation localement quadratique g, ayant le point P comme centre $(g : F \to F' : \succ F)$. Soit $E' = g[E]$ la transformée propre (irréductible) de la courbe E. Alors on peut démontrer que E, étant de 2e espèce, (et P étant point fondamental de E), la courbe transformée E' est encore une courbe exceptionnelle (peut-être de 1e espèce). Si s est la multiplicité du point P pour la courbe E $(s \geq 1)$, on a les relations suivantes bien connues :

$$(E^2) = (E'^2) + s^2 > (E'^2) \quad .$$

$$p(E) = p(E') + \frac{s(s-1)}{2} \quad .$$

Si E' est encore de 2e espèce, nous appliquons le même procédé à la courbe E'. On peut démontrer que ce procédé doit se terminer après un nombre fini de transformations, c'est-à-dire qu'on obtient à la fin une transformée $E^{(n)}$ qui est une ~~courbe exceptionnelle (irréductible) de~~ 1e espèce. ~~Pour cette courbe, on sait~~ que $(E^{(n)2}) = -1$, $p(E^{(n)}) = 0$. On obtient donc pour (E^2) et $p(E)$ les expressions suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{lll} (1) \quad (E^2) = -1 + \sum_{i=1}^{n} s_i^2 & & n \geq 1 \\ (2) \quad p(E) = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i(s_i - 1)}{2} & & s_i \geq 1 \quad . \end{array}}$$

La courbe finale $E^{(n)}$ étant irréductible et de 1e espèce, elle est non-singulière (ce qui résulte aussi de la relation $p(E^{(n)}) = 0$). Il s'ensuit que l'ensemble des entiers s_i comprend l'ensemble des multiplicités des points singuliers de la courbe E , y compris les points singuliers infiniment voisins. Tous les autres entiers s_i sont égaux à 1 .

Les relations (1) et (2) donnent les deux relations suivantes :

$$(3) \qquad (E^2) \geq 0$$

$$(4) \qquad (K.E) = 2p(E) - 2 - (E^2) = -(1 + \sum_{i=1}^{h} s_i) \leq -2 \quad ,$$

où K est un diviseur canonique sur F . Or, E étant une courbe irréductible de degré non-négatif, l'entier $(X.E)$ est non-négatif pour chaque diviseur X positif ou nul. Il résulte de (4) qu'il n'existe pas de diviseur canonique positif ou nul. Donc $p_g = 0$. De plus, le système $|nK|$ n'existe pas, donc $P_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

6.- Cas d'une courbe exceptionnelle E , de 2e espèce, non-singulière.

Considérons d'abord le cas dans lequel E n'a pas de singularités. Dans ce cas, on a donc

$$\begin{cases} (E^2) = n - 1 \geq 0 \quad ; \\ p(E) = 0 \quad . \end{cases}$$

C'est le cas relativement le plus simple. L'existence d'une courbe irréductible E telle que $(E^2) \geq 0$ et $p(E) = 0$ entraîne que F est birationnellement équivalente à une surface réglée (à une surface rationnelle si $(E^2) > 0$). On le voit de la manière suivante : d'abord, en appliquant à F $n-1$ transformations quadratiques successives, ayant leur centre sur E, on peut réduire à zéro le degré de E. Nous pouvons donc supposer que $(E^2) = 0$. Le théorème de Riemann Rode et le fait que $(E^2) = 0$ entraînent facilement que l'on a

$$\dim |nE| = n + C^{te} \text{ , si } n \text{ est grand.}$$

Deux cycles de $|nE|$ qui passent par un point général de F doivent avoir une composante commune, parce que le degré du cycle nE est zéro. Donc le système $|nE|$ est réductible, pour chaque valeur de n.

Donc, par le théorème de Bertini, $|nE|$, pour n grand, est composé d'un faisceau irréductible L. La courbe E est évidemment membre de ce faisceau, et comme on a $p(E) = 0$, on a aussi que le genre arithmétique du cycle général de L est zéro. Voilà donc un faisceau L de courbes sur F, dont le cycle général a un genre arithmétique nul. Par le théorème de Noether (ou bien, par le théorème de Tsen) la surface F est birationnellement équivalente à une surface réglée.

Si, avant la réduction du degré de E à zéro, on avait $(E^2) > 0$, alors au faisceau L correspondrait sur la surface originelle un faisceau ayant au moins un point base. Ce point base étant un point simple de la surface, on sait que L est nécessairement un faisceau linéaire. Donc, dans ce cas, F est rationnelle.

7.- Le cas d'une E singulière.

C'est le cas le plus difficile, et, dans ce cas, on démontre que la surface F est rationnelle. Observons que si E est singulière, alors $(E^2) > 0$. En combinant avec le cas précédent, on voit donc que le cas d'une surface rationnelle est caractérisé par l'inégalité $(E^2) > 0$. Je veux donner une idée de la démonstration. Il s'agit seulement de démontrer que $P_a(F) = 0$ et d'appliquer ensuite le théorème de Castelnuovo, parce que nous savons déjà que $P_2 = 0$ (en fait, nous savons que $P_n = 0$ pour tout $n \geq 1$).

DÉFINITION.- Une variété normale V est dite fortement minimum si chaque transformation rationnelle d'une variété quelconque V' dans V est régulière en tout point simple de V'.

Par exemple, toute variété abélienne est fortement minimum.

Toute sous-variété d'une variété fortement minimum est fortement minimum. On doit à MATSUSAKA l'observation suivante (qu'il n'a pas publiée) : si un corps Σ de fonctions algébriques de deux variables indépendantes n'admet pas un modèle fortement minimum, alors Σ contient un sous-corps Ω de genre égal à l'irrégularité q du corps Σ (Observation : un modèle fortement minimum n'est pas nécessairement non singulier).

La démonstration de ce théorème est bien simple. On montre que, sous les hypothèses du théorème, la variété de Picard V d'un modèle projectif F du corps Σ est ou un point $(q = 0)$ ou bien l'image de F par l'application canonique φ de F dans V est une courbe C. On démontre que cette courbe doit être de genre q, en utilisant la "universal mapping property" de la Jacobienne de C, et, étant une transformée rationnelle de F, elle définit sur F un faisceau de genre q. C.Q.F.D.

En utilisant la "universal mapping property" de φ on conclut que $q = \dim V \geq \dim J(C)$. D'autre part, en utilisant la "universal mapping property" de l'application canonique ψ de C dans $J(C)$, on montre que $\dim V \leq \dim J(C)$. Donc $q =$ genre de C.

La proposition qu'on doit démontrer ensuite est bien cachée et est la suivante :

Si le corps Σ n'admet pas un modèle minimum, il n'admet pas un modèle fortement minimum.

Idée de la démonstration.- Prenons un modèle minimum relatif F dans notre classe B. Il existe dans B une surface F_1 telle que $F \nleq F_1$. En vertu de la condition de chaînes descendantes finies, il existe dans B un modèle minimum relatif F' plus petit que F_1. Alors on a $F \neq F'$, de manière que la correspondance birationnelle entre F et F' possède des points fondamentaux sur les deux surfaces. Soit P un point fondamental sur F, soit E' la courbe correspondante sur F'. Cette courbe est exceptionnelle de 2e espèce, parce que F' est minimum relatif. Donc la transformation $F' \longrightarrow F$ a un point fondamental sur E', soit P'. Les deux points P et P' satisfont donc aux conditions suivantes :

1) ils sont des points simples,

2) ils sont points correspondants d'une correspondance birationnelle, c'est-à-dire ils sont les centres d'une même valuation du corps $\Sigma \mid u$;

3) $O_P \not\supset O_{P'}$ et $O_{P'} \not\supset O_P$.

Dans ces conditions, on démontre que le degré de transcendance de l'intersection $O_P \cap O_{P'}$ est au plus égal à 1.

Il s'ensuit qu'il n'existe aucun modèle projectif $F^{\times}$ du corps Σ (y compris les modèles singuliers) tel que l'on ait $F^{\times} < F$ et $F^{\times} < F'$. Cela montre la non-existence d'un modèle fortement minimum de Σ.

En combinant ce résultat avec le théorème de Matsusaka, on conclut que notre surface F contient un faisceau L de genre g égal à l'irrégularité q de F. Supposons $q \neq 0$. Si le cycle général de L n'est pas premier, alors L est composé avec un faisceau L' dont l'élément général est premier, et le genre de L' sera encore positif, parce qu'une courbe de genre zéro ne contient pas d'involutions irrationnelles (théorème de Lüroth). Donc, nous pouvons supposer que le cycle général de L est premier, tandis que le genre g de L est encore positif. Notre courbe exceptionnelle E, étant rationnelle, doit être une composante de quelque cycle X appartenant à L. En effet, dans le cas contraire, le faisceau L découperait sur X une involution de groupes de points (c'est-à-dire, la trace de L sur E serait un faisceau de cycles sur E), et cette involution serait irrationnelle, ce qui est en contradiction avec la rationalité de E. Or, rappelons-nous qu'un faisceau irrationnel ne peut avoir des points bases en un point simple de la surface. Donc, L n'a pas de points bases sur F, ce qui montre que deux cycles distincts de L n'ont pas de point commun. Donc, on a $(E.X) = 0$ pour tout cycle X de L, parce que E est une composante d'un cycle X_0 de L. En écrivant $X_0 = mE + Y_0$, où $m \geq 1$ et E n'est pas composante de Y_0, il vient $m(E^2) + (E.Y_0) = 0$, donc $(E^2) = 0$ (et aussi $(E.Y_0) = 0$), ce qui est impossible, parce que nous avons supposé que E est singulière, donc $(E^2) > 0$.

Il est donc démontré que $q = 0$. Nous savons aussi que $p_g = 0$. Or, déjà dans le cas classique, Séveri a démontré, par voie essentiellement algébrique, que si $p_g = 0$, le système caractéristique d'un système algébrique complet et ample est complet. En d'autres termes, l'égalité $q = p_g - p_a$, dans le cas classique, était déjà démontré essentiellement par voie algébrique sous l'hypothèse $p_g = 0$. Dans le dernier numéro du journal de Kyoto, on trouvera trois démonstrations différentes de ce même résultat dans le cas abstrait, par Akizuki-Matsumura, Nagata et Nakai. Nakai a démontré de plus qu'on a toujours :

$$p_g - p_a \geq q \geq - p_a \quad .$$

Nous avons donc la conclusion cherchée : $p_a = 0$.

Nous sommes donc ramenés au critère de rationalité dû à Castelnuovo. Malheureusement, le temps ne me permet pas de discuter ce critère. D'ailleurs, il s'agirait seulement d'ajouter à l'exposé donné par M. SERRE des observations algébriques additionnelles pour traiter un cas particulier de la démonstration, cas dans lequel Kodaira a dû employer des arguments topologiques.