Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

M. Zisman

Classes de Chern

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. nº 23, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A21_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1956/57
-:-:-:-

Exposé n° 23

CLASSES DE CHERN

(Exposé de M. ZISMAN, le 27.5.1957)

1.- Espaces fibrés universels et espaces classifiants.

Dans tout cet exposé, les fibrés envisagés sont associés à des éléments de $H^1(B , G_c)$, les éléments de $H^1(B , G_d)$ ou $H^1(B , G_\omega)$ étant considérés comme appartenant à $H^1(B , G_c)$ (Exposé 17).

DÉFINITION.- On dit qu'un espace fibré $p : E \longrightarrow B$, principal de groupe structural G compact, E compact connexe est universel pour G et pour n si $H^i(E , Z) = 0$ pour $0 < i \leq n$. B est alors appelé classifiant pour G et pour n .

On notera dans la suite un tel espace $E(G , n) \longrightarrow B(G , n)$ ou simplement $E_G \longrightarrow B_G$.

Cette terminologie est justifiée par les 2 propositions suivantes :

PROPOSITION 1.1.- Soient $p : E_G \longrightarrow B_G$ et $p' : E'_G \longrightarrow B'_G$ 2 espaces fibrés universels pour G et pour n alors $H^i(B_G , Z) \approx H^i(B'_G , Z)$ pour $i \leq n$.

PROPOSITION 1.2.- Soient $\rho : E \longrightarrow B$ un espace fibré principal de groupe G , et $p : E_G \longrightarrow B_G$ un espace fibré universel pour G et pour n . Il existe alors un homomorphisme (indépendant de l'espace universel choisi) :

$$\sigma^* : H^i(B_G , Z) \longrightarrow H^i(B , Z) \qquad \text{pour} \quad i \leq n .$$

La démonstration de ces deux propriétés est basée sur le théorème suivant :

PROPOSITION 1.3.- (Victoris-Begle) Soit $p : E \longrightarrow B$, un espace fibré, E connexe localement compact, à fibre F compacte connexe. Si $H^i(F , Z) = 0$ pour $0 < i \leq n$, $p^* : H^i(B , Z) \longrightarrow H^i(E , Z)$ est un isomorphisme sur pour $0 \leq i \leq n$.

<u>DEMONSTRATION de 1.1 et 1.2</u> :

On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} E_G & \xleftarrow{f} & E_G \times E'_G & \xrightarrow{f'} & E'_G \\ p \downarrow & & \rho \downarrow & & p' \downarrow \\ B_G & \xleftarrow{\bar{f}} & E_G \times_G E'_G & \xrightarrow{\bar{f}'} & B'_G \end{array}$$

f et f' sont les projections $(e\,,\,e') \longrightarrow e$, $(e\,,\,e') \longrightarrow e'$ $(e \in E_G$, $e' \in E'_G)$ toutes les flèches sont des fibrations ; $\bar{f}$ et $\bar{f}'$ ont été définies dans l'exposé 17 , paragraphe 3.4.(b) (en faisant opérer G à gauche sur E'_G par $g.e' = e'g^{-1}$ $g \in G$ $e' \in E')$; ρ est l'application qui à $(e\,,\,e') \in E_G \times E'_G$ fait correspondre sa classe d'équivalence dans $E_G \times_G E'_G$ par la relation $(e\,,\,e') \sim (eg\,,\,e'g)$, et définit $E_G \times E'_G$ comme espace fibré principal sur $E_G \times_G E'_G$ de groupe G . Enfin le diagramme est commutatif comme on le voit sans peine.

D'après la proposition 1.3 $\bar{f}^*$ et $\bar{f}'^*$ sont des isomorphismes pour $0 \leq i \leq n$ donc

$$(\bar{f}^*)^{-1}\,\bar{f}'^* \;:\; H^i(B'_G\,,\,Z) \longrightarrow H^i(B_G\,,\,Z)$$

est un isomorphisme pour $i \leq n$.

Pour démontrer 1.2 on considère de même le diagramme

$$(1) \qquad \begin{array}{ccccc} E_G & \xleftarrow{g} & E_G \times E & \xrightarrow{f} & E \\ p \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \rho \\ B_G & \xleftarrow{\bar{g}} & E_G \times_G E & \xrightarrow{\bar{f}} & B \end{array}$$

$\bar{f}^*$ est un isomorphisme sur pour $0 \leq i \leq n$ et l'on pose $\sigma^* = (\bar{f}^*)^{-1}\,\bar{g}^*$. C'est un homomorphisme $H^i(B_G\,,\,Z) \longrightarrow H^i(B\,,\,Z)$ définit pour $0 \leq i \leq n$. On montre sans peine, que cet homomorphisme est indépendant de l'espace fibré universel choisi, et que c'est aussi un homomorphisme pour les <u>structures d'algèbre</u> de $H(B_G\,,\,Z)$ et $H(B\,,\,Z)$ définies par le cup-produit pour les degrés $\leq n$. L'image de σ^* est appelée l'algèbre caractéristique, σ^* l'homomorphisme caractéristique de la fibration $E \longrightarrow B$.

<u>PROPOSITION 1.4</u>.- <u>Soient</u> $\rho : E \longrightarrow B$ <u>et</u> $\rho' : E' \longrightarrow B'$ <u>2 espaces fibrés principaux de groupe</u> G , h <u>un homomorphisme de</u> E <u>dans</u> E' , σ^* <u>et</u> σ'^* <u>les homomorphismes caractéristiques de ces fibrations. Alors</u>

$$\sigma^* = \bar{h}^* \circ \sigma'^* \quad .$$

En effet, à l'aide de h , on établit un homomorphisme évident du diagramme (1) dans le diagramme correspondant pour E' . En n'écrivant que les deux lignes inférieures de ces diagrammes, on obtient un nouveau diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & E_G \times_G E \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[dl, "\bar{g}"'] \arrow[dd, "h"] & B \arrow[dd, "\bar{h}"] \\ B_G & & \\ & E_G \times_G E' \arrow[r, "\bar{f}'"] \arrow[ul, "\bar{g}'"] & B' \end{tikzcd}$$

d'où :

$$\sigma^* = (\bar{f}^*)^{-1} \circ \bar{g}^* = (\bar{f}^*)^{-1} \circ h^* \circ \bar{g}'^* = \bar{h}^* \circ (\bar{f}'^*)^{-1} \circ \bar{g}'^* = \bar{h}^* \circ \sigma'^* \quad .$$

2.- La cohomologie des grassmanniennes $\mathcal{G}(q , N ; C) = U(q + N)/U(q) \times U(N)$.

On démontre que l'espace fibré principal de groupe $U(q)$ $U(q + N)/U(N) \longrightarrow U(q + N)/U(q) \times U(N)$ est universel pour $U(q)$ pour la dimension $2N$. Soient $y_1 , \dots , y_q$ q variables indépendantes, où l'on considère que y_i a le degré $2i$. On démontre alors que $H(\mathcal{G}(q , N ; C) , Z) \approx Z(y_1 , \dots , y_q)$ pour les dimensions $\leq$ à $2N$, c'est-à-dire que $H^i(\mathcal{G}(q , N ; C) , Z)$ est isomorphe au groupe additif des polynomes sur Z homogènes de degré i en les variables $y_1 , \dots , y_q$ pour $i \leq 2N$, et que la multiplication de deux éléments dont la somme des degrés est inférieure à $2N$ s'obtient en multipliant les 2 polynomes qui les représentent.

Si $\rho : E \longrightarrow B$ est un espace fibré principal de groupe $U(q)$, et si la dimension de B est finie (Cf. exposé 14 paragraphe 5) , on considère une grassmannienne $\mathcal{G}(q , N ; C)$ avec N assez grand et $\sigma^*(y_1) , \dots , \sigma^*(y_q)$ sont des générateurs de l'algèbre caractéristique de l'espace fibré ; σ^* représentant l'homomorphisme caractéristique défini au paragraphe 1.

Les classes de Chern d'un $U(q)$-fibré de base B sont un système particulier de générateurs de l'algèbre caractéristique du fibré. Pour les définir, il suffit donc de définir des générateurs particuliers de $H(\mathcal{G}(q , N ; C) , Z)$ et ensuite de les transformer par σ^* . On peut aussi les définir de façon axiomatique grâce à un procédé dû à F. Hirzebruch. C'est ce dernier mode d'exposition qui sera suivi ici.

3.- L'espace projectif complexe.

Soit $P_n(C)$ l'espace projectif complexe à n dimensions, de coordonnées homogènes $z_0 , \dots , z_n$. C'est une variété analytique complexe, à $2n$ dimensions réelles. Son algèbre de cohomologie est engendrée par 1 générateur de degré deux : $H(P_n(C)\ ,\ Z) \approx Z(y_1)/(y_1^{n+1})$ où y_1 est de degré 2 . On va exhiber un générateur particulier, noté $g_n \in H^2(P_n(C)\ ,\ Z)$. Soit $P_{n-1}(C)$ la sous-variété de $P_n(C)$ obtenue en faisant $z_0 = 0$. $P_n(C)$ et $P_{n-1}(C)$ sont orientables (Cf. exposé 21 paragraphe 2). On démontre que si V_n est une variété orientable à n dimensions réelles,

$$H_n(V_n\ ,\ Z) \approx Z\ .$$

Comme il n'y a pas de n+1-chaines, tous les n cycles sont donc multiples de l'un d'entre eux, noté $[V_n]$, ainsi que sa classe d'homologie, ou bien de son opposé $-[V_n]$. "Orienter" V_n , c'est choisir l'un de ces 2 cycles comme base de l'homologie en dimension n . Si $W \subset V_n$ est une variété orientable, l'orientation de V_n induit une orientation de W .

Soit alors $[P_{n-1}(C)]$ le (2n-2)-cycle, base de l'homologie de $P_{n-1}(C)$ muni de l'orientation induite par celle de $P_n(C)$.

Si $i : P_{n-1}(C) \longrightarrow P_n(C)$ est l'injection canonique de $P_{n-1}(C)$ dans $P_n(C)$, $i_*[P_{n-1}(C)]$ est une (2n - 2)-classe d'homologie de $P_n(C)$. g_n est alors l'élément de $H^2(P_n(C)\ ,\ Z)$ tel que pour toute (2n - 2)-classe de cohomologie γ on ait

$$< [P_n(C)\ ,\quad \gamma . g_n > = < i_*[P_{n-1}]\ ,\ \gamma > \quad \text{(Cf. exposé } \varepsilon)$$

g_n est parfaitement déterminé, et c'est un générateur de $H(P_n(C)\ ,\ Z)$.

L'application $i : P_{n-1}(C) \longrightarrow P_n(C)$ enduit d'autre part

$$i^* : H^2(P_n(C)\ ,\ Z) \longrightarrow H^2(P_{n-1}(C)\ ,\ Z)$$

On montre alors que

$$i^* g_n = g_{n-1}$$

Remarquons enfin que $P_n(C) = U(n+1)/U(n) \times U(1)$. $P_n(C)$ est donc un espace classifiant pour $U(1)$ et pour la dimension 2n . L'espace fibré universel $U(n+1)/U(n) \longrightarrow U(n+1)/U(n) \times U(1)$ ou plus précisément sa classe dans $H^1(\mathcal{G}(1\ ,\ n\ ;\ C)\ ,\ U(1)_c)$ sera noté η_n . Si U_i désigne l'ouvert de $P_n(C)$ défini par $z_i \neq 0$, un cocycle de η_n est donné par $g_{ij} = z_i/z_j$ dans $U_i \cap U_j$ (en fait g_{ij} définit un C^*-fibré. On obtient η_n en réduisant le groupe structural de C^* à $U(1)$) .

i induit une application $i^* : H^1(\mathcal{G}(1\ ,\ n\ ;\ C)\ ,\ U(1)_c) \longrightarrow H^1(\mathcal{G}(1\ ,\ n-1\ ;\ C)\ ,\ U(1)_c)$ et $i^* \eta_n = \eta_{n-1}$.

4.- Les axiomes.

X désigne un espace topologique de dimension finie.

Axiome I.- Pour tout $U(q)$-fibré de base X, soit ξ et tout entier $i \geqslant 0$, il existe une classe de Chern $c_i(\xi) \in H^{2i}(X, Z)$, $c_0(\xi) = 1$.

On pose $c(\xi) = \sum_i c_i(\xi)$ (il n'y a qu'un nombre fini de terme $\neq 0$ sous le $\sum$ car X est de dimension finie). $c(\xi)$ est la classe de Chern totale.

Axiome II.- Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. f induit deux applications $f^* : H^1(Y, U(q)_c) \longrightarrow H^1(X, U(q)_c)$

$f^* : H(Y, Z) \longrightarrow H(X, Z)$.

Soit $\xi \in H^1(Y, U(q)_c)$ alors

$$f^*(c(\xi)) = c(f^*(\xi)) .$$

Axiome III.- Si $\xi_1, \dots, \xi_q$ sont des $U(1)$-fibrés sur X,

$$c(\xi_1 \oplus \dots \oplus {}_q) = c(\xi_1) \dots c(\xi_q)$$

($\oplus$ est la somme de Whitney des fibrés ; dans le membre de droite la multiplication a lieu dans l'algèbre $H(X, Z)$).

Axiome IV.- $c(\eta_n) = 1 - g_n$ où η_n et g_n ont été défini au paragraphe 3. L'axiome IV est compatible avec l'axiome II car $c^* \eta_n = \eta_{n-1}$ et $i^* g_n = g_{n-1}$. Il reste à démontrer l'existence et l'unicité des classes de Chern.

5.- Unicité.

a) Soit $\xi \in H^1(X, U(1)_c)$; reprenons le diagramme (1)

$$\begin{array}{ccccc} E_G & \xleftarrow{g} & E_G \times E & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_G & \xleftarrow{\bar{g}} & E_G \times_G E & \xrightarrow{\bar{f}} & X \end{array}$$

où $E_G \longrightarrow B_G$ est le fibré η_n, avec $n > \dim X$, et $E \longrightarrow X$ un espace fibré principal de groupe $U(1)$ associé à ξ. Les flèches verticales définissent des espaces fibrés principaux de groupe $U(1)$, les flèches horizontales, des homomorphismes d'espaces fibrés principaux. On a donc

$$\bar{f}^*(\xi) = \bar{g}^*(\eta_n)$$

soit, d'après l'axiome II : $\bar{f}^* c(\xi) = \bar{g}^* c(\eta_n) = \bar{g}^*(1 - g_n)$ en utilisant l'axiome IV. f^* est un isomorphisme pour tous les degrés car $n > \dim X$, et par conséquent $c(\xi) = (\bar{f}^*)^{-1}\, \bar{g}^* \, (1 - g_n) = \sigma^*(1 - g_n)$. L'unicité est donc prouvée pour les $U(1)$-fibrés.

b) ξ désigne maintenant un $U(q)$-fibré sur X . Soit E un espace fibré principal associé à ξ , de fibre $U(q)$, et $T = T^q$ le tore maximal de $U(q)$ formé par les matrices diagonales. Appliquons la proposition 5.2 de l'exposé 17 : on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[dr, "p"'] & E/T \arrow[d, "\rho"] \\ & X \end{tikzcd}$$

le fibré $E/T \longrightarrow X$ est associé à ξ et l'on a

$$\rho^* \xi = h^* \check{\xi}$$

où $\check{\xi}$ est la classe du fibré $E \longrightarrow E/T$ de fibre T , et h^* l'application $H^1(E/T , T) \longrightarrow H^1(E/T , U(q))$ induite par l'injection $T \subset U(q)$. Le groupe structural de $\rho^* \xi$ peut donc être réduit à T , ce qui entraîne l'existence de q fibrés diagonaux ξ_1 , ξ_2 , ... , ξ_q de base E/T et l'on a
$\rho^*(\xi) = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_q$ d'après la proposition 3.2 de l'exposé 21. L'unicité a déjà été démontré pour les $U(1)$-fibrés : on peut même écrire
$c(\xi_i) = 1 + \gamma_i$ d'après (a) , où $\gamma_i \in H^2(E/T , Z)$.

Les axiomes II et III montrent alors que

$$\rho^* c(\xi) = c(\rho^* \xi) = \prod_{i=1}^{q} (1 + \gamma_i) . \tag{2}$$

Or, d'après un théorème de A. Borel $\rho^* : H(X)Z) \longrightarrow H(E/T , Z)$ est un isomorphisme dans ; $c(\xi)$ est donc unique. On a démontré de plus que $c_i(\xi) = 0$ pour $i > q$.

6.- Existence.

a) ξ est un $U(1)$-fibré.

On définit $c(\xi)$ par la formule

$$c(\xi) = \sigma^*(1 - g_n)$$

où l'on a pris $n > \dim X$. $c(\xi)$ est indépendant de n puisque $i^* g_n = g_{n-1}$ $c^* \eta_n = \eta_{n-1}$, vérifie les axiomes I et IV par définition, et l'axiome II d'après la proposition 1.4.

b) ξ est un $U(q)$-fibré. $q > 1$. $c(\xi)$ sera défini par la formule (2). Plus précisément $\rho^* c_i(\xi) = \sigma_i$ où σ_i est la i-ième fonction symétrique élémentaire des γ_i (on reprend les notations de 5 (b)). ρ^* étant biunivoque, $c_i(\xi)$ sera bien déterminé. Encore faut-il, pour que cette définition ait un sens que σ_i appartienne à l'image de ρ^* . C'est ce que nous allons démontrer à présent.

Soit N le normalisateur de T dans $U(q)$. $N/T = \Phi$ est un groupe fini, le groupe de Weyl de $U(q)$. Φ est isomorphe au groupe des permutations de q objects. Les éléments de Φ peuvent être considérés comme des automorphismes de T : si $\alpha \in \Phi$ et

$$t = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\varphi_q} \end{pmatrix} \quad \text{un élément de } T \text{ , } \alpha(t) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_{\alpha_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\varphi_{\alpha_q}} \end{pmatrix}$$

où $\{\alpha_1 , \dots , \alpha_q\}$ est une permutation de $\{1 , \dots , q\}$.

Φ peut être considéré d'autre part comme un groupe d'homéomorphismes de E/T qui conserve les fibres $U(q)/T = F(q)$ de la fibration $\rho : E/T \longrightarrow X$. En effet, si V est une carte admissible de cette fibration, E/T est homéomorphe au-dessus de V à $V \times F(q)$. Si $\alpha \in \Phi$, on définit alors

$$\tilde{\alpha}(v , gT) = (v , gaT) = (v , gTa)$$

où $v \in V$, gT est une classe à gauche de $V(q)$ modulo T , et $a \in N$ un élément de la classe α . $\tilde{\alpha}$ est un homéomorphisme de E/T sur lui-même que laisse bien invariant les fibres.

$\tilde{\alpha}$ induit donc un isomorphisme $H(E/T , Z) \approx H(E/T , Z)$ qui induit l'identité sur $\rho^* H(X , Z)$, et Φ devient un groupe d'isomorphismes de $H(E/T , Z)$ laissant fixe les éléments de $\rho^* H(X , Z)$. Or d'après un théorème de A. Borel, $\rho^* H(X , Z)$ est exactement l'ensemble des éléments invariants par Φ . Il nous reste donc à démontrer que σ_i est invariant par Φ pour être assuré que $\sigma_i \in \rho^* H(X , Z)$.

Tout élément $\alpha \in \Phi$ étant un automorphisme de T (défini par $t \longrightarrow a^{-1} t a$ $t \in T$ $a \in \alpha$) induit une application $\alpha^\natural : H^1(E/T , T_c) \approx H^1(E/T , T_c)$ (Cf. exposé 17 paragraphe 1.3) . Comme α n'opère sur T_c qu'en changeant l'ordre des termes, $\alpha^\natural \check{\xi}$ a même fibrés diagonaux que $\check{\xi}$, à l'ordre près et

$$\alpha^\natural \check{\xi} = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_q \quad .$$

D'autre part l'application $\tilde{\alpha} : E/T \longrightarrow E/T$ définie ci-dessus induit une application $\tilde{\alpha}^* : H^1(E/T , T_c) \longrightarrow H^1(E/T , T_c)$. On montre alors (en utilisant les cocycles qui définissent $\check{\xi}$) que $\alpha^H \check{\xi} = \tilde{\alpha}^* \check{\xi}$. Donc $\tilde{\alpha}^*$ permute les fibrés diagonaux de $\check{\xi}$, et, (d'après 6 (a)) comme l'axiome II est vérifié pour les $U(1)$-fibrés, l'application $H(E/T , Z) \approx H(E/T , Z)$ induite par α permute les γ_i , et laisse donc invariantesles fonctions symétriques élémentaires des γ_i . C.Q.F.D.

La vérification des axiomes I , II , IV est immédiate.

Vérification de l'axiome III :

Supposons que $\xi = \xi_1' \oplus \ldots \oplus \xi_q'$, $\xi_i' \in H^1(X , U(1)_c)$ l'espace fibré $\rho : E/T \longrightarrow X$ admet donc une section continue $s : X \longrightarrow E/T$ (Cf. exposé 21 paragraphe 3.2 et 3.3) et $s^* \xi_i = \xi_i'$ où ξ_i désigne encore le i-ième fibré diagonal de $h^* \xi$. Donc

$$c(\xi) = s^* \rho^* c(\xi) = s^* \prod_{i=1}^{q} c(\xi_i) = \prod_{i=1}^{q} c(\xi_i')$$

car ρs = identité.

7.- Nous adopterons la convention suivante : étant donné un polynome $1 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ où les a_i sont des éléments commutatifs on écrira formellement $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \prod_{j=1}^{n} (1 + \alpha_j x)$, considérant ainsi les a_i comme les fonctions symétriques élémentaires des α_j . Ceci étant on a le théorème suivant :

THÉORÈME 7.1.- *Soient ξ un $U(q)$-fibré et ξ' un $U(q')$-fibré sur le même espace X . On écrit formellement*

$$\sum_{i=0}^{q} c_i(\xi)\, x^i = \prod_{j=1}^{n} (1 + \gamma_j x)$$

et $\sum_{i=0}^{q'} c_i(\xi')\, x^i = \prod_{k=1}^{n} (1 + \delta_k x)$. *Alors* :

1. $\sum_{i=0}^{q} c_i(\xi^*)\, x^i = \prod_{j=1}^{q} (1 - \gamma_j x)$ c'est-à-dire $c_i(\xi^*) = (-1)^i c_i(\xi)$

2. $\sum_{i=0}^{q+q'} c_i(\xi \oplus \xi')x^i = \prod_{j=1}^{q} (1 + \gamma_j x) \prod_{k=1}^{q'} (1 + \delta_k x)$ c'est-à-dire

$c(\xi \oplus \xi') = c(\xi)\, c(\xi')$

3. $\sum_{i=0}^{qq'} c_i(\xi \otimes \xi')\, x^i = \prod_{j,k} (1 + (\gamma_j + \delta_k)x) \qquad \begin{matrix} 0 \leq j \leq q \\ 0 \leq k \leq q' \end{matrix}$

4. $\sum c_i(\xi^{(p)})\, x^i = (\prod (1 + (\gamma_{i_1} + \dots + \gamma_{i_p})\, x) \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq q$

La démonstration du théorème est précédée de 3 lemmes :

LEMME 7.1.- Supposons que ξ (resp. ξ') soit un $GL(q\,,\,C)$-fibré (resp. $GL(q'\,,\,C)$) sur X admettant $\xi_1\,,\dots,\xi_q$ pour fibrés diagonaux (resp. $\xi'_1\,,\dots,\,\xi'_{q'}$) . Alors

ξ^* a pour fibrés diagonaux $\xi_1^*\,,\dots,\xi_q^*$
$\xi \oplus \xi'$ a pour fibrés diagonaux $\xi_1\,,\dots,\xi_q\,,\ \xi'_1\,,\dots,\xi'_{q'}$
$\xi \otimes \xi'$ a pour fibrés diagonaux les qq' fibrés $\xi_i \otimes \xi'_j$
$\xi^{(p)}$ a pour fibrés diagonaux les $\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_p}$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq q$.

Démonstration immédiate sur les définitions.

LEMME 7.2.- Soient $\xi\,,\ \xi'\,,\ \xi''\,,\dots$ une suite finie de $U(q)$ (resp. $U(q')$, $U(q'')$ ...) fibrés sur X . Il existe alors un espace topologique Y et une application $\varphi : Y \longrightarrow X$ tels que

a) $\varphi^* : H^*(X\,,\,Z) \longrightarrow H^*(Y\,,\,Z)$ soit injectif

b) $\varphi^*(\xi)\ ,\ \varphi^*(\xi')$ etc.. sont des sommes de Whitney de fibres diagonaux.

En effet dans le cas d'un seul fibré, nous avons vu au paragraphe 5 que $\rho : E/T^{q'} \longrightarrow X$ avait les deux propriétés désirées. $\rho^*(\xi')$ est un fibré sur E/T et on peut lui appliquer la même méthode : on définit un espace E' et une application $\rho'\ \ E'/T^{q'} \longrightarrow E/T^q$, ρ'^* est injectif, et $\rho'^* \circ \rho^*(\xi')$ se décompose en somme de fibrés diagonaux. $\rho' \circ \rho : E'/T^{q'} \longrightarrow X$ a donc les deux propriétés pour ξ et ξ' . Ainsi, au bout d'un nombre fini d'opérations, on obtient le résultat désiré.

LEMME 7.3.- Soient ξ_1 et ξ_2 des $U(1)$-fibrés sur X alors $c_1(\xi_1 \otimes \xi_2) = c(\xi_1) + c(\xi_2)$ (en particulier comme $\xi \otimes \xi^*$ est le fibré trivial si ξ est un $U(1)$-fibré, et comme la classe de Chern d'un fibré trivial est nulle (on le voit par un calcul direct de $\sigma^* g_n$) on a $c(\xi) = -c(\xi^*)$.) La démonstration sera donnée dans un prochain exposé.

Démonstration du théorème 7.1.

Le théorème est vrai si ξ et ξ' sont des sommes de Whitney de $U(1)$-fibrés d'après les lemmes 7.1 , 7.3 et l'axiome III donc toujours vrai d'après le lemme 7.2 et l'axiome II.

BIBLIOGRAPHIE

BOREL (Armand).- Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Ann. of Math., t. 57, 1953 p. 115-207.

HIRZEBRUCH (Friedrich).- Neue topologische Methoden in der algebraischen geometrie. Berlin, Springer, 1956 (Ergebnisse der Mathematik..., neue Folge, Heft 9).

STEENROD (Norman).- The topology of fibre bundles.- Princeton, Princeton Univ. Press, 1951 (Princeton math. Series n° 14).