M. Lazard

Demi-groupes nilpotents

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. nº 1, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A1_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT

(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)

Année 1956/57

-:-:-:-

12 novembre 1956

Exposé n° 1

DEMI-GROUPES NILPOTENTS

par M. LAZARD.

-:-:-:-

Cet exposé reproduit les résultats de l'article du même titre d'A.I. Malcev (Ivanov. Gos. Ped. Inst., Uč. Zap. Fiz. Mat. Nauki, t. 4, 1953, p. 107-111).

1.- Les groupes ou demi-groupes (monoïdes) seront notés multiplicativement ; l'élément neutre sera noté 1 .

Un demi-groupe G est dit commutatif si

(1) $$xy = yx \quad \text{pour tous } x , y \in G .$$

Si G est un groupe, (1) peut s'écrire :

(2) $$xyx^{-1}y^{-1} = 1 .$$

Les groupes résolubles (resp. nilpotents) constituent une généralisation des groupes abéliens.

Un groupe G est dit résoluble de hauteur $\leq n$ (resp. nilpotent de classe $\leq n$) s'il possède une suite décroissante de sous-groupes invariants :

$$H_0 = G \supset H_1 \supset \ldots \supset H_{n-1} \supset H_n = \{1\} ,$$

tels que H_i/H_{i+1} soit abélien (resp. que H_i/H_{i+1} soit contenu dans le centre de G/H_{i+1}) pour $0 \leq i \leq n-1$.

La condition pour un groupe d'être résoluble (resp. nilpotent) de hauteur (resp. de classe) $\leq n$ peut se traduire par une certaine identité. Plus précisément, définissons les mots (produits de puissances entières, éventuellement négatives) C_n et D_n en des lettres $x_1 , \ldots , x_i , \ldots$, par les formules de récurrence suivantes :

(3) $$C_1(x_1 , x_2) = D_1(x_1 , x_2) = x_1 x_2 x_1^{-1}x_2^{-1} ,$$

(4) $$C_n(x_1 , \ldots , x_n , x_{n+1}) = C_1(C_{n-1}(x_1 , \ldots , x_n) , x_{n+1}) ,$$

(5) $$D_n(x_1 , \ldots , x_{2^n}) = D_1(D_{n-1}(x_1 , \ldots , x_{2^{n-1}}) , D_{n-1}(x_{2^{n-1}+1},\ldots,x_{2^n})).$$

On démontre aisément par récurrence sur n qu'un groupe G est résoluble (resp. nilpotent) de hauteur (resp. de classe) $\leq n$ si et seulement si $D_n(x_1 , \ldots , x_{2^n}) = 1$ (resp. $C_n(x_1 , \ldots , x_{n+1}) = 1$) pour tous $x_1 , x_2 , \ldots \in G$.

Les mots C_n et D_n font intervenir des puissances négatives des lettres qui y figurent. Ils ne sont donc pas définis pour les demi-groupes.

Le problème posé et résolu par Malcev est le suivant : peut-on remplacer l'identité $C_n = 1$ (resp. $D_n = 1$) par une identité <u>équivalente</u> de la forme $X_n = Y_n$, où X_n et Y_n sont des produits de puissances <u>positives</u> de lettres ?

La réponse est affirmative pour la nilpotence : on va définir des mots X_n et Y_n et montrer qu'ils possèdent la propriété cherchée. Elle est négative pour la résolubilité.

2.- Soient $x , y , u_1 , \ldots , u_n , \ldots$ des éléments (lettres) dans un demi-groupe. Définissons les mots $X_n(x , y , u_1 , \ldots , u_n)$ et $Y_n(x , y , u_1 , \ldots , u_n)$ en posant :

(6) $$X_0 = x \quad , \quad Y_0 = y \ .$$

(7) $$X_n = X_{n-1}\, u_n\, Y_{n-1} \quad , \quad Y_n = Y_{n-1}\, u_n\, X_{n-1} \ .$$

(En particulier, $X_1 = xu_1 y$, $Y_1 = yu_1 x$, $X_2 = xu_1yu_2yu_1x$, etc.)

<u>THÉORÈME 1.- Pour qu'un groupe</u> G <u>soit nilpotent de classe</u> $\leq n$, <u>il faut et il suffit qu'il vérifie l'identité</u>

$$X_n(x , y , u_1 , \ldots , u_n) = Y_n(x , y , u_1 , \ldots , u_n)$$

<u>pour tous</u> $x , y , u_1 , \ldots , u_n \in G$.

Démonstration par récurrence, évidente pour $n = 1$ (ou même $n = 0$, un groupe nilpotent de classe 0 étant réduit à l'élément neutre).

La condition est nécessaire. Soit G nilpotent de classe $\leq n$, Z son centre. Alors G/Z est nilpotent de classe $\leq n-1$, et, par l'hypothèse de récurrence,

$$X_{n-1}(x , y , u_1 , \ldots , u_{n-1}) = Y_{n-1}(x , y , u_1 , \ldots , u_{n-1})z \quad ,$$

avec $z \in Z$.

Alors $X_n = X_{n-1}\, u_n\, Y_{n-1} = Y_{n-1}\, z\, u_n\, Y_{n-1}$ et $Y_n = Y_{n-1}u_nX_{n-1} = Y_{n-1}u_n\, Y_{n-1}\, z$, d'où $X_n = Y_n$, puisque z permute avec tout élément de G .

La condition est suffisante. Soit en effet l'identité $X_n = Y_n$. Pour $u_n = 1$, elle se réduit à $X_{n-1}\, Y_{n-1} = Y_{n-1}\, X_{n-1}$; autrement dit X_{n-1} et Y_{n-1} commutent. L'identité $X_{n-1}\, u_n\, Y_{n-1} = Y_{n-1}\, u_n\, X_{n-1}$ signifie alors que $X_{n-1}^{-1}\, Y_{n-1}$ commute avec u_n , donc est dans le centre Z de G . Ainsi on a l'identité $X_{n-1} = Y_{n-1}$ dans le groupe quotient G/Z qui est donc (par l'hypothèse de récurrence) nilpotent de classe $\leq (n-1)$, ce qui montre que G est nilpotent de classe $\leq n$.

On définira les demi-groupes nilpotents de classe $\leq n$ en les caractérisant par l'identité générique $X_n = Y_n$.

3.- Nous dirons qu'un demi-groupe H est <u>simplifiable</u>, ou que c'est un <u>semi-</u>groupe si, pour tous x , y , $z \in H$,

(8) $$x = y \iff xz = yz \iff zx = zy \quad .$$

Nous dirons que H possède des <u>multiples communs</u> à droite, ou est <u>réversible</u> à droite, si pour tous x , $y \in H$ il existe u , $v \in H$ tels que $x\,u = y\,v$. Définition évidente de la réversibilité à gauche.

Si H est un <u>semi-groupe réversible à droite</u>, on peut le plonger dans son <u>groupe des fractions</u> G (défini à un isomorphisme canonique près), de telle sorte que tout élément de G s'écrive sous la forme $x\,x'^{-1}$, avec $x, x' \in G$.

Rappelons brièvement la démonstration, qui généralise la démonstration classique pour les semi-groupes abéliens. On définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur l'ensemble $H \times H$ en posant

$$(x\ ,\ x') \equiv (y\ ,\ y') \iff [\,(x'u = y'v) \implies (x\,u = y\,v)\,] \quad ,$$

pour x , x' , ... $\in H$. La loi de composition sur l'ensemble quotient $G = (H \times H)/\mathcal{R}$ est définie comme suit : si $x'u = y\,v$, la classe de $(x\,u\ ,\ y'v)$ est la composée des classes de $(x\ ,\ x')$ et de $(y\ ,\ y')$.

Nous dirons qu'un demi-groupe H vérifie une identité non triviale s'il existe deux mots distincts $V(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n)$ et $W(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n)$ tels qu'on ait identiquement dans H :

(9) $$V(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n) = W(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n) \quad .$$

<u>LEMME</u>.- <u>Tout semi-groupe vérifiant une identité non triviale est réversible (à droite et à gauche)</u>.

En effet, écrivons (9) sous la forme :

$$x_{i_1} \dots x_{i_s} = x_{j_1} \dots x_{j_t} \quad . \tag{10}$$

Si $s > 1$, $t > 1$, $i_1 \neq j_1$, (10) fournit immédiatement des multiples communs à droite pour x_{i_1} et x_{j_1} qui sont quelconques dans G . Si non, dans le cas où $s > 1$, $t > 1$, on peut simplifier à gauche les deux membres de (10) par $x_{i_1} = x_{j_1}$. On se ramène ainsi soit au cas précédent, soit à une identité du type :

$$x_1 = x_{i_1} \dots x_{i_r} \quad . \tag{11}$$

Si $i_1 = \dots = i_r = 1$, on a l'identité $x = x^r$, et H est un groupe. Si non (11) peut s'écrire :

$$x_1 = x_1^h x_{i_2} \dots x_{i_k} \quad , \text{ avec } i_2 \neq 1 \quad . \tag{12}$$

Multiplions les 2 membres de (12) à droite par x_1^h , puis simplifions à gauche par x_1^h . Il vient :

$$x_1 = x_{i_2} \dots x_{i_k} x_1^h \quad , \tag{13}$$

qui prouve encore l'existence de multiples communs à droite.

<u>COROLLAIRE 1</u>.- <u>Tout semi-groupe vérifiant une identité non triviale peut être plongé dans son groupe des fractions</u> (à gauche ou à droite).

Ce corollaire s'applique en particulier aux semi-groupes nilpotents.

<u>THÉORÈME 2</u>.- <u>Le groupe des fractions</u> G <u>d'un semi-groupe nilpotent</u> H <u>de classe</u> $\leq n$ <u>est nilpotent de classe</u> $\leq n$ (<u>donc de même classe que</u> H) .

La démonstration, par récurrence sur n , est analogue à celle du théorème 1 , et nous croyons inutile de la reproduire.

4.- Pour traiter le cas des groupes résolubles, nous nous appuierons sur la conséquence suivante du corollaire 1 : <u>Si un groupe</u> G <u>vérifie une identité non triviale de la forme</u> $V = W$, <u>où</u> V <u>et</u> W <u>sont des mots à exposants positifs et si</u> H <u>est un sous-demi-groupe de</u> G , <u>alors l'ensemble des éléments</u> xy^{-1} (ou $x^{-1}y$) , <u>pour</u> $x , y \in H$, <u>est un sous-groupe de</u> G .

Soit $\mathcal{G}$ un groupe libre de générateurs a et b , $\mathcal{G}'$ son groupe des commutateurs, $\mathcal{G}''$ le groupe des commutateurs de $\mathcal{G}'$.

D'après Baer[1], $\mathcal{G}'$ admet la famille de <u>générateurs libres</u>

$$(i\ ,\ j) = a^{-i}\, b^{-j}\, a^{-1}\, b^{-1}\, a\, b\, b^{j}\, a^{i} \quad , \tag{14}$$

où i et j parcourent indépendamment l'ensemble des entiers rationnels.

Prenons $G = \mathcal{G}/\mathcal{G}''$, et soit H le sous-demi-groupe de G engendré par les images de a et b. On va montrer que l'ensemble des $x^{-1}y$ $(x\,,\, y \in H)$ n'est pas un sous-groupe de G, c'est-à-dire est distinct de G.

Pour cela, on démontre que tout mot de la forme $a^{\alpha_1}\, b^{\beta_1} \ldots a^{\alpha_n}\, b^{\beta_n}$ $(\alpha_i \geqslant 0\ ,\ \beta_i \geqslant 0)$ peut s'écrire (dans $\mathcal{G}$) sous la forme $b^{\beta} a^{\alpha} k$, où k est un produit d'éléments $(i\ ,\ j)$ pour lesquels $i \geqslant 0$ et $j \geqslant 0$. Démonstration par récurrence sur $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \beta_1 + \ldots + \beta_n$; on s'appuie sur l'identité :

$$a\, b^{\beta} a^{\alpha} = b\, a\, b^{\beta-1}\, a^{\alpha}\ (\alpha,\ \beta-1) \quad . \tag{15}$$

Le groupe G est résoluble de hauteur 2. S'il vérifiait une identité non triviale, tout élément de son sous-groupe $\mathcal{G}'/\mathcal{G}''$ pourrait s'écrire comme un mot en les classes mod $\mathcal{G}''$ des $(i\ ,\ j)$ pour $i\ ,\ j \geqslant 0$, ce qui est impossible. Donc la résolubilité de hauteur $\leqslant 2$ ne peut pas s'exprimer par une identité ne faisant intervenir que des puissances positives des variables.

---

[1] Groups without proper isomorphic quotient groups, Bull. Amer. Math. Soc., 50, 1944, p. 267-278.