M. ZISMAN

Espaces fibrés à fibre vectorielle

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. nº 21, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A19_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1956/57

-:-:-:-

Exposé n° 21

ESPACES FIBRÉS A FIBRE VECTORIELLE

(Exposé de M. ZISMAN, le 13.5.1957)

1.- DÉFINITIONS.

Les notations sont celles de l'exposé précédent. En particulier nous ecrirons $H^1(X , G)$ au lieu de $H^1(X , G_c)$, resp. $H^1(X , G_d)$, resp. $H^1(X , G_\omega)$ quand les résultats sont valables dans les trois cas X étant alors un espace topologique quelconque resp. une variété différentiable C^∞ , resp. une variété analytique complexe.

Le groupe de Lie complexe $GL(n , C)$ des matrices $(n \times n)$ à coefficients dans C et inversibles, opère sur l'espace vectoriel C^n effectivement et de manière holomorphe. Si $\xi \in H^1(X , GL(n , C))$ il existe donc un espace fibré W associé à ξ de fibre C^n de groupe structural $GL(n , C)$. Les fibres de W sont alors des espaces vectoriels isomorphes à C^n . On dira que W est un espace fibré à fibre vectorielle associé à ξ . On construit alors facilement un espace fibré principal associé à ξ , soit E : si $x \in X$ la fibre E_x de E au-dessus de x est l'ensemble de tous les isomorphismes de C^n sur l'espace vectoriel W_x (fibre de W au-dessus de x). On définit de même des espaces fibrés à fibre vectorielle associés à $\xi \in H^1(X , GL(n , R))$ de fibre R^n . La construction de l'espace fibré principal associé à W est aussi la même que dans le cas complexe.

1.1.- Soient A et B des espaces vectoriels finis sur un corps K . On sait définir les espaces vectoriels suivants :

$A \oplus B$	(somme directe)
$A \otimes B$	(produit tensoriel)
$\mathrm{Hom}(A , B)$	(ensemble des K-homomorphismes de A dans B)
$A^* = \mathrm{Hom}(A , K)$	
$A^{(p)}$	(espace vectoriel des p-vecteurs)

Soient maintenant W et W' deux espaces fibrés à fibre vectorielle de fibre C^n et $C^{n'}$, de même base X ; W_x , W'_x désigneront les fibres de W et

W' au-dessus du point x .

On peut alors définir de manière naturelle les espaces fibrés suivants :

$W \oplus W'$ (somme de Whitney)
$W \otimes W'$ (produit tensoriel)
$\mathrm{Hom}\,(W , W')$
W^* (espace fibré dual)
$W^{(p)}$ (espace fibré des p-vecteurs)

les fibres de ces espaces au-dessus de x sont alors respectivement :

$$W_x \oplus W'_x \quad , \quad W_x \otimes W'_x \quad , \quad \mathrm{Hom}(W_x , W'_x) \quad , \quad W^*_x \quad , \quad W^{(p)}_x \quad .$$

Si au-dessus de $U \subset X$, W (resp. W') est isomorphe à $U \times C^n$ resp. $(U \times C^{n'})$ $W \otimes W'$ est isomorphe à $U \times (C^n \otimes C^{n'})$, les propositions étant analogues dans les autres cas.

De manière précise, soit $U = \{U_i\}$ un recouvrement de X , soient g_{ij} et g'_{ij} les U-cocycles définissant W et W' . Le cocycle associé à $W \oplus W'$ est :

$$\begin{pmatrix} g_{ij}(x) & 0 \\ 0 & g'_{ij}(x) \end{pmatrix} \in GL(n + n' , C) \quad \text{pour} \quad x \in U_i \cap U_j \quad .$$

Le cocycle associé à $W \otimes W'$ est :

$$g_{ij}(x) \otimes g'_{ij}(x) \in GL(n\,n' , C) \quad \text{pour} \quad x \in U_i \cap U_j$$

($\otimes$ représente le produit de Kronecker).

Le cocycle associé à W^* est :

$$g^*_{ij}(x) \in GL(n , C)$$

($g^*_{ij}(x)$ est la transposée de la matrice inverse de $g_{ij}(x)$) .

Le cocycle associé à $W^{(p)}$ est :

$$g^{(p)}_{ij}(x) \in GL(\binom{n}{p} , C)$$

où $g^{(p)}_{ij}(x)$ est la matrice obtenue de la manière suivante :

soit (e_i) , $i = 1 , 2 , \dots , n$ une base de C^n , et $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})$ $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ une base de l'espace vectoriel des p-vecteurs de C^n . A toute matrice $g \in GL(n , C)$ on associe la matrice $g^{(p)}$ telle que $g^{(p)}(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = g(e_{i_1}) \wedge \dots \wedge g(e_{i_p})$. Si l'on change la base (e_i) $g^{(p)}$ est transformée par un automorphisme intérieur de $GL(\binom{n}{p}, C)$. La classe de cohomologie de $g_{ij}^{(p)}(x)$ est donc définie sans ambiguité.

On voit sans peine que les cocycles ci-dessus restent dans la même classe de cohomologie quand g_{ij} ou g'_{ij} sont remplacés par des cocycles cohomologues. Le procédé ci-dessus définit donc la somme de Whitney, le produit tensoriel, etc.. non seulement pour les fibrés à fibre vectorielle W et W', mais encore pour les classes d'équivalences de fibrés à groupe structural $GL(n, C)$. Ainsi par exemple si $\xi \in H^1(X, GL(n, C))$ et $\xi' \in H^1(X, GL(n', C))$, $\xi \otimes \xi'$ est un élément de $H^1(X, GL(nn', C))$ etc...

PROPOSITION 1.2.- Soient W, W', W'' des espaces fibrés à fibre vectorielle de base X. On a :

$$(W \oplus W') \oplus W'' \approx W \oplus (W' \oplus W'') \qquad W \oplus W' \approx W' \oplus W$$
$$(W \otimes W') \otimes W'' \approx W \otimes (W' \otimes W'') \qquad W \otimes W' \approx W' \otimes W$$
$$(W \oplus W') \otimes W'' \approx (W \otimes W'') \oplus (W' \otimes W'')$$
$$(W \oplus W')^* \approx W^* \oplus W'^* \qquad (W \otimes W')^* = W^* \otimes W'^*$$
$$(W^{(p)})^* \approx (W^*)^{(p)}$$
$$(W^*)^{(n)} \otimes W^{(p)} \approx W^{*(n-p)} \qquad (\text{si } W \text{ a pour fibre } C^n)$$
$$\mathrm{Hom}\,(W, W') \approx W^* \otimes W'.$$

la démonstration est immédiate : il suffit de vérifier qu'on a des isomorphismes pour les fibres au-dessus de chaque point x, et la propriété découle alors des isomorphismes canoniques bien connus en algèbre linéaire.

REMARQUE.- Tout ce qui précède est encore valable pour les espaces fibrés à fibre vectorielle réelle.

2.- Espace fibré des vecteurs tangents aux points d'une variété différentiable.

2.1.- Soit V_n une variété différentiable C^∞ de dimension n, et U_i un ouvert de V_n où sont définies des fonctions coordonnées $x_1, \dots, x_n$. Si U_j est un autre ouvert de V_n, ayant des coordonnées $y_1, \dots, y_n$, le déterminant $\dfrac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$ est non nul dans $U_i \cap U_j$.

La matrice $g_{ij}(x)$ de coefficients $\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, \dots, n)$ est donc un élément de $\Gamma(U_i\ U_j, (GL(n, R))_d)$.

On voit sans peine que g_{ij} est un cocycle qui définit donc un élément ${}_R\theta$ de l'ensemble de cohomologie $H^1(V_n, (GL(n, R))_d)$. Prenons comme recouvrement $U = \{U_i\}$ de V_n le recouvrement "maximal" intervenant dans la définition de V_n (Cf. exposé 7, paragraphe 1). Le fibré ${}_R\mathcal{T}$ associé à ${}_R\theta$ défini par ce recouvrement, de fibre R^n et de groupe structural $GL(n, R)$ est appelé le fibré des vecteurs tangents à la variété V_n. Tout point de la fibre ${}_R\mathcal{T}_x$ en $x \in V_n$ s'identifie canoniquement à un vecteur tangent en x à V ; une section de ${}_R\mathcal{T}$ au-dessus d'un ouvert U s'identifie à un champ de vecteurs tangents à V_n aux points de U. ${}_RT = {}_R\mathcal{T}^*$ est l'espace fibré des différentielles (ou covecteurs) de V_n, $(\mathcal{T}^*)^{(p)}$ l'espace fibré des p-formes différentielles.

Comme toute matrice réelle à déterminant non nul peut être considérée comme une matrice à coefficients complexes (et à déterminant $\neq 0$), on a une application canonique $GL(n, R) \longrightarrow GL(n, C)$. $g_{ij}(x) \in GL(n, R)$ pour $x \in U_i \cap U_j$ étant considéré comme élément de $GL(n, C)$ définit alors un espace fibré ${}_R\mathcal{T}_C$ de fibre C^n, de groupe structural $GL(n, C)$ appelé le complexifié de ${}_R\mathcal{T}$.

2.2.- Soit maintenant V_n une variété analytique complexe de dimension n. On définit comme précédemment un cocycle $g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, (GL(n, C))_\omega)$, $g_{ij}(x)$ étant la matrice de coefficients $\dfrac{\partial z_\alpha}{\partial z'_\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$ $\{z_\alpha\}$ (resp. $\{z'_\beta\}$ étant un système de coordonnées dans U_i (resp. U_j). Ce cocycle définit un élément $\theta \in H^1(V_n, (GL(n, C))_\omega)$. Le fibré associé à θ défini par un recouvrement maximal, de fibre C^n et groupe structural $GL(n, C)$ sera désigné par $\mathcal{T}$. Soit $\bar{\mathcal{T}}$ le fibré associé au cocycle $\overline{g_{ij}(x)}$ (matrice complexe conjuguée de $g_{ij}(x)$) ; soient enfin T et $\bar{T}$ les fibrés duaux de $\mathcal{T}$ et $\bar{\mathcal{T}}$. Remarquons que $\bar{\mathcal{T}}$ et $\bar{T}$ ne sont pas des fibrés analytiques complexes. V_n peut être considéré comme une variété différentiable réelle de dimension $2n$; $Gl(n, C)$ se plonge naturellement dans $GL(2n, R)$.

θ peut alors être considéré comme un élément de $H^1(V_n, (GL(2n, R))_d)$ auquel on peut attacher les fibrés ${}_R\mathcal{T}$, ${}_R\mathcal{T}_C$ etc...

On a alors des isomorphismes canoniques :

(1) $${}_R\mathcal{T}_C \approx \mathcal{T} \oplus \bar{\mathcal{T}}$$

(2) $${}_R\mathcal{T}^*_C \approx T \oplus \bar{T}$$

(3) $$({}_R\mathcal{T}_C)^{*(r)} \approx \sum_{p+q=r} T^{(p)} \otimes \bar{T}^{(q)}$$ ($\sum$ représente une somme de Whitney).

$T^{(p)}$ est l'espace fibré analytique complexe des "p formes différentielles holomorphes". Une forme de $T^{(p)} \otimes \bar{T}^{(q)}$ sera dite de type (p , q) ; dans un voisinage de coordonnées $z_1 , \ldots , z_n$, elle est somme d'expressions de la forme $a(z_1 , \ldots , z_n , \bar{z}_1 , \ldots , \bar{z}_n)\, dz_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_{\alpha_p} \wedge d\bar{z}_{\beta_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{\beta_q}$ grâce à l'identification (3).

La vérification des propriétés (1) , (2) et (3) est immédiate : il suffit encore une fois de regarder ce qui se passe dans chaque fibre.

2.3.- V_n étant comme précédemment une variété analytique complexe de dimension complexe n , ${}_R\mathcal{T}$ est associé à ${}_{R_1}\theta$ où ${}_R\theta$ est l'image de θ par l'application $H^1(V_n , (GL(n , C))_d) \longrightarrow H^1(V_n , (GL(2n , R))_d)$; en d'autre terme, on peut restreindre le groupe structural $GL(2n , R)$ de ${}_R\mathcal{T}$ à $GL(n , C)$.

Inversement soit V_{2n} une variété différentiable C^∞ de dimension réelle $2n$, ${}_R\mathcal{T}$ l'espace fibré des vecteurs tangents à V_{2n} , et supposons que l'on puisse restreindre le groupe structural à $GL(n , C)$. On dira qu'une telle variété est munie d'une <u>structure presque complexe</u>.

Une variété V_{2n} presque complexe est toujours <u>orientable</u> dans le sens suivant : V_n est dite orientable si on peut restreindre le groupe structural de ${}_R\mathcal{T}$ à $GL^+(n , R)$, le groupe des matrices inversibles (n , n) à déterminant > 0. Comme V_{2n} est presque complexe, on peut choisir le cocycle $g_{ij}(x)$ définissant ${}_R\mathcal{T}$ de manière à ce qu'il prenne ses valeurs dans l'image de $GL(n , C)$ par l'application $GL(n , C) \longrightarrow GL(2n , R)$. Mais l'image de $A + iB \in GL(n , C)$ (A et B réelles) est $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ et cette matrice $\in GL^+(2n , R)$.

3.- <u>Fibrés induits, Fibrés quotients, Fibrés diagonaux</u>.

$GL(r , q-r ; C)$ désigne le sous-groupe de $GL(q , C)$ des matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$ où $A' \in GL(r , C)$ $A'' \in GL(q-r , C)$ et B une matrice rectangulaire à r lignes et $q-r$ colonnes. On définit de même $GL(r , q-r ; R)$.

$\Delta(q , C)$ désigne le sous-groupe de $GL(q , C)$ des matrices triangulaires dont tous les coefficients sont nuls au-dessous de la diagonale principale. On a $\Delta(q , C) \cap U(q) = T^q =$ tore maximal de $U(q)$.

3.1.- Soit $A \in GL(r , q-r ; C)$ $A \longrightarrow \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$ est un homomorphisme $h : GL(r , q-r ; C) \longrightarrow GL(r , C) \times GL(q-r , C)$ dont le noyau est formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(pour simplifier l'écriture nous dirons qu'un élément de $H^1(X , G)$ est un G-fibré).

L'homomorphisme h associe à tout $GL(r, q-r; C)$ - fibré ξ deux fibrés ξ' et ξ'' où ξ' est un $GL(r, C)$ - fibré et ξ'' un $GL(q-r, C)$-fibré. ξ' est le fibré induit, ξ'' le fibré quotient de ξ.

Par abus de langage on dira que le $GL(q, C)$ - fibré ξ a ξ' et ξ'' pour fibré induit et fibré quotient s'il existe un $GL(r, q-r; C)$ - fibré dont l'image par $GL(r, q-r; C) \longrightarrow GL(q, C)$ est ξ et qui a ξ' et ξ'' pour fibré induit et fibré quotient. Soit ξ un $GL(q, C)$ -fibré différentiable (ou continu) :

PROPOSITION 3.1.- Si ξ a ξ' et ξ'' pour fibré induit et fibré quotient $\xi = \xi' \oplus \xi''$.

En effet $GL(r, C) \times GL(q-r, C)$ et $GL(r, q-r; C)$ ont tous deux comme groupe compact maximal $U(r) \times U(q-r)$ donc (théorème 5.5, exposé 17) $H^1(X, (GL(r, C) \times GL(q-r, C))_d) \approx H^1(X, (GL(r, q-r; C))_d)$; on peut donc prendre pour définir ξ un cocycle prenant ses valeurs dans le groupe $GL(r, C) \times GL(q-r, C)$, c'est-à-dire de la forme

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g'_{ij} & 0 \\ 0 & g''_{ij} \end{pmatrix}$$

comme ici $hg_{ij} = g_{ij}$ la proposition s'en déduit par définition même de ξ', ξ'' et de la somme de Whitney.

3.2.- Soit $A \in \Delta(q, C)$. L'application qui fait correspondre à A le k-ième élément de la diagonale principale de A est un homomorphisme φ_k : $\Delta(q, C) \longrightarrow C^*$ ou $C^* = GL(1, C)$ est le groupe multiplicatif du corps des complexes C. L'application φ_k fait correspondre à tout $\Delta(q, C)$-fibré ξ un C^*-fibré φ_k. $\xi_1, \dots, \xi_q$ sont appelés les fibrés diagonaux de ξ.

Par abus de langage, on dira que le $GL(q, C)$-fibré ξ a $\xi_1, \dots, \xi_q$ pour fibrés diagonaux s'il existe un $\Delta(q, C)$ fibré dont l'image par $\Delta(q, C) \longrightarrow GL(q, C)$ est ξ et qui a $\xi_1, \dots, \xi_q$ pour fibrés diagonaux.

Soit ξ un $GL(q, C)$ fibré différentiable (ou continu).

PROPOSITION 3.2.- Si ξ a $\xi_1, \dots, \xi_q$ pour fibrés diagonaux,

$$\xi = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_q$$

En effet $\underbrace{C^* \times \ldots \times C^*}_{q \text{ fois}}$ et $\Delta(q , C)$ ont tous deux comme groupe compact maximal le tore T^q. Donc (théorème 5.5 , exposé 17)

$$H^1(X , (C^* \times \ldots \times C^*))_d) \approx H^1(X , (\Delta(q , C))_d) .$$

On peut donc prendre pour définir ξ un cocycle prenant ses valeurs dans le groupe $C^* \times \ldots \times C^*$ c'est-à-dire de la forme

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{ij}^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_{ij}^q \end{pmatrix}$$

comme ici $\varphi_k\, g_{ij} = g_{ij}^k$, la proposition est démontrée par définition même de ξ_k et de la somme de Whitney.

<u>REMARQUE 1</u>.- Les propositions 3.1 et 3.2 sont en général fausses dans le cas analytique complexe.

<u>REMARQUE 2</u>.- Le paragraphe 3.1 et la proposition 3.1 sont valables sans changement dans le cas réel à condition de remplacer partout C par R .

3.3.- Appliquons maintenant le théorème 5.2 de l'exposé précédent pour savoir quand un $GL(q , C)$- fibré ξ (continu, différentiable analytique complexe) est l'image d'un $GL(r , q -r ; C)$- fibré ou d'un $\Delta(q , C)$- fibré.

Soit W un espace fibré à fibre vectoriel associé à ξ (fibre C^q) et E l'espace fibré principal des isomorphismes de C^q dans W_x . Soit $[r]_W = E/GL(r , q - r ; C)$ la fibre $[r]_{W_x}$ est homéomorphe à $GL(q , C)/GL(r , q - r ; C) \approx U(q)/U(r) \times U(r - q) = \mathcal{G}(r , q - r ; C)$: c'est une grassmannienne. Les trois fibrés W , E , $[r]_W$ sont tous associés à ξ . Supposons que $[r]_W$ ait une section s (continue, différentiable ou analytique complexe). Pour tout $x \in X$, $s(x) \in [r]_{W_x}$. Or $\mathcal{G}(r , q - r ; C)$ peut être identifié à l'espace des r-plans de C^q . A tout x , la section s fait donc correspondre un sous-espace W'_x de W_x à r-dimensions. L'ensemble des W'_x est un fibré W'_x ; posons $W''_x = W_x/W'_x$, et soit W'' le fibré réunion de ξ à $GL(r , q - r ; C)$, ξ admet donc un fibré induit ξ' et un fibré quotient ξ'' . W' est associé à ξ' , W'' à ξ'' . De même soit $\Delta_W = E/ \Delta(q , C)$ de fibre $GL(q , C)/ \Delta(q , C) = U(q)/T^q$; un point de cette variété peut s'identifier à une suite d'espacesvectoriels emboités $L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_q = C^q$ avec $\dim L_r = r$, $L_0 = 0$.

Supposons que Δ_W ait une section $s(x)$ (continue, différentiable ou analytique complexe) : $s(x)$ est une suite $L_{0,x} \quad L_{1,x} \subset \dots \subset L_{q,x} = W_x$. L'ensemble des $L_{r,x}$ est un fibré sur X de fibre C^r , soit $W_{(r)}$.

Soit A_r le fibré, de fibre C^* ensemble des $L_{r+1,x}/L_{r,x}$. D'après le théorème 5.2 , on peut restreindre le groupe structural de ξ à $\Delta(q , C)$, ξ admet donc des fibrés diagonaux $\xi_1 , \dots , \xi_q$ et A_r est associé à ξ_r .

3.4.- Dans le cas réel on peut toujours appliquer la proposition 3.1. On peut donc résumer l'étude précédente dans la proposition suivante

PROPOSITION 3.4.- Soit ξ un $GL(q , R)$-fibré (continue ou différentiable) sur X , W un espace fibré à fibre R^q associé à ξ , E l'espace fibré principal associé des isomorphismes de R^q dans W_x . L'espace fibré $[r]_W = E/GL(r , q-r ; R)$ a pour fibre au-dessus de x la variété de Grassmann des r-plans non orientés de W_x . Si $[r]_W$ a une section $s(x)$, c'est-à-dire si W a un champ continu (resp. différentiable) de r-plans, l'ensemble des $s(x)$ est un espace fibré W' sur X de fibre R^r ; l'ensemble des $W_x/s(x)$ est un fibré W'' de fibre R^{q-r} . W' est associé à un $GL(r , R)$- fibré ξ' , W'' est associé à un $GL(q - r , R)$- fibré ξ'' et $\xi = \xi' \oplus \xi''$, $W = W' \oplus W''$.

Dans cette proposition on peut remplacer partout non orienté par orienté à condition de remplacer $GL(q , R)$ par $GL^+(q , R)$ etc... $\mathcal{G}(r , q - r ; R)$ par $\mathcal{G}^+(r , q - r ; R) = SO(q)/SO(r) \times SO(q - r)$.