J.-P. LAFON

Anneaux henséliens

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. n° 19, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A18_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1956/57
-:-:-:-

ANNEAUX HENSÉLIENS

(Exposé de J.-P. LAFON, le 29.4.1957)

Cet exposé a pour but de donner quelques résultats, d'ailleurs les plus élémentaires, obtenus par M. Nagata dans deux articles parus au Nagoya mathematical Journal sur les anneaux henséliens.

Les anneaux henséliens ont été introduits par G. Azumaya comme des anneaux locaux (non nécessairement noethériens) satisfaisant au lemme de Hensel, et Azumaya en donne une caractérisation générale (1) .

Nagata, en vue d'application à des théorèmes d'irréductibilité et de normalité analytique, s'est surtout intéressé aux anneaux henséliens intègres et intégralement clos. La partie centrale de ses articles concerne la théorie de l'hensélisation : il existe en quelque sorte, à un isomorphisme près, un plus petit anneau hensélien dominant l'annneau de départ et cet anneau, appelé hensélisation de l'anneau de départ, possède un grand nombre de propriétés très intéressantes.

Nous nous bornerons ici à donner des caractérisations d'anneaux henséliens intègres et intégralement clos ; les démonstrations ne différeront de celles de Nagata que par la forme et surtout par une concision moins grande, certains points, probablement non évidents, n'étant pas ou peu explicités dans le mémoire original.

A.- ANNEAUX HENSÉLIENS

Dans tout cet exposé, nous entendrons par anneau un anneau commutatif à élément unité différent de zéro.

DÉFINITION.- Soit A un anneau et soit p un idéal premier de A . Nous désignerons par A' l'anneau quotient A/p . Si $g(x)$ est un polynome à coefficients

(1) La condition nécessaire et suffisante pour que l'anneau local A soit hensélien est que pour toute extension entière finie B de A et pour tout idéal i de B , tout idempotent de B/i puisse être relevé en un idempotent de B .

dans A , $g'(x)$ sera le polynome à coefficients dans A' déduit de $g(x)$ par réduction modulo p de ses coefficients.

Un polynome unitaire $f(x)$ à coefficients dans A sera dit satisfaire au lemme de Hensel localement en p si la propriété suivante est réalisée : toute décomposition $f'(x) = g'(x)\, h'(x)$ de $f'(x)$ en deux polynomes (unitaires) à coefficients dans A' , $g'(x)$ et $h'(x)$, sans racine commune, peut être "relevée" en une décomposition $f(x) = g(x)h(x)$ où $g(x)$ et $h(x)$ sont des représentants unitaires de $g'(x)$ et $h'(x)$ dans $A[x]$.

Cette définition appelle quelques remarques :

Si p n'est pas maximal, le fait que $g'(x)$ et $h'(x)$ n'aient pas de racine commune (dans une clôture algébrique du corps des quotients de A') n'implique pas que $g'(x)$ et $h'(x)$ soient étrangers ; par exemple, x et $x+a'$ où a' est non inversible de A' sont sans racine commune et ne sont pas étrangers.

Si A est intègre, il est inutile de dire représentants unitaires.

A sera dit localement hensélien en p si tout polynome unitaire à coefficients dans A satisfait au lemme de Hensel localement en p .

En fait, le cas le plus important est le cas où A est un anneau local, c'est-à-dire n'ayant qu'un seul idéal maximal (sans la condition d'être noethérien ou de vérifier le théorème d'intersection de Krull) et où p est l'idéal maximal de A . Nous dirons dans ce cas hensélien au lieu de localement hensélien en p . Par exemple, un anneau local, avec condition de Krull, complet est hensélien et cette propriété est fondamentale pour les théorèmes de structure de Cohen.

1.- Structure des anneaux henséliens.

A désignera un anneau local d'idéal maximal p : toutes les démonstrations qui suivent sont d'ailleurs valables pour tout anneau A et pour tout idéal maximal p de A .

PROPOSITION.- Pour que A soit hensélien, il faut et il suffit que tout polynome unitaire irréductible [2] à coefficients dans A satisfasse au lemme de Hensel (localement en p).

---

[2] "irréductible" signifiant que $f(x)$ n'est divisible par aucun polynome unitaire à coefficients dans A . Cette remarque est évidemment inutile si A est intègre.

La condition est évidemment nécessaire.

Elle est suffisante : soit en effet $f(x)$ un polynome unitaire à coefficients dans A ; il peut être décomposé en un produit de polynomes unitaires irréductibles : $f(x) = (f_1(x))^{d_1} \dots (f_n(x))^{d_n}$ sans unicité en général. Dire que les $f_i(x)$ satisfont au lemme de Hensel, c'est dire que les $f_i'(x)$ sont irréductibles ou sont puissances d'un polynome unitaire et irréductible de $A'[x]$: les $f_i'(x)$ sont donc en quelque sorte les facteurs irréductibles de $f'(x)$. Il est alors immédiat que toute décomposition de $f'(x)$ en polynomes unitaires étrangers peut être relevée au moyen des $f_i(x)$.

Nous supposerons donc $f(x)$ irréductible dans $A[x]$. Examinons successivement les deux possibilités pour $f'(x)$.

1°) $f'(x)$ <u>est irréductible</u> :

Considérons $A[x]/(f(x)) = A[a]$: c'est une extension entière de A et c'est un A-module libre de base $1, a, \dots, a^{n-1}$. Montrons que $A[a]$ est local et que $pA[a]$ est son idéal maximal : il suffit évidemment de montrer que :

$$pA[a] \cap A = p \quad .$$

C'est évident puisque tout élément de $A[a]$ s'exprime d'une manière et d'une seule comme combinaison linéaire à coefficients dans A de $1, a, \dots, a^{n-1}$.

$A[a]/pA[a] = A'[a']$ où a' classe de a satisfait à $f'(x) = 0$; donc $A[a]/pA[a]$ est un corps et il s'ensuit que $pA[a]$ est maximal. Comme, d'autre part, tout idéal maximal de $A[a]$ contient $pA[a]$, $A[a]$ est local.

2°) $f'(x) = (g'(x))^e$ <u>où</u> $g'(x)$ <u>est irréductible dans</u> $A'[x]$.

Montrons que $A[a]$ est encore local. Si q est un idéal maximal de $A[a]$, $A[a]/q = A/p[a']$ où a' est la classe de a modulo q ; en effet $q \cap A = p.a'$, satisfaisant à $f'(x) = 0$, satisfait à $g'(x) = 0$. Si $g(x)$ est un représentant unitaire de $g'(x)$, q contient $g(a)$ et par suite $(p, g(a))A[a] = r$.

Montrons que r est maximal : d'abord, $r \cap A = p$; en effet $(g(x))^e = f(x) + P(x)$ où $P(x)$ est un polynome à coefficients dans p ; il s'ensuit que $(g(a))^e$ appartient à $pA[a]$ et par suite que $r(g(a))^{e-1}$ est contenu dans $pA[a]$; si un élément de $r \cap A$ n'appartient pas à p, $g(a)^{e-1}$ aurait tous ses coefficients dans p, donc $g(x)^{e-1}$ aurait tous ses coefficients dans p et c'est impossible. $A[a]/r = A/p[a']$ où a' satisfait donc à $g'(x) = 0$: donc, $A[a]/r$ est un corps et r est maximal.

Si donc $f(x)$ irréductible satisfait au lemme de Hensel, $A[x]/(f(x))$ est un anneau local. Soit b une racine quelconque de $f(x)$, $A[b]$ est isomorphe à $A[x]/I$ si I est l'idéal des polynomes à coefficients dans A admettant a pour racine ; or $A[x]/I$ est isomorphe à $A[x]/(f(x))/I/(f)$ et par suite, si $f(x)$ satisfait au lemme de Hensel, toute extension entière de A obtenue par adjonction d'une racine de $f(x)$ est un anneau local. (3)

Nous nous bornerons maintenant au cas d'un anneau local intègre.

Si A est un tel anneau, soit $A[a]$ une extension entière monogène intègre: soit $f(x)$ le polynome unitaire de plus petit degré parmi les polynomes unitaires à coefficients dans A admettant a pour racine ; il est irréductible.

THÉORÈME.- Une condition nécessaire pour que l'anneau local intègre A soit hensélien est que toute extension monogène entière intègre soit locale.

Nagata a montré en se servant de sa théorie de l'hensélisation que cette condition est aussi suffisante (4) . Remarquons qu'il n'est sans doute pas vrai en général que, si $f(x)$ est unitaire irréductible dans $A[x]$ où A est un anneau, l'idéal $f(x)A[x]$ soit premier et par suite l'extension entière monogène $A[x]/(f(x))$ n'est pas nécessairement intègre. C'est toutefois le cas si A est intégralement clos (c'est-à-dire intégralement fermé dans son corps des quotients). Démontrons donc :

THÉORÈME.- Si A est un anneau intègre et intégralement clos et si $f(x)$ est un polynome unitaire à coefficients dans A et irréductible dans $A[x]$, l'idéal $f(x)A[x]$ est premier.

Soit k le corps des quotients de A. Montrons que $f(x)A[x] = f(x)k[x] \cap A[x]$: un élément de $f(x)k[x]$ peut s'écrire $f(x).g(x)/c$ où $g(x)$ est à coefficients dans A et où c appartient à A ; s'il appartient à $A[x]$, le coefficient du terme de plus haut degré de $g(x)/c$ appartient à A et par suite, le coefficient du terme de plus haut degré de $g(x)$ est divisible par b. Si $g_1(x)$ est obtenu à partir de $g(x)$ par suppression du terme de plus haut degré, $f(x)g_1(x)/c$ doit appartenir à $A[x]$, ...

La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)A[x]$ soit premier est

---

(3) La réciproque est d'ailleurs exacte comme le montrera la suite de l'exposé.

(4) Une démonstration directe ne parait pas immédiate.

que $f(x)k[x]$ soit premier dans $k[x]$, donc que $f(x)$ soit irréductible dans $k[x]$: il suffit évidemment de montrer que $f(x)A[x]$ premier dans $A[x]$ implique $f(x)k[x]$ premier dans $k[x]$ et c'est évident.

A étant intégralement clos, $f(x)$ irréductible dans $A[x]$ implique $f(x)$ irréductible dans $k[x]$ car une décomposition $f(x) = g(x)\,h(x)$ dans $k[x]$ donne pour coefficients de $g(x)$ et $h(x)$ des fonctions symétriques de racines de $f(x)$ dans une fermeture algébrique de k, donc des entiers sur A, donc des éléments de A.

<u>COROLLAIRE 1.</u>- <u>Tout polynome unitaire à coefficients dans un anneau intégralement clos A est décomposable de manière unique en un produit de polynomes unitaires irréductibles de</u> $A[x]$.

Si A est intégralement clos et si $f(x)$ est un polynome unitaire à coefficients dans A irréductible $A[x]/(f(x)) = A[a]$ est donc une extension intègre. Soit L une fermeture algébrique du corps des quotients de $A[a]$ et soit b une racine quelconque de $f(x)$ dans L. Les anneaux $A[a]$ et $A[b]$ sont A-isomorphes comme les corps $k(a)$ et $k(b)$ sont k-isomorphes, d'où :

<u>COROLLAIRE 2.</u>- <u>Si</u> b <u>est une racine quelconque du polynome</u> $f(x)$ <u>dans un surcorps de</u> k, <u>le A-module</u> $A[b]$ <u>est un A-module libre de base</u> $1, b, \dots, b^{n-1}$, <u>si</u> n <u>est le degré de</u> $f(x)$.

Ce corollaire va nous permettre de montrer de manière simple dans le cas d'un anneau local intègre et intégralement clos que la condition nécessaire énoncée précédemment pour que A soit hensélien est aussi suffisante.

Supposons en effet que A ne soit pas hensélien ; il existe donc un polynome $f(x)$ unitaire et irréductible de $A[x]$ tel que $f'(x) =$ $= (f_1'(x))^{d_1} \dots (f_n'(x))^{d_n}$ soit une décomposition de $f'(x)$ en facteurs irréductibles avec n au moins égal à 2. Montrons que dans ces conditions $A[a]$ où a est une racine de $f(x)$ ($A[a]$ intègre) n'est pas local.

Soit q un idéal maximal de $A[a]$; $A[a]/q = A'[a']$ où a', classe de a modulo q satisfait à $f'(x) = 0$, donc puisque $A'[a']$ est intègre à $f_i'(x) = 0$ pour un i compris entre 1 et n ; si $f_i(x)$ est un représentant de $f_i'(x)$ dans $A[x]$, q contient donc $p_i' = (p\,,\ f_i(a))A[a]$. Montrons que les p_i' sont "sur" p : ceci résulte comme dans 2°) du fait que $A[a]$ est un A-module libre de base $1, a, \dots, a^{n-1}$; il existe en effet $g_i(a)$ dont les coefficients quand on l'exprime au moyen de cette base ne sont pas tous dans p et tel que $g_i(a)p_i'$ soit contenu dans $pA[a]$ ... Par suite, $A[a]/p_i' = A'(a')$ où a' satisfait à $f_i'(x) = 0$, donc p_i' est maximal. Reste à montrer que les p_i' sont distincts : or, $f_i(x)A[x] + f_j(x)A[x] + pA[x] = A[x]$ si i et j sont distincts et ceci implique $p_i' + p_j' = A[x]$; p_i' et p_j' sont donc distincts puisqu'ils sont propres.

THÉORÈME FONDAMENTAL.- La condition nécessaire et suffisante pour que l'anneau local A intègre et intégralement clos soit hensélien est que toute extension entière monogène intègre de A soit locale.

Remarquons qu'il est possible dans l'énoncé de ce théorème de remplacer "toute extension entière monogène intègre" par toute extension entière intègre. Il suffit, en effet, de montrer que si toute extension entière monogène intègre est locale il en est de même de toute extension entière intègre : soit B une telle extension et supposons que B ait deux idéaux maximaux distincts r et s ; prenons a appartenant à r et n'appartenant pas à s et considérons $A[a]$; les idéaux $r \cap A[a]$ et $s \cap A[a]$ sont maximaux, le premier contient a , le second ne le contient pas : ils sont donc distincts.

2.- Structure des anneaux intégralement clos localement henséliens en un idéal premier.

L'introduction de ces anneaux nous sera utile pour la théorie de l'hensélisation d'un anneau local.

Nous allons ramener l'étude de ces anneaux à l'étude d'anneaux henséliens par le procédé classique de passage à l'anneau des quotients.

PROPOSITION.- Soit A un anneau intègre et intégralement clos et soit p un idéal premier de A . Si A_p est hensélien, A est localement hensélien en p .

Soit, en effet, $f(x)$ un polynome unitaire à coefficients dans A , et supposons que $f'(x) = g'(x)\,h'(x)$ où $g'(x)$ et $h'(x)$ sont des polynomes unitaires à coefficients dans A' et sans racine commune. Le corps des quotients de A' est isomorphe au corps des restes A_p/pA_p de A_p ; donc, la décomposition peut être relevée en une décomposition dans $A_p[x] : f(x) = g(x)\,h(x)$; les coefficients de $g(x)$ et $h(x)$ sont entiers sur A , donc, appartiennent à A et le relèvement se fait donc nécessairement dans $A[x]$.

PROPOSITION.- Si toute extension entière intègre de A_p est locale, toute extension entière intègre de A n'a qu'un seul idéal premier "sur" p, et réciproquement.

Soit B une extension entière intègre de A_p ; nous pouvons la supposer intégralement close ; si L est le corps des quotients de B, désignons par $\hat{A}$ la fermeture intégrale de A dans L et par S le complémentaire de p dans A ; il est évident que $B = \hat{A}_S$; si $\hat{A}$ n'a qu'un seul idéal premier $\hat{p}$ sur p, $\hat{p}_S$ est l'unique idéal maximal de B. (5)

En utilisant les deux propositions, nous voyons que, si toute extension entière intègre de A n'a qu'un seul idéal premier sur p, A_p est hensélien en vertu du théorème fondamental, et que, par suite, A est localement hensélien en p.

Il est d'autre part, facile de montrer que, si A (non nécessairement intégralement clos) est localement hensélien en p, toute extension entière intègre de A n'a qu'un seul idéal premier sur p. Soit, en effet, B une telle extension et supposons qu'il existe dans B deux idéaux premiers distincts q et r sur p. Soit a appartenant à q et n'appartenant pas à r ; soit $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ le polynome irréductible à coefficients dans A dont a est racine : $a_n = -a(a^{n-1} + \dots + a_{n-1})$ appartient à q, donc à p. Tous les coefficients de $f(x)$ ne peuvent être dans p car, sinon, a^n serait dans pB, donc dans r et il en serait de même de a. Supposons que $a_n, \dots, a_{r+1}$ soient dans p et que a_r ne soit pas dans p ; $f'(x) = x^r g'(x)$ où x et $g'(x)$ n'ont pas de racine commune puisque $g'(0) = a'_r$. Ceci implique que A n'est pas localement hensélien en p. (6)

THÉORÈME.- La condition nécessaire et suffisante pour que l'anneau A intègre et intégralement clos soit localement hensélien en l'idéal premier p est que toute extension entière intègre n'ait qu'un seul idéal premier sur p.

Comme dans le cas local, il est clair que les extensions entières monogènes intègres suffisent pour cette caractérisation.

---

(5) Il est facile de montrer que les idéaux premiers sur p dans $A[a]$, entier sur A, correspondent biunivoquement aux idéaux maximaux de $A_p[a]$.

(6) Dans le cas d'un anneau intégralement clos, il est possible de raffiner cette démonstration, et Nagata énonce le théorème suivant :
Un anneau A intégralement clos est localement hensélien en son idéal premier p si et seulement si tout polynome unitaire $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ tel que a_1 appartienne à $A-p$ et a_i à p $(i = 2, \dots, n)$ a un facteur linéaire $x+a$ avec $a = a_1$ modulo p.

B.- HENSÉLISATION

Si A est un anneau intègre et intégralement clos et si p est un idéal premier de A, nous nous proposons d'étudier la famille (H) des sur-anneaux B de A intègres et intégralement clos, localement henséliens en un idéal premier q sur p, et, de façon plus précise de montrer l'existence d'un plus petit élément de (H), à un isomorphisme près sur A.

Plus généralement, soit A un anneau intègre et soit (H_1) la famille des sur-anneaux de A intègres et localement henséliens en un idéal premier q sur l'idéal premier p de A :

THÉORÈME.- Si B appartient à (H_1), il en est de même de la fermeture intégrale séparable B_s de A dans B.

Posons $q_s = q \cap B_s$ et montrons que B_s est localement hensélien en q_s. Soit, en effet, $f(x)$ un polynome unitaire irréductible de $B_s[x]$ et supposons que, dans $B_s/q_s[x]$, $f'(x) = g'(x)h'(x)$ où $g'(x)$ et $h'(x)$ sont sans racine commune. B étant localement hensélien en q et B/q étant un sur-anneau de B_s/q_s, $f(x) = g(x)h(x)$ dans $B[x]$ où les deux polynomes $g(x)$ et $h(x)$ ont pour images, dans $B/q[x]$, $g'(x)$ et $h'(x)$ et sont donc sans racine commune. Les coefficients de $g(x)$ et $h(x)$ sont évidemment entiers sur B_s ; montrons qu'ils sont séparables sur le corps des quotients k_s de B_s : il suffit, en effet, de décomposer $f(x)$ dans une fermeture algébrique du corps des quotients k de B ; si $f(x)$ est séparable, la propriété est immédiate ; sinon, il suffit de raisonner sur les facteurs de $g(x)$, ils sont de la forme :
$x^{p^e} - a^{p^e}$ et les coefficients, à savoir 1 et a^{p^e} sont séparables ; il s'ensuit que les coefficients dans un produit de facteurs de ce type sont aussi séparables. Les coefficients de $g(x)$ et $h(x)$ sont donc entiers séparables sur B_s, donc entiers séparables sur A, donc appartiennent à B_s, ceci est impossible en vertu de l'irréductibilité de $f(x)$ dans $B_s[x]$. Donc, B_s est localement hensélien en q_s.

REMARQUE : a fortiori, la fermeture intégrale B_1 de A dans B appartient à (H_1).

Revenons maintenant à un anneau A intégralement clos et à la famille (H) et démontrons que, dans ce cas, B_s est intégralement clos, donc, appartient à (H). Désignons, en effet, par k, k_s, K, les corps des quotients respectifs de A , B_s , B et soit a appartenant à k_s et entier sur B_s : il est entier sur A et, d'autre part, appartenant à k_s est séparable sur k , donc, entier séparable sur A ; mais, il appartient à K et est entier sur B , donc appartient à B , ce qui prouve qu'il est dans B_s .

Ceci nous permet, dans la recherche d'un plus petit élément dans (H) , de considérer la sous-famille des éléments de (H) entiers sur A . Nous désignerons par L une fermeture algébrique du corps des quotients de A et nous n'envisagerons, dans ce qui suit, que la sous-famille (S) des éléments de (H) contenus dans la fermeture intégrale séparable L_s de A dans L . Soit q_s un idéal premier de L_s sur p .

Nous admettrons sans démonstration le lemme suivant [7] :

LEMME.- Soit A intègre et intégralement clos et soit K' une extension algébrique normale du corps des quotients de A . Soit A' la fermeture intégrale de A dans K' . Si p'_1 et p'_2 sont deux idéaux premiers de A' tels que $p'_1 \cap A = p'_2 \cap A$, p'_1 et p'_2 sont conjugués sur le corps des quotients de A .

Remarquons que, si A' est la fermeture intégrale de A dans une extension algébrique K' du corps des quotients K de A , A' est intégralement clos et admet K' pour corps des quotients et que, réciproquement, toute extension entière intégralement close A' de A est la fermeture intégrale de A dans son corps des quotients.

Soit donc A intègre et intégralement clos, de corps des quotients K , et soit A' une extension entière intégralement close de A dont le corps des quotients K' soit normal sur K . Tout automorphisme de A' sur A peut être prolongé en un élément du groupe de Galois de K' sur K et, réciproquement, la restriction à A' d'un élément de ce groupe de Galois est un automorphisme de A' sur A .

Supposons que K' soit une extension galoisienne (normale et séparable) de K , de groupe de Galois G . Si p' est un idéal premier de A' , le sous-groupe H des éléments de G laissant p' globalement invariant s'appelle le groupe de décomposition de p' par rapport à A . Si G est muni de sa topologie usuelle [8],

---

(7) Voir, par exemple, séminaire CARTAN-CHEVALLEY, 8, 1955/56, exposé 1 .

(8) BOURBAKI. Algèbre, Chapitre V, appendice II.

H est un sous-groupe fermé de G : en effet, si s de G applique p' sur p'_s distinct de p', prenons a dans p' n'appartenant pas à p'_s et soit K'' la sous-extension normale de K' engendrée par a sur K ; si A'' est la fermeture intégrale de A dans K'', $(A'' \cap p')_s = A'' \cap p'_s$ est distinct de $A'' \cap p'$. Il s'ensuit que s n'appartient pas au sous-groupe des éléments de G laissant $A'' \cap p'$ invariant ; ce groupe est un voisinage fermé de H ; donc s n'appartient pas à la fermeture de H et H est fermé.

Soit alors $\hat{K}$ le sous corps de K' invariant par H et soit $\hat{A}$ la fermeture intégrale de A dans $\hat{K}$: $\hat{A}$ est l'ensemble des éléments de A' invariants par H et H est le groupe de Galois sur $\hat{K}$; $\hat{A}$ s'appelle l'anneau de décomposition de p' par rapport à A.

Pour qu'une extension entière intégralement close et plongée dans L_s soit localement hensélienne en q' sur p, il faut et il suffit qu'il n'y ait dans L_s qu'un seul idéal premier q_s sur q car, il n'y a, dans une extension entière intègre de L_s, nécessairement purement séparable, qu'un seul idéal premier sur q_s ; il faut, donc, et il suffit que le groupe de Galois de L_s sur A' (c'est-à-dire du corps des quotients de L_s sur le corps des quotients de A') soit un sous-groupe du groupe de décomposition H de q_s par rapport à A ; il faut donc et il suffit que A' soit un sur-anneau de l'anneau de décomposition $\hat{A}$ de q_s par rapport à A.

THÉORÈME.- A un A-isomorphisme près, tout élément de $(\mathcal{H})$ contient l'anneau $\hat{A}$, appelé l'hensélisation locale de A en p.

Si $\hat{p} = q_s \cap \hat{A}$, l'anneau local $\hat{A}_{\hat{p}}$ s'appelle l'hensélisation de A en p.

Il est clair que, si A' est un anneau local intègre et intégralement clos d'idéal maximal p', hensélien, tel que A' contienne A, $p' \cap A = p$, alors A' contient à un A-isomorphisme près, l'hensélisation de A en p.

Nagata montre qu'il est possible de supposer simplement A' local intègre. Nous n'aborderons pas ce problème. Il serait, sans doute, intéressant de définir directement l'hensélisation d'un anneau local intègre et non intégralement clos et de montrer, qu'en fait, dans le cas intégralement clos, cette hensélisation est intégralement close.

BIBLIOGRAPHIE

G. AZUMAYA.- On maximally central Algebras, Nagoya mathematical Journal, volume 2, 1951, p. 119-150.

M. NAGATA .- On the Theory of henselian Rings, Nagoya mathematical Journal, volume 5, 1953, p. 45-57.