Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

M. Zisman

Espaces fibrés

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. nº 17, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A17_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1956/57
-:-:-:-

Exposé n° 17

ESPACES FIBRÉS

(Exposé de M. ZISMAN, le 1.4.1957)

Variétés analytiques complexes.

La définition de ces variétés est analogue à celle des variétés C^{∞} (Cf. exposé 7) . V est une variété analytique complexe (ou de classe C^{ω}) si c'est un espace topologique séparé possédant un recouvrement ouvert $U = \{U_{\alpha}\}$ par des ouverts U_{α} homomorphes à des boules ouvertes de C^n . On définit ainsi dans chaque U_{α} des fonctions coordonnées z_{α}^{i} $(i = 1 , 2 , \ldots , n)$. Dans $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$ les coordonnées z_{α}^{i} sont astreintes à être des fonctions holomorphes des coordonnées z_{β}^{j} , à jacobien non nul. On suppose enfin que le recouvrement U est maximal pour toutes ces propriétés. On étend alors sans difficulté la plupart des définitions de l'exposé 7 : anneau des fonctions holomorphes en un point, application holomorphe d'une variété C^{ω} dans une autre.

Remarquons qu'une variété analytique complexe V_n possède une structure induite de variété analytique réelle de dimension $2n$: U_{α} est homéomorphe à une boule ouverte de R^{2n} , dans U_{α} $z_{\alpha}^{i} = x_{\alpha}^{i} + \sqrt{-1}\, y_{\alpha}^{i}$, et les 2n coordonnées $x_{\alpha}^{i}\, y_{\alpha}^{i}$ font de V_n une variété analytique réelle. Quand on parlera de l'espace tangent en un point de V_n , ou des formes différentielles de V_n , il s'agira toujours de l'espace tangent et des formes différentielles définis par la structure réelle induite par la structure analytique complexe.

1.- Les ensembles $H^1(X , G_e)$, $H^1(X , G_d)$, $H^1(X , G_{\omega})$.

1.1.- Soit G un groupe, X un espace topologique, et U un ouvert de X . L'espace des applications de U dans G , soit $\Gamma(U , G)$ est muni d'une structure de groupe. Dans la suite, nous distinguerons 3 sous-groupes intéressants de $\Gamma(U , G)$.

a) X est un espace topologique, et G un groupe topologique. $\Gamma(U , G_c)$ est le groupe des applications continues de U dans G .

b) X est une variété différentiable C^{∞} et G un groupe de Lie. $\Gamma(U , G_d)$ est le groupe des applications <u>différentiables</u> C^{∞} de U dans G .

c) X est une variété analytique complexe et G un groupe de Lie complexe. $\Gamma(U , G_{\omega})$ est le groupe des applications <u>holomorphes</u> de U dans G .

Il est entendu que dans toute la suite, lorsqu'on parle de G_c (resp. G_d , resp. G_{ω}) . X est un espace topologique (resp. variété différentiable C^{∞}, resp. analytique complexe). On a évidemment (quand les trois groupes sont définis)

$$\Gamma(U , G_{\omega}) \subset \Gamma(U , G_d) \subset \Gamma(U , G_c) .$$

Dans toute la suite de cet exposé, les résultats et définitions seront valables dans les trois cas. Pour simplifier l'écriture nous écrirons donc toujours G au lieu de G_c (resp. G_d , resp. G_{ω}).

Si $V \subset U$ on a un homomorphisme

$$\Gamma(U , G) \longrightarrow \Gamma(V , G)$$

défini par la restriction à V des fonctions définies sur U .

On posera $\Gamma(U , G) = 1$ (el. neutre de G) si $U = \emptyset$.

1.2.- <u>Définition de</u> $H^1(U , G)$.

Soit $U = \{U_i\}$ un recouvrement de X par des ouverts, et $I(U)$ l'ensemble des indices intervenant dans le recouvrement. Un U-<u>cocycle</u> est une fonction f qui, à 2 éléments ordonnés de $I(U)$, fait correspondre un élément f_{ij} $f_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j , G)$ telle que

$$f_{ij}(x) . f_{jk}(x) = f_{ik}(x) \quad \text{si} \quad x \in U_i \cap U_j \cap U_k \quad , i , j , k \in I(U)$$

(la multiplication a lieu dans G) .

On en déduit f_{ii} = él. unité de $\Gamma(U_i , G)$

$$f_{ij} = f_{ji}^{-1} \quad .$$

Deux cocycles f et f' sont dits équivalents s'il existe, pour tout $i \in I(U)$ un élément $g_i \in \Gamma(U_i , G)$ tel que

$$f'_{ij}(x) = g_i^{-1}(x) \, f_{ij}(x) \, g_j(x) \quad \text{dans} \quad U_i \cap U_j \quad .$$

L'ensemble des classes d'équivalences est désigné par $H^1(U , G)$ (confert G est un groupe abélien discret noté additivement, on prend pour $\Gamma(U_i , G)$ le groupe des applications constante de U_i dans G . Alors f_{ij} est un 2 cocycle de Čech du nerf X_U et $H^1(U , G)$ coïncide avec le groupe ainsi désigné précédemment).

Si $U < V$, on a une application

$$r_V^U : H^1(U , G) \longrightarrow H^1(V , G)$$

définie à l'aide d'une projection $p : I(V) \longrightarrow I(U)$, mais indépendante de la projection choisie (Cf. exposé 11 , paragraphe 7) : on pose

$$(pf)_{r,s} = f_{pr,ps} \quad \text{dans } V_r \cap V_s \quad \text{pour tout } U\text{-cocycle } f .$$

Il est alors immédiat que l'application ainsi définie passe au quotient par la relation d'équivalence, et que l'application r_V^U ainsi obtenue est indépendante de la projection choisie. La limite inductive du système des $\{H^1(U , G) , r_V^U\}$ est désignée par $H^1(X , G)$.

Si U est un recouvrement quelconque, f_{ij} = unité de $\Gamma(U_i \cap U_j , G)$ est un cocycle particulier. Sa classe s'appelle la classe unité de $H^1(X , G)$.

REMARQUE.- Par limite inductive, on entend la notion suivante : deux éléments $\gamma \in H^1(U , G)$ $\gamma' \in H^1(V , G)$ définissent le même élément de $H^1(X , G)$ si et seulement si il existe un recouvrement W , $U < W$, $V < W$ tel que $r_W^U \gamma = r_W^V \gamma'$.

1.3.- Les inclusions (quand elles existent) $\Gamma(U , G_\omega) \subset \Gamma(U , G_d) \subset \Gamma(U , G_c)$ induisent les applications

$$H^1(U , G_\omega) \subset H^1(U , G_d) \subset H^1(U , G_c)$$

Si $h : G' \longrightarrow G$ est un homomorphisme (resp. continu, resp. différentiable, resp. holomorphe), on a des applications

$$h^* : H^1(X , G') \longrightarrow H'(X , G)$$

Si $G' = G$ et si $h(a)$ est l'automorphisme intérieur $h(a).g = a^{-1}ga$ $h^*(a)$ est bijectif.

1.4.- REMARQUE. Si G est commutatif, $H'(X , G)$ est alors un groupe commutatif. On peut alors définir des groupes $H^n(X , G)$ suivant un procédé qui généralise la construction des groupes de Cech. Ceci sera fait dans un exposé ultérieur.

2.- DÉFINITIONS.

2.1.- On dit que G opère effectivement sur F (à gauche) si

a) (G "opère") on a une application $G \times F \longrightarrow F$ (continue, resp. différentiable, resp. holomorphe) notée $(g , f) \longrightarrow g.f$ telle que

$$g_1(g_2 .f) = g_1 g_2 .f \quad , e.f = f \quad (g_1 , g_2 \quad G , e = \text{unité de } G)$$

b) (G "effectif")

$$g.f = f \quad \text{pour tout} \quad f \in F \Longrightarrow g = e$$

en d'autres termes, G est isomorphe à un groupe d'homéomorphismes de F .

2.2.- Espaces fibrés.

Un espace topologique E (resp. variété C^{∞}, resp. variété analytique complexe) est appelé espace fibré de base B (espace topologique, resp. variété C^{∞} , resp. variété analytique complexe) de fibre F (idem) de groupe structural G (topologique, de Lie, complexe de Lie) et de projection p , si l'on a

a) $p : E \longrightarrow B$ surjective est continue (resp. différentiable, resp. holomorphe)

b) G opère effectivement sur F à gauche.

c) il existe un recouvrement $U = \{U_i\}$ de B par des ouverts et des homéomorphismes (resp. isomorphismes différentiables, isomorphismes holomorphes)

$$h_i : p^{-1}(U_i) \approx U_i \times F \quad \text{tels que}$$

(1) si $x \in U_i$ $\quad h_i(p^{-1}(x)) = \{x\} \times F$

(2) il existe des $g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j , G)$ (resp. G_c , G_d , G_{ω})

avec

$$h_i h_j^{-1}(x , f) = (x , g_{ij}(x) . f) \quad \text{si} \quad x \in U_i \cap U_j \ f \in F \quad .$$

$p^{-1}(x)$ est appelée la fibre au-dessus de x ; on la désigne par F_x . (1) entraine que $F_x \approx F$.

REMARQUES.-

1°) Il est immédiat que g_{ij} est un cocycle.

2°) G étant effectif, g_{ij} est entièrement déterminé par h_i et h_j .

Cartes admissibles.-

Soit V un ouvert de B et supposons qu'il existe un homéomorphisme h_V :

$p^{-1}(V) \approx V \times F$. Le système (V , h_V) est une carte admissible, si l'on a, pour tout tout $U_i \in U$

$$h_V\, h_i^{-1}(x , f) = (x , g_{V,i}(x) . f)$$
$$(x \in V \cap U_i , f \in F) \qquad \text{où}$$
$$g_{V,i} \in \Gamma(V \cap U_i , G) \quad (\text{resp. } G_c , G_d , G_\omega)$$

Etant donné $p : E \longrightarrow B$, un espace F , un groupe G vérifiant les propriétés a et b de (2.2) et deux recouvrements $U = \{U_i\}$, $V = \{V_j\}$ de B ayant les propriétés c , <u>on convient de dire qu'ils définissent le même fibré</u> E si toute carte admissible pour U est admissible pour V .

2.3.- <u>Homomorphismes</u>.

Soient deux espaces fibrés $p : E \longrightarrow B$, $p' : E' \longrightarrow B'$ ayant même fibre F et même groupe structural G . Un homomorphisme h de E dans E' est une application (continue, resp. différentiable, resp. holomorphe) $h : E \longrightarrow E'$ telle que

a) la restriction de h à F_x est un homeomorphisme de F_x sur une fibre $F_{x'}$ de E' . En d'autres termes, h induit une application (que l'on suppose continue, resp. différentiable, resp. holomorphe) $\bar{h} : B \longrightarrow B'$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \xrightarrow{\bar{h}} & B' \end{array}$$

est commutatif.

b) pour tout $x' \in B'$, il existe une carte admissible $(V' , h_{V'})$ $h_{V'} : p^{-1}(V') \approx V' \times F$ de E' telle que $V = h^{-1}(V')$ ait les propriétés suivantes

1°) il existe un homéomorphisme $h_V : p^{-1}(V) \approx V \times F$
((V , h_V) est une carte admissible de E)

2°) $h_{V'}\, h\, h_V^{-1} : V \times F \longrightarrow V' \times F$

$$: (x , f) \longrightarrow (\bar{h}(x) , g_V(x) . f) \qquad \left(\begin{smallmatrix} x \in V \\ f \in F \end{smallmatrix}\right)$$

avec $g_V \in \Gamma(V , G)$ (resp. G_c , G_d , G)

Si $B' = B$ $\bar{h}$ = identité, h homéomorphisme sur, on dit que h est un <u>isomorphisme</u>.

3.1.- Construction d'un espace fibré à partir d'un cocycle de la base.

Soit $U = \{U_i\}$ un recouvrement de B, et $\gamma = \{g_{ij}\}$ un U-cocycle. On construit un fibré E de base B, de fibre F comme suit : dans la réunion $\bigcup_{i \in I} (U_i \times F)$ on identifie

$$(x , f) \in U_j \times F \quad \text{et} \quad (x , g_{ij}(x) f) \in U_i \times F \quad \text{si} \quad x \in U_i \cap U_j .$$

E_γ est alors un fibré de fibre F, base B, groupe G, $p : E \longrightarrow B$ étant défini par la projection $U_i \times F \longrightarrow U_i$.

PROPOSITION 3.1.- Les classes d'isomorphie de fibrés de base B, fibre F et groupe structural G, sont naturellement en correspondance biunivoque avec les éléments de $H^1(B , G)$ (resp. G_c, G_d, G_ω) . L'élément unité de $H'(B , G)$ correspond au "fibré trivial" $E = B \times F$.

Soit $\gamma = \{g_{ij}\}$ et $\gamma' = \{g'_{ij}\}$ deux U-cocycles équivalents c'est-à-dire $g'_{ij} = g_i^{-1} g_{ij} g_j$ dans $U_i \cap U_j$ avec $g_i \in \Gamma(U_i , G)$. Si $x \in U_j$, posons $h(x , f) = (x , g_j^{-1}(x) f)$, c'est un homéomorphisme de $U_j \times F$ sur $U_j \times F$. Si $x \in U_i \cap U_j$, (x , f) et $(x , g_{ij}(x) f)$ sont identifiés dans E_γ. Or $h(x , g_{ij}(x) f) = (x , g_i^{-1}(x) g_{ij}(x) f) = (x , g'_{ij}(x) g_j^{-1}(x).f)$ est identifié à $(x , g_j^{-1}(x) f)$ dans $E_{\gamma'}$, h définit donc un homéomorphisme $E_\gamma \longrightarrow E_{\gamma'}$. Il est immédiat de montrer que c'est un isomorphisme des structures fibrées.

E est donc déterminé à une isomorphie près par la classe de cohomologie de γ dans $H^1(U , G)$. D'autre part, si $U < V$ et r_V^U la projection associée, $r_V^U \gamma$ et γ définissent le même fibré d'après la convention de (2.2), d'où la proposition.

Tous les fibrés définis par la même classe $\xi \in H^1(B , G)$ sont dits associés à ξ .

3.2.- Le cas où G n'est pas effectif.

Le sous-ensemble $H \subset G$ des éléments h qui laissent fixe tous les points de F ($hf = f \quad f \in F$) est un sous-groupe fermé invariant dans G et G/H est un groupe topologique qui opère effectivement sur F .

Si G est de Lie, G/H aussi. Si G est complexe de Lie G/H aussi. On a donc des applications naturelles :

$$t : H^1(B , G_c) \longrightarrow H^1(B , G/H_c)$$
$$t : H'(B , G_d) \longrightarrow H'(B , G/H_d)$$
$$t : H'(B , G_\omega) \longrightarrow H'(B , G/H_\omega)$$

Si $\xi \in H'(B , G)$ on dira par abus de langage que les fibrés associés à $t\,\xi$ sont associés à ξ .

3.3.- Les espaces fibrés principaux.

Si $F = G$, G opérant sur G par translation à gauche, on dit que E est un espace fibré principal.

La proposition 3.1 montre que dans chaque classe $\xi \in H^1(B , G)$ il y a un et un seul espace fibré principal de groupe G .

PROPOSITION 3.3.- *Si* $p : E \longrightarrow B$ *est un espace fibré principal de groupe* G , G *opère effectivement à droite sur* E .

En effet, si (U , h_U) est une carte admissible, on définit un produit par G dans $U \times G$ par

$$(x , g).g_1 = (x , gg_1) \quad , \quad g , g_1 \in G \quad , x \in U$$

et l'on pose

$$(h_U(x , g)).g_1 = h_U(x , gg_1)$$

cette application est indépendante des cartes choisies car si $x \in U_i \cap U_j$

$$(x , g) \text{ est identifié à } (x , g_{ij}\, g)$$
$$\text{et} \quad (x , gg_1) \text{ " \quad " \quad " } (x , g_{ij}gg_1)$$

3.4.- Opérations élémentaires sur les fibrés.

a) image inverse. Soit $\bar{f} : B \longrightarrow B'$ une application continue (resp. différentiable, resp. holomorphe) . $\bar{f}$ induit une application naturelle $\bar{f}^* : H^1(B' , G) \longrightarrow H^1(B , G)$ si $\xi \in H^1(B' , G)$, $\bar{f}^*(\xi)$ définit une classe de fibrés sur B , l'image inverse par $\bar{f}$ de la classe de fibrés ξ .

Soit E' un fibré associé à ξ . On construit facilement un fibré associé à $\bar{f}^*(\xi)$, soit E (noté $\bar{f}^* E'$) . E est le sous-espace de $E' \times B$ des points (z' , x) tels que $p'(z') = \bar{f}(x)$ $(x \in B , z' \in E')$. La projection $p : E \longrightarrow B$ est alors $p(z' , x) = x$. On vérifie sans peine que, si l'on pose $f(z' , x) = z'$, l'application $f : E \longrightarrow E'$ induit un homomorphisme d'espaces fibrés.

b) Soit $p : E \longrightarrow B$ un espace fibré principal de groupe G , et F un espace sur lequel G opère (pas obligatoirement effectivement Cf. 3.2) . Nous allons construire un espace fibré E' sur B de fibre F, groupe structural G, noté $E \times_G F$: on identifie $(z, f) \in E \times F$ et $(z.g^{-1}, g.f)$ (ne pas oublier que G opère à gauche sur F et à droite sur E) $E \times_G F$ et E sont associés à une même classe de $H^1(B, G)$.

4.- Exemples d'espaces fibrés.

Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe fermé, G/H l'espace des classes à gauche et $p : G \longrightarrow G/H$ la projection canonique. On dira que $p : G \longrightarrow G/H$ admet une section locale, s'il existe un voisinage U de $p(e)$ $e =$ él. neutre de G) et une application (continue resp. différentiable, resp. holomorphe) $f : U \longrightarrow G$ telle que $p \circ f =$ identité de U.

Si G est un groupe de Lie, il existe toujours une section locale différentiable. Si G est un groupe de Lie complexe et si le sous-groupe fermé H est aussi un groupe de Lie complexe, il existe toujours une section locale différentiable.

PROPOSITION 4.- S'il existe une section locale $p : G \longrightarrow G/H$ est un espace fibré principal de base G/H, projection p, fibre et groupe H l'espace fibré est différentiable si G est de Lie, analytique complexe si G et H sont des groupes de Lie complexes.

PROPOSITION 4bis.- S'il existe une section locale pour le sous-groupe $K \subset G$, $p : G/K \longrightarrow G/H$ est un espace fibré de base G/H, projection p, fibre H/K groupe H/K_0, K_0 étant le plus grand sous-groupe de K invariant dans H. ($K \subset H$ sont deux sous-groupes fermés de G).

Si G est de Lie, l'espace fibré est différentiable, si G est un groupe de Lie complexe de même que H et K, il est analytique complexe.

DÉMONSTRATION.- (de la proposition 4)

Soit f la section locale associée à l'ouvert U de $p(e)$. G opère à gauche sur G/H de manière naturelle (notée $g.x$) et $\{g.U\}$ est un recouvrement ouvert de G/H quand g parcourt G. Soit $\varphi_g : gU \times H \longrightarrow p^{-1}(gU)$ l'application $(x, h) \longrightarrow g.f(g^{-1}.x).h$ ($g^{-1}x \in U$ on peut donc lui appliquer f. On fait ensuite le produit dans G). On a bien $p\ \varphi_g(x, h) = x$ puisque

$$p(gf(g^{-1}x)h) = p(gf(g^{-1}x)) = gp(f(g^{-1}x)) = gg^{-1}x = x$$

φ_g est continue (resp. différentiable, resp. holomorphe) car f l'est par hypothèse de même que le produit dans G.

φ_g est biunivoque car $gf(g^{-1}x)h = gf(g^{-1}x')h' \Longrightarrow$ (en appliquant p aux deux membres) $x = x'$ et par conséquent $h = h'$.

φ_g est sur car si $\gamma \in p^{-1}(gU)$, posons $x = p(\gamma) \in gU$; puisque $gf(g^{-1}x)$ et γ ont même image par p, il existe $h \in H$ tel que $\gamma = g.f(g^{-1}x).h$, et l'on a bien $\varphi_g(x, h) = \gamma$. Nous avons en fait exhibé l'application inverse de φ_g, soit $h_g : p^{-1}(gV) \longrightarrow gU \times H$ qui est par construction continue (resp. différentiable, resp. holomorphe).

Enfin soit $x \in gU \cap g'U$

$$h_{g'} \; h_g^{-1} (x , h) = h_{g'}(g.f(g^{-1}x).h) = (x , h')$$

avec $h' = f^{-1}(g^{-1}x) \, g'^{-1} \, gf(g^{-1}x)h$. On montre immédiatement que

$f^{-1}(g^{-1}x) \, g'^{-1}gf(g^{-1}x) \in \Gamma(gU \cap g'U , H)$ est un cocycle, C.Q.F.D.

APPLICATIONS.

a) Variétés de Stiefel : on a les structures fibrées

$$O(n) \longrightarrow O(n)/O(p) \quad , \quad U(n) \longrightarrow U(n)/U(p)$$

b) grassmanniennes

$$O(n+p)/O(p) \longrightarrow O(n+p)/O(n) \times O(p)$$

est fibré principale de groupe $O(n)$

$$U(n+p)/U(p) \longrightarrow U(n+p)/U(n) \times U(p)$$

est fibré principal de groupe $U(n)$.

Ces fibrations joueront un grand rôle dans la suite.

5.- Sections des fibrés.

On appelle section d'un fibré $p : E \longrightarrow B$ une application $f : B \longrightarrow E$ continue (resp. différentiable, resp. holomorphe) telle que pf = identité.

PROPOSITION 5.1.- Un espace fibré principal de groupe G est équivalent au fibré trivial si et seulement si il admet une section.

a) Supposons que $f : B \longrightarrow E$ soit une section. Si $x \in U_i$, $f(x) \in p^{-1}(U_i)$ donc $h_i(f(x))$ est défini et on peut écrire $h_i(f(x)) = (x , g_i(x))$ où $g_i \in \Gamma(U_i , G)$. Si $x \in U_i \cap U_j$, on a $g_i^{-1}(x) \, g_{ij}(x) \, g_j(x) = e$ (e = unité de G) en effet $h_i h_j^{-1}(x , g_j(x)) = (x , g_{ij}(x) \, g_j(x))$ et

$h_j^{-1}(x, g_j(x)) = f(x)$ entraine $h_i h_j^{-1}(x, g_j(x)) = h_i(f(x)) = (x, g_i(x))$ le cocycle g_{ij} est donc cohomologue au cocycle unité.

b) Supposons maintenant qu'il existe $g_i \in \Gamma(U_i, G)$ tel que

$$g_i^{-1}(x)\, g_{ij}(x)\, g_j(x) = e$$

posons $f_i(x) = h_i^{-1}(x, g_i(x))$ pour $x \in U_i$. Si $x \in U_i \cap U_j$ $f_j(x) = h_j^{-1}(x, g_j(x))$ et par conséquent $f_i(x) = h_i^{-1}(x, g_{ij}(x)\, g_j(x)) = h_j^{-1}(x, g_j(x)) = f_j(x)$. Les f_i définissent donc une application $f : B \longrightarrow E$ qui est une section puisque $p \circ f_i = p\, h_i^{-1}(x, g_i(x)) = x$.

<u>COROLLAIRE.- Un espace fibré de groupe</u> G <u>est équivalent au fibré trivial si et seulement si l'espace fibré principal associé admet une section.</u>

En effet la propriété d'être équivalent à un fibré trivial est une propriété qui ne dépend que du cocycle g_{ij}.

5.2.- <u>Réduction du groupe structural.</u>

Soit $\xi \in H^1(B, G)$, E un fibré associé à ξ de fibre F et H un sous-groupe fermé de G. (si G est un groupe de Lie complexe, on suppose en plus que H est aussi un groupe de Lie complexe). Soit $h : H \longrightarrow G$ l'injection et $h^* : H^1(B, H) \longrightarrow H^1(B, G)$ l'application correspondante des ensembles de cohomologie. S'il existe $\check{\xi} \in H^1(B, H)$ tel que $h^* \check{\xi} = \xi$, on dit que l'on peut réduire le groupe structural G de E (ou ξ) au sous-groupe H.

Supposons maintenant que E soit un fibré principal de groupe G. Soit E/H l'espace quotient obtenu en identifiant z et $z.g$ $(z \in E, g \in H)$ et $\sigma : E \longrightarrow E/H$ la projection canonique. On voit immédiatement que E est un espace fibré principal de base E/H, groupe H, dont on désigne la classe dans $H^1(E/H, H)$ par $\check{\xi}$.

<u>PROPOSITION 5.2.- Le diagramme suivant est commutatif</u>

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "p"'] & & E/H \arrow[dl, "\rho"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

(ρ est l'application induite par σ, et p la projection $E \longrightarrow B$)

$E/H \longrightarrow B$ <u>et</u> $E \longrightarrow B$ <u>sont tous deux associés à</u> ξ <u>le premier a pour fibre</u> G/H, <u>le deuxième</u> G.

<u>Si</u> h^* <u>désigne l'application</u> $H^1(E/H, H) \longrightarrow H^1(E/H, G)$ <u>on a</u>

$$h^* \check{\xi} = \rho^* \xi$$

(on suppose que H a une section locale dans G Cf. paragraphe 4). La première partie de la démonstration est une généralisation de ce qui a été fait au paragraphe 4 . (Cf. Steenrod, Topologie of fibre bundle Princeton n° 14 , paragraphe 9.6, p. 45).

Démontrons $h^* \check{\xi} = \rho^* \xi$ (c'est-à-dire $\rho^* \xi$ est un fibré de base E/H dont on peut réduire le groupe structural à H) .

On peut obtenir un fibré de la classe $\rho^* \xi$ de la manière suivante : soit W le sous-ensemble des points de $(E/H) \times E$ tels que $\rho(z') = p(z)$ $(z' \in E/H \, , \, z \in E)$ $W \longrightarrow E/H$ est le fibré cherché. Soit d'autre part $W' = E \times_H G$ le fibré de fibre G obtenu par la construction du paragraphe 3.4.b à partir du fibré $\sigma : E \longrightarrow E/H$. W' est associé à $h^* \check{\xi}$. Explicitement, W' est l'espace quotient de $E \times G$ obtenu en identifiant $(z \, , \, g)$ et $(z.h \, , \, h^{-1} g)$ $(z \in E \, , \, g \in G \, , \, h \in H)$ .W et W' sont isomorphes ; en effet si $(z \, , \, g)$ est un représentant d'un élément de W' , $(\sigma(z) \, , \, z.g)$ est un élément de W indépendant du choix du représentant. On définit ainsi un homomorphisme $W' \longrightarrow W$ dont on montre immédiatement qu'il est un isomorphisme.

THÉORÈME 5.2.- <u>La condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse réduire à</u> H <u>le groupe structural des fibrés associés à</u> $\xi \in H^1(B \, , \, G)$ <u>est que l'espace fibré associé</u> $\rho : E/H \longrightarrow B$ (mêmes notations que ci-dessus) <u>ait une section</u> s . Posons $\eta = s^*(\check{\xi})$. η <u>représente un fibré sur</u> B <u>de groupe</u> H <u>et</u> $h^* \eta = \xi$. <u>Il existe des cartes admissibles pour le fibré</u> E , $\{ U_i \times G \}$ ($\{ U_i \}$ est un recouvrement de B) <u>telles que</u> $g_{ij}(x) \in H$ si $x \in U_i \cap U_j$ <u>le cocycle</u> g_{ij} <u>représentant</u> ξ <u>si l'on considère</u> $g_{ij}(x)$ <u>comme appartenant à</u> G , <u>représentant</u> η <u>si l'on considère</u> $g_{ij}(x)$ <u>comme appartenant à</u> H . <u>Enfin si</u> $x \in U_i$, $s(x) = (x \, , \, \sigma(e))$ où e = él. unité de G .
(pour la démonstration voir Steenrod paragraphe 9.4).

5.3.- <u>Cas d'existence de sections.</u>

La réduction du groupe structural est une opération importante, lorsqu'elle est possible. Ce qui précède nous montre donc l'intérêt qu'il y a à savoir reconnaître si un fibré possède ou non des sections. <u>Dans ce qui suit nous supposerons que</u> B <u>est une variété différentiable</u> C^∞ <u>dénombrable à l'infini</u> (c'est-à-dire réunion dénombrable d'ensembles compacts).

On démontre alors le théorème suivant. (Steenrod paragraphe 12)

THÉORÈME 5.3.- Soit $p : E \longrightarrow B$ un espace fibré associé à $\xi \in H^1(B , G_c)$ dont la fibre F est contractible (exposé 14, paragraphe 2.3) ; il existe alors une section continue.

On démontre d'autre part que si $\xi \in H^1(B , G_d)$, l'existence d'une section continue entraîne celle d'une section différentiable C^∞ . Le théorème 5.3 est donc valable si l'on remplace continu par différentiable (Steenrod paragraphe 6.7).

THÉORÈME 5.4.- (Cartan, Mostow, Iwasawa) Soit G un groupe de Lie connexe et H un sous-groupe compact maximal de G . Alors $G = H.K$ ou K est isomorphe à un espace euclidien. Donc :

THÉORÈME 5.5.- Tout espace fibré de groupe G connexe peut être réduit à un espace fibré de groupe H , où H est un sous-groupe compact maximal de G .

En effet le fibré associé de fibre G/H admet une section différentiable d'après 5.3 et 5.4.

En d'autres termes $H^1(B , G_d) \approx H^1(B , H_d)$