C. Chamfy

# Valeur minima du module pour un ensemble ferme d'entiers algébriques

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 10 (1956-1957), exp. nº 13, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A13_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1956/57
-:-:-:-

Exposé n° 13

# VALEUR MINIMA DU MODULE POUR UN ENSEMBLE FERMÉ D'ENTIERS ALGÉBRIQUES

( Exposé de Mlle C. CHAMFY, le 25.2.1957 )

Ensemble $S_1$ .- Soit $S_1$ l'ensemble des entiers algébriques supérieurs à 1 en module dont tous les conjugués sont intérieurs au cercle-unité. Ces nombres sont évidemment réels.

1°) Mr Salem a démontré en 1944 (Duke Math. J., t. 11, 1944, p. 103-108) que cet ensemble est fermé.

MM. Dufresnoy et Pisot (Ann. sc. Ec. Norm. Sup., 70, 1953, p. 105-133) ont donné une nouvelle démonstration de ce fait qui leur a permis de caractériser les nombres de $S_1$ appartenant à l'ensemble dérivé $S_1'$ .

Soit $P(z)$ le polynome irréductible à coefficients entiers :

$$\boxed{P(z) \equiv \varepsilon z^s + a_1 z^{s-1} + \dots + a_s} \qquad (a_s > 0 \, , \varepsilon = \pm 1)$$

qui a pour racine le nombre $\theta$ de $S_1$ .

MM. Dufresnoy et Pisot ont montré que la condition nécessaire et suffisante pour que $\theta$ appartienne à $S_1'$ est qu'il existe un polynome $A(z)$ à coefficients entiers tel que, sur $|z| = 1$ , $|A(z)| \leq |P(z)|$ , l'égalité n'ayant lieu qu'en un nombre fini de points.

Ceci permet de montrer que les nombres totalement réels de $S_1$ et les puissances entières $> 1$ des nombres de $S_1$ appartiennent à $S_1'$ .

Le critère permet aussi de mettre en évidence que le plus petit nombre positif $\theta_1'$ de $S_1'$ est la racine supérieure à 1 de :

$$z^2 - z - 1 \qquad \theta_1' = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

2°) Sachant que $S_1$ est fermé, et par conséquent n'admet ni 1 ni -1 comme valeurs d'accumulation, Mr Siegel a recherché les nombres de $S_1$ les plus petits en valeur absolue. Il a mis en évidence les deux plus petits nombres positifs de $S_1$ (Duke Math. J., t. 11, 1944, p. 597-602).

MM. Dufresnoy et Pisot (Ann. sc. Ec. Norm. Sup., t. 72, 1955, p. 69-92) ont déterminé tous les nombres positifs de $S_1$ qui sont inférieurs à $\theta_1'$ ainsi que ceux qui lui sont supérieurs en en restant assez voisins, montrant ainsi que $\theta_1'$ est un nombre isolé de $S_1'$.

Ils ont associé au nombre $\theta$, selon une idée de Mr Salem, la fraction rationnelle $\boxed{f(z) \equiv \dfrac{P(z)}{Q(z)}}$, ou $\boxed{Q(z) \equiv \varepsilon z^s P\left(\dfrac{1}{z}\right)}$

$f(z)$ est méromorphe dans $|z| \leqslant 1$, y admet pour seul pôle simple $\frac{1}{\theta}$ et $|f(z)| = 1$ sur $|z| = 1$. (On écarte et on étudie à part les nombres $\theta$ correspondant à un polynome $P(z)$ réciproque, pour lesquels $f(z) \equiv +1$ ). $f(z)$ a déjà été introduite dans les études précédentes.

Soit le développement en série de puissances de $f(z)$ au voisinage de $z = 0$ : $f(z) \equiv u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n + \dots$ $\quad Q(z) \equiv 1 + \varepsilon a_{s-1} z + \dots$ et par conséquent $f(z)$ a un développement à coefficients entiers. En particulier, $u_0 = a_s$ est $> 0$.

MM. Dufresnoy et Pisot ont établi que les coefficients $u_0, \dots, u_n, \dots$ satisfont à une suite d'inégalités algébriques, et que $\theta$ satisfait également à une suite d'inégalités algébriques faisant intervenir les $u_n$. Ayant trouvé un moyen commode pour former pratiquement ces deux suites d'inégalités, ils en ont déduit les plus petits nombres positifs de $S_1$.

Le plus petit, déjà mis en évidence par Mr Siegel, est la racine supérieure à 1 de $z^3 - z - 1$, que nous appellerons $\theta_1$.

Le problème s'est posé de généraliser ces résultats à d'autres ensembles d'entiers algébriques, de définitions analogues à celle de $S_1$.

Considérons l'ensemble des entiers algébriques qui sont, ainsi que l'un de leurs conjugués, extérieurs au cercle-unité, tous les autres conjugués lui étant intérieurs. Il convient d'y distinguer deux sous-ensembles, suivant que les deux conjugués extérieurs au cercle-unité sont réels ou imaginaires conjugués. Soit $S_2$ le sous-ensemble des nombres réels, $\overline{S}_2$ le sous-ensemble des nombres imaginaires.

Dans la suite nous ferons correspondre à tout nombre de $S_1$ , $S_2$ ou $\overline{S}_2$ le polynome irréductible à coefficients entiers dont il est racine, soit :

$$P(z) \equiv \varepsilon z^s + a_1 z^{s-1} + \dots + a_s \qquad (a_s > 0 , \varepsilon = \pm 1 ) .$$

Ensemble $\overline{S}_2$ .- Mr Kelly a démontré en 1950 (Amer. J. Math., 72, 1950, p. 565-572) que les nombres limites de $\overline{S}_2$ appartiennent à $\overline{S}_2$ s'ils sont imaginaires, à $S_1$ s'ils sont réels. L'ensemble $S_1 + \overline{S}_2$ est donc fermé.

Mlle Doubrère a, en 1955, établi le critère suivant (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 240, 1955, p. 2111-2113).

Pour qu'un nombre $\theta$ de $\overline{S}_2$ ou de $S_1$ soit valeur limite de $\overline{S}_2$ , il faut et il suffit qu'il existe un polynome $A(z)$ à coefficients entiers tel que, sur $|z| = 1$

$$|A(z)| \leq |P(z)| \quad \text{si} \quad \theta \in \overline{S}_2$$
$$|A(z)| \leq |P^2(z)| \quad \text{si} \quad \theta \in S_1 .$$

l'égalité n'étant vérifiée qu'en un nombre fini de points. Cela s'applique, en particulier aux puissances entières $> 1$ des nombres de $\overline{S}_2$ , qui appartiennent à l'ensemble dérivé. Le critère montre également que les nombres de $S_1'$ appartiennent à l'ensemble dérivé de $\overline{S}_2$ : en effet si $\theta \in S_1'$ , il existe un polynome $A_1(z)$ à coefficients entiers tel que, sur $|z| = 1$ : $|A_1(z)| < |P(z)|$ sauf en un nombre fini de points. Le polynome $A(z) \equiv A_1^2(z)$ satisfait au critère précédent.

Ensemble $S_2$ .- Lorsque les deux nombres d'un même couple conjugué tendent simultanément vers une limite, on ne sait pas déterminer dans tous les cas la nature de ces limites.

Ou bien les deux nombres du couple tendent vers deux nombres conjugués de $S_2$

Ou bien l'un des deux nombres tend vers un nombre de $S_1$ et même de $S_1'$ et on ne peut alors rien dire de la limite de l'autre nombre du couple.

On a la condition suffisante, qui rappelle les critères précédents.

Pour qu'un nombre de $S_2$ appartienne à son ensemble dérivé, il suffit qu'il existe un polynome $A(z)$ à coefficients entiers tel que : $|A(z)| \leq |P(z)|$ sur $|z| = 1$ , l'égalité n'ayant lieu qu'en un nombre fini de points.

Ceci montre, comme pour l'ensemble $S_1$ , que les puissances entières $> 1$ des nombres de $S_2$ , et les nombres totalement réels de $S_2$ , appartiennent à l'ensemble dérivé.

Minimum du module des nombres de $\overline{S}_2$ , et des nombres de $S_2$ , quand les deux nombres d'un même couple sont simultanément bornés en valeur absolue.- $\overline{S}_2$ étant fermé n'a pas de point d'accumulation sur $|z| = 1$ . On peut donc chercher quels sont les nombres de $\overline{S}_2$ qui ont le plus petit module possible. Nous allons déterminer ces nombres et montrer d'autre part que deux nombres conjugués de $S_2$ ne peuvent pas avoir simultanément des modules inférieurs à un certain minimum.

Remarquons tout d'abord que les nombres imaginaires purs de $\overline{S}_2$ ont pour carrés des nombres réels dont tous les conjugués sont intérieurs au cercle-unité, donc des nombres de $S_1$ : les nombres imaginaires purs de $\overline{S}_2$ sont les racines carrées des nombres négatifs de $S_1$ .

Le module minimum des nombres de $\overline{S}_2$ imaginaires purs est donc $\sqrt{\theta_1}$ , et ce minimum est atteint pour les racines de $z^6 - z^2 + 1$ . extérieures au cercle-unité.

D'autre part, les nombres limites de $\overline{S}_2$ situés sur l'axe imaginaire coïncident, en vertu du critère de Mlle Doubrère, avec les racines carrées des nombres négatifs de $S_1'$ . Ceux qui ont le plus petit module sont donc racines de $z^4 + z^2 - 1$ et ce module vaut

$$\sqrt{\theta_1'} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \quad .$$

De même, les couples conjugués de $S_2$ formés de nombres opposés sont les racines carrées des nombres positifs de $S_1$ . Celui de ces couples ayant la plus petite valeur absolue est donc formé des racines extérieures au cercle-unité de $z^6 - z^2 - 1$ , et cette valeur absolue vaut $\sqrt{\theta_1'}$ .

Nous allons montrer que cette valeur $\sqrt{\theta_1'}$ est le minimum du module des nombres de $\overline{S}_2$ , déterminer tous les couples pour lesquels ce minimum est atteint, et montrer qu'il n'existe pas de couple de nombres de $S_2$ simultanément inférieurs ou égaux en valeur absolue à $\sqrt{\theta_1'}$ , autre que celui que nous venons de déterminer.

Soit $\alpha$ , $\beta$ , un couple de nombres conjugués de $S_2$ ou $\overline{S}_2$ , $P(z)$ le polynome correspondant. Soit $Q(z) \equiv \varepsilon z^s P(\frac{1}{z})$ . Faisons correspondre au couple $\alpha$ , $\beta$ la fraction rationnelle $f(z) \equiv \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ .

<u>Supposons que le polynome</u> $P(z)$ <u>n'est pas réciproque</u>.
$f(z)$ ne se réduit pas à une constante. Elle est méromorphe pour $|z| \leq 1$ , y admet pour pôles simples $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$ , et $|f(z)| = 1$ sur $|z| = 1$ . Soit : $f(z) \equiv u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n + \dots$ , le développement en série de puissances de $f(z)$ au voisinage de $z = 0$ . Il est à coefficients entiers et $u_0$ est $> 0$ .

On considère la fonction $\Phi(z) \equiv f(z) \dfrac{(\alpha z - 1)(\beta z - 1)}{(z - \alpha)\quad(z - \beta)}$

$|\Phi(z)| = 1$ sur $|z| = 1$ .

Elle est holomorphe et bornée par 1 en module pour $|z| \leq 1$ . Il en sera de même pour la suite de fonctions :

$$\Phi_1(z) \equiv \frac{1}{z}\ \frac{\Phi(z) - \Phi(0)}{\Phi(z)\Phi(0) - 1}\ , \ \dots\ , \quad \Phi_n(z) \equiv \frac{1}{z}\ \frac{\Phi_{n-1}(z) - \Phi_{n-1}(0)}{\Phi_{n-1}(z)\,\Phi_{n-1}(0) - 1}\ ,$$

tant que ces fonctions sont définies, donc tant qu'on n'a pas $\Phi_n(z) \equiv \pm 1$ , c'est-à-dire tant qu'on n'a pas $|\Phi_n(0)| = 1$ .

On obtient des relations d'inégalité entre les coefficients $u_n$ de $f(z)$ et ses pôles $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$ , en exprimant que :
$|\Phi(0)| \leq 1$ , ... , $|\Phi_n(0)| \leq 1$ .

Nous supposerons désormais $\boxed{|\alpha| < \sqrt{\theta_1} \quad \text{et} \quad |\beta| < \sqrt{\theta_1}}$ (1)

1) $|\Phi(0)| \leq 1$ montre que les inégalités (1) entraînent $\boxed{u_0 = 1}$
On a alors $|\Phi(0)| < 1$ et on peut former $\Phi_1(z)$ .

2) Exprimons que $|\Phi_1(0)| \leq 1$ :

a) Cette inégalité entraîne, lorsque (1) est vérifié : $\boxed{u_1 = 0}$ ou $\boxed{u_1 = \pm 1}$

b) si $|\Phi_1(0)| = 1$ : $\Phi_1(z) \equiv \pm 1$ et $f(z) \equiv \dfrac{(\alpha z - 1)(\beta z - 1)(z \pm \alpha\beta)}{(z - \alpha)(z - \beta)(\alpha\beta z \pm 1)}$

Ceci entraîne que $\alpha$ et $\beta$ sont des unités du 3e degré et la 3e racine de $P(z)$, nécessairement réelle, est l'inverse d'un nombre de $S_1$ du 3e degré dont la valeur absolue vaut $|\alpha| \times |\beta|$.

Or le plus petit nombre positif de $S_1$, $\theta_1$ est une unité du 3e degré dont les deux conjugués sont imaginaires. L'inverse de $\theta_1$ a donc pour conjugués deux nombres de $\overline{S}_2$ dont le module est $\sqrt{\theta_1}$ : le minimum du module des nombres de $\overline{S}_2$ tels que $\Phi_1(z) \equiv \pm 1$ est $\sqrt{\theta_1}$ ; il existe deux couples opposés pour lesquels ce minimum est atteint, formés des racines de : $z^3 + z^2 - 1$ et $z^3 - z^2 + 1$.

Il n'existe pas, d'autre part, de couple de nombres de $S_2$ tels que $\Phi_1(z) \equiv \pm 1$ qui soient simultanément $\leq \sqrt{\theta_1}$ en valeur absolue. Supposons donc $|\Phi_1(0)| < 1$ – $\Phi_2(z)$ est alors bien définie.

3) Exprimons $|\Phi_2(0)| \leq 1$ :

a) Si $u_1 = 0$ : cette inégalité entraîne que :

– si $\alpha$ et $\beta$ sont réels, ils sont nécessairement de signes contraires et $\boxed{u_2 = +1}$.

– si $\alpha$ et $\beta$ sont imaginaires, $\boxed{u_2 = -1}$.

b) Si $u_1 = \pm 1$ : l'inégalité $|\Phi_2(0)| \leq 1$ entraîne simultanément, quand (1) est vérifié, $u_2 < 1$ et $u_2 > 0$.

Ce cas est donc impossible.

c) Supposons que $|\Phi_2(0)| = 1$, $u_1$ étant égal à $0$.

$\alpha$ – Si $\Phi_2(0) = +1$, $\Phi_2(z) = +1$.

On retrouve le cas écarté au début où $P(z)$ est un polynome réciproque du 4e degré. Etudions-le ici.

Si les 4 racines sont réelles, on peut déterminer le polynome $P(z)$ pour lequel la plus grande racine (en valeur absolue) est minima. On vérifie que ce minimum est supérieur à $\sqrt{\theta_1}$.

Si les 4 racines sont imaginaires, on forme le polynome transformé de $P(z)$ par $t = z_1 z_2$. C'est aussi un polynome réciproque du 4e degré. Il a deux racines de module 1, $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\beta}{\alpha}$ et $\alpha\beta$ est la seule racine $> 1$. Il est immédiat de montrer que cette racine réelle est supérieure à $\theta_1$.

$\beta$ - Si $\Phi_2(0) = -1$ , $\Phi_2(z) \equiv -1$ .

$\alpha$ et $\beta$ sont des unités du 4e degré dont les deux conjugués intérieurs au cercle-unité sont réels si $\alpha$ et $\beta$ appartiennent à $\overline{S}_2$ , imaginaires s'ils appartiennent à $S_2$ . Les deux familles de polynomes $P(z)$ correspondantes sont réciproques l'une de l'autre. Si $\alpha$ et $\beta$ sont imaginaires, $\alpha\beta$ est encore la seule racine réelle supérieure à 1 du polynome transformé de $P(z)$ par $t = z_1 z_2$ . On voit alors que cette racine est nécessairement supérieure à $\theta_1$ ; $\alpha$ et $\beta$ étant des unités, leurs deux conjugués réels ne peuvent pas être simultanément supérieurs à $\frac{1}{\sqrt{\theta_1}}$ en valeur absolue. Or, ce sont les inverses des nombres de $S_1$ correspondant à $\Phi_2(z) \equiv -1$ . Donc si $|\Phi_2(0)| = 1$ , (1) ne peut être vérifié : $|\Phi_2(0)| < 1$ , et on peut former $\Phi_3(z)$ .

4) Exprimons $|\Phi_3(0)| \leqslant 1$ : cela entraîne $\boxed{u_3 = 0}$

Si (1) est vérifié, le développement de $f(z)$ est donc de la forme :

$$f(z) \quad 1 + z^2 + u_4 z^4 + \dots \qquad \text{si } \alpha \text{ et } \beta \in S_2$$
$$f(z) \quad 1 - z^2 + u_4 z^4 + \dots \qquad \text{si } \alpha \text{ et } \beta \in \overline{S}_2$$

Considérons la fonction : $$\boxed{g_1(z) \equiv \frac{(z^4 + \varepsilon z^2 - 1)\, f(z) - (z^4 - 1)}{(z^4 - 1)\, f(z) - (z^4 - \varepsilon z^2 - 1)}}$$

où $\varepsilon = +1$ si $\alpha$ et $\beta$ sont réels , $\varepsilon = -1$ s'ils sont imaginaires.
La fonction $\varphi(z) \equiv (\alpha z - 1)(\beta z - 1)[(z^4 - 1) f(z) - (z^4 - \varepsilon z^2 - 1)]$ est holomorphe pour $|z| \leqslant 1$ . Sur $|z| = 1$ , $|z^4 - 1| < |z^4 + \varepsilon z^2 - 1|$ . Donc, en vertu du théorème de Rouché, $\varphi(z)$ a, dans $|z| \leqslant 1$ , autant de zéros que $(\alpha z - 1)(\beta z - 1)(z^4 - \varepsilon z^2 - 1)$ , soit quatre, et il en est de même du dénominateur de $g_1(z)$ . Or, le développement de ce dénominateur est de la forme : $-u_4 z^4 + \dots$ Il n'a donc pas de zéro autre que $z = 0$ , et $u_4$ est $\neq 0$ ; $z = 0$ est le seul pôle possible de $g_1(z)$ . Mais son numérateur a un développement de la forme : $(1 - u_4)z^4 + \dots$ ; il a donc $z = 0$ pour zéro d'ordre 4 au moins. $g_1(z)$ <u>est donc holomorphe pour</u> $|z| \leqslant 1$ .

D'autre part $|g_1(z)| = 1$ <u>sur</u> $|z| = 1$ .

$g_1(0) = \dfrac{u_4 - 1}{u_4}$ et la condition $|g_1(0)| \leq 1$ est équivalente à

$$\boxed{u_4 > 0}$$

Supposons $u_4 > 1$ : $g_1(0)$ est alors $\neq 0$ . La fonction :

$$g_2(z) \equiv \frac{g_1(z) - g_1(0)}{g_1(z)\ g_1(0) - 1} \times \frac{1}{z}$$

est holomorphe et bornée par 1 en module pour $|z| \leq 1$ . Donc $|g_2(\frac{1}{\alpha})| \leq 1$ . On vérifie que cette inégalité est dans tous les cas incompatible avec (1) .

Donc : $\boxed{u_4 = 1}$ .

Le développement de $g_1(z)$ , valable pour $|z| \leq 1$ , est alors à coefficients entiers. Sa valeur moyenne sur $|z| = 1$ étant 1 , $g_1(z)$ se réduit à un monôme de la forme : $g_1(z) \equiv \pm z^p$ et comme $g_2(0) = 0$ : $p \geqslant 1$ .

Donc
$$\boxed{f(z) \equiv \frac{(z^4 - 1) \pm z^p(z^4 - \varepsilon z^2 - 1)}{(z^4 + \varepsilon z^2 - 1) \pm z^p(z^4 - 1)}}$$

Si $\varepsilon = -1$ : $\alpha$ et $\beta$ tendent, quand $p \longrightarrow +\infty$ , vers le couple $\pm i\sqrt{\theta_1''}$ , ces deux nombres étant racines de $z^4 + z^2 - 1$ . Nous avions déjà signalé qu'ils appartenaient à l'ensemble dérivé de $\overline{S}_2$ .

Si $\varepsilon = +1$ : $\alpha$ et $\beta$ tendent vers le couple $\pm\sqrt{\theta_1''}$ , ces nombres étant racines de $z^4 - z^2 - 1$ . Il était évident, en vertu de la condition suffisante trouvée, que ces nombres appartiennent à l'ensemble dérivé de $S_2$ .

Si $p$ est pair : $\alpha$ et $\beta$ sont les racines carrées d'un nombre de $S_1 > 0$ ou $< 0$ , car les polynomes $(z^2 - 1) \pm z^q(z^2 - z - 1)$ ont, en vertu du théorème de Rouché, une racine appartenant à $S_1$ .

Ces nombres ont déjà été étudiés.

Si $p$ est impair , si $\alpha$ et $\beta$ sont réels, ils sont de signes contraires. On vérifie immédiatement qu'il est impossible de trouver $\alpha > 0$ tel que

$\alpha < \sqrt{\theta_1}$ et $\alpha^p(\alpha^4 - \alpha^2 - 1) - (\alpha^4 - 1) = 0$ .

Si $\alpha$ et $\beta$ sont imaginaires, on montre que, si $p \geqslant 3$ , il est impossible que

$$|\alpha^p| = \left| \frac{\alpha^4 - 1}{\alpha^4 + \alpha^2 - 1} \right| \quad \text{si} \quad |\alpha| < \sqrt{\theta_1} .$$

Pour $p = 1$ , on forme le transformé de $P(z)$ par $z_1 z_2 = t$ . Il a $\alpha\beta$ pour plus grande racine $> 0$ . On vérifie que $\theta_1$ est inférieur à cette racine.

Il est donc impossible de trouver un couple de nombres de $S_2$ ou $\overline{S}_2$ dont les modules soient simultanément inférieurs à $\sqrt{\theta_1}$ . Il existe trois couples de $\overline{S}_2$ et trois seulement dont le module vaut $\sqrt{\theta_1}$ . Ces nombres sont racines de : $z^6 - z^2 + 1$ , $z^3 + z^2 - 1$ et $z^3 - z^2 + 1$ .

Le couple $\pm \sqrt{\theta_1}$ est un couple de $S_2$ . Ces nombres sont racines de : $z^6 - z^2 - 1$ .